Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 10, с. 583 – 588

О законе затухания квазидвумерной турбулентности

С. В. Кострыкин[*×1)], *А. А. Хапаев*[*], *И. Г. Якушкин*[*]

[*] *Институт физики атмосферы им. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия*

[×] *Институт вычислительной математики РАН, 119333 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 апреля 2012 г.

После переработки 13 апреля 2012 г.

Приведены результаты лабораторных измерений затухающей квазидвумерной турбулентности в тонких слоях жидкости при разных значениях глубины слоя. Показано, что при больших значениях числа Рейнольдса закон затухания соответствует нелинейному придонному трению с коэффициентом трения, подчиняющимся закону, следующему из теоретических оценок: $\lambda \sim (\nu/h^2)^{1/2}|K|^{1/4}$, где K – функция Окубо–Вайса, зависящая от энстрофии и степени эллиптичности вихрей. Показано изменение структуры течения в процессе затухания.

Описание эволюции крупномасштабных вихрей с вертикальной осью в стратифицированной жидкости представляет собой задачу, имеющую многочисленные приложения к процессам, происходящим в природных и технических гидродинамических системах, включая течения в земной атмосфере и океане, в атмосферах других планет (Красное пятно Юпитера), астрофизических дисках, намагниченной плазме и т.д. [1–4]. Во всех этих случаях продолжаются дискуссии о том, насколько течения в тонких слоях вещества соответствуют свойствам двумерных моделей, изученных теоретически и с помощью численных экспериментов [1, 5, 6]. Для решения этого и других смежных вопросов важное значение имеют лабораторные эксперименты на мелкой воде, дающие, как было показано М.В. Незлиным, адекватное описание широкого круга явлений в сплошной среде [3]. По мнению различных авторов, для соответствия между двумерными и квазидвумерными течениями (в том числе турбулентными) необходим правильный учет внешнего (придонного) трения, являющегося причиной возникновения трехмерной циркуляции. В случае общего вращения или сильного магнитного поля диссипация энергии происходит в узких слоях, образующихся около границ или в областях сильных сдвигов скорости течения (слои Экмана, Стюартсона, Гартмана, Шерклиффа), влияние которых на двумерное невязкое течение может быть учтено в рамках линейной теории. В отсутствие вращения или намагниченности вопрос о сравнительном поведении двумерных и квазидвумерных течений изучался как экспериментально, так и путем численного моделирования для стационарной и затухающей турбулентности [5, 7–13]. В большинстве работ при этом предполагалось, что диссипация может быть учтена в рамках линейного (рэлеевского) приближения. Такой подход, однако, не является обоснованным при больших числах Рейнольдса, приводящих к возникновению аналога экмановского пограничного слоя и циркуляции в вертикальной плоскости, что следует уже из работ Кармана и его последователей [14, 15] для модельных течений. Для вихревых течений с простой структурой этот вопрос рассматривался на основе численного и лабораторного моделирования в [16–19]. В работе [18] с помощью приближенного аналитического подхода было показано, что циркуляция в вертикальной плоскости связана с кривизной линий тока на поверхности, которая определяется через так называемую функцию Окубо–Вайса (О.–В.), характеризующую топологию течения [20]. К такому же выводу пришли авторы [19], в чьей работе были представлены результаты эксперимента, указывающие на высокую степень корреляции между значениями функции О.–В. и вертикальной компонентой скорости течения.

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования, показывающие существование интервала времени, на котором закон затухания квазидвумерной турбулентности в тонких слоях жидкости при больших числах Рейнольдса определяется нелинейным коэффициентом трения, зависящим от средней по течению функции О.–В. Этот результат соответствует предсказаниям, следующим из теоретической модели кармановского типа, описывающей неосесимметричное течение со свободной границей. Более детальный анализ экспериментальных данных показывает, что затухание происходит по-разному в областях с разной топологией течения, что является причиной эволюции вихревых струк-

[1)]e-mail: kostr@inm.ras.ru

тур, приводящей к их превращению в струйные течения.

Для лабораторных наблюдений квазидвумерного турбулентного течения использовалась установка, где квазидвумерное течение генерируется МГД-методом [11, 18, 21]. Установка представляет собой выровненную по горизонтали платформу, на которой закреплено 80 постоянных магнитов с шахматным изменением полярности. Размер одного магнита $40 \times 35\,\text{мм}^2$. Расстояние между ними 5 мм. Вертикальная компонента магнитной индукции в тонком слое жидкости может быть описана выражением

$$B = B_0 \exp(-z/l_z) \sin(2\pi x/l_x) \sin(2\pi y/l_y),$$

где $B_0 = 3200\,\text{Гс}$, $l_z = 0.94\,\text{см}$, $l_x = 8\,\text{см}$, $l_y = 8.8\,\text{см}$. Поверх области, занятой магнитами, установлена прямоугольная стеклянная кювета площадью $40 \times 35\,\text{см}^2$, которая заполнена проводящей жидкостью (слабым раствором медного купороса, $\rho \approx 1\,\text{г/см}^3$, $\nu \approx 0.01\,\text{см}^2/\text{с}$). Толщина дна кюветы 4 мм, высота 35 мм. На противоположных боковых сторонах кюветы установлены электроды, с помощью которых через жидкость пропускается электрический ток. При пропускании электрического тока на жидкость действует сила Ампера ($\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$), создающая вихревое движение, которое при токах более 5 мА носит турбулентный характер. После установления вихревого течения ток отключался и наблюдалось свободное затухание турбулентного течения. Для измерения скорости течения проводилась регистрация с помощью видеокамеры смещений частиц плавучей примеси и последующая обработка видеокадров PIV-методом. Наблюдения осуществлялись при глубинах жидкости 5–15 мм для начальных токов от 200 мА до 1 А. Положения частиц, принадлежащих центральной части кюветы (во избежание влияния боковых стенок), фиксировались на сетке, содержащей 58×46 ячеек, с временным интервалом 0.8 с. Точность измерения скорости составляла примерно 10 %.

Эксперименты с использованием данной или подобных установок могут проводиться в широком диапазоне чисел Рейнольдса, Фруда, Экмана и Гартмана [8]. В условиях нашего эксперимента наблюдались значения скорости $U \approx (1-3)\,\text{см/с}$, что соответствует большим числам Рейнольдса ($\text{Re} = Ul/\nu \gg 1$) и малым значениям параметра квазидвумерности ($h/l \ll 1$), магнитного числа Рейнольдса ($\text{Re}_m = Ul/\nu_m \ll 1\,(\nu_m = 1/\mu_0\sigma_e)$), чисел Фруда ($\text{Fr} = U^2/gh$) и Гартмана ($\text{Ha} = h/h_{\text{Ha}} \ll 1$). Здесь $h_{\text{Ha}} = (\nu\rho/\sigma_e)^{1/2}/B$ – высота гартмановского слоя, σ_e – электрическая проводимость раствора.

Малость числа Гартмана ($\text{Ha} \sim 0.1$) позволяет пренебречь собственно магнитогидродинамическими эффектами и рассматривать постоянное магнитное поле только как источник сторонней вихревой силы, разгоняющей жидкость при включенном токе.

Для описания течения в тонком слое вязкой однородной несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса ($Ul/\nu \gg 1$), где ν – кинематическая вязкость) и малом отношении вертикального и горизонтального масштабов ($(h/l)^2 \ll 1$), означающем также малость вертикальной скорости по сравнению с горизонтальной, используем приближение квазистатики [18, 21]. Запишем после отключения тока уравнение для горизонтальной скорости $\mathbf{U}$ в виде:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + w\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z^2}} = -g\nabla\eta, \tag{1}$$

$$\mathbf{U}(z=0) = 0, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(z=h) = 0,$$

где $z = h + \eta(x,y,t)$ – уравнение свободной поверхности, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$. Вертикальная скорость w определяется условиями $\partial w/\partial z = -\nabla \cdot \mathbf{U}$, $w(z=0) = 0$. На свободной поверхности для фильтрующих гравитационные волны течений при малых числах Фруда имеем условие

$$w(z=h) = 0. \tag{2}$$

Представим поле горизонтальной скорости в виде суммы вихревой и потенциальной составляющих:

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}_z \times \nabla\Psi + \nabla\Theta, \tag{3}$$

что позволяет разделить циркуляцию в горизонтальной и вертикальной плоскостях и упростить описание их взаимного влияния.

Как известно, во вращающейся жидкости вся область течения делится на невязкую часть и придонный (экмановский) пограничный слой [1]. Невязкое вихревое течение удовлетворяет условию геострофического равновесия и слабо зависит от вертикальной координаты. В пограничном же слое благодаря условиям прилипания развивается интенсивная циркуляция в вертикальной плоскости. Согласно развивающему кармановскую модель решению Бедведа при вращении верхнего слоя жидкости возникает сходная ситуация [14]. Естественно предположить, что и для течений более общего вида имеют место те же явления. Оставляя основные члены в уравнении для дивергенции $\delta = \Delta\Theta$, получаем

$$-\nu\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} = -g\Delta\eta - \frac{K}{2},$$

$$K = -4\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + 4\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)^2. \tag{4}$$

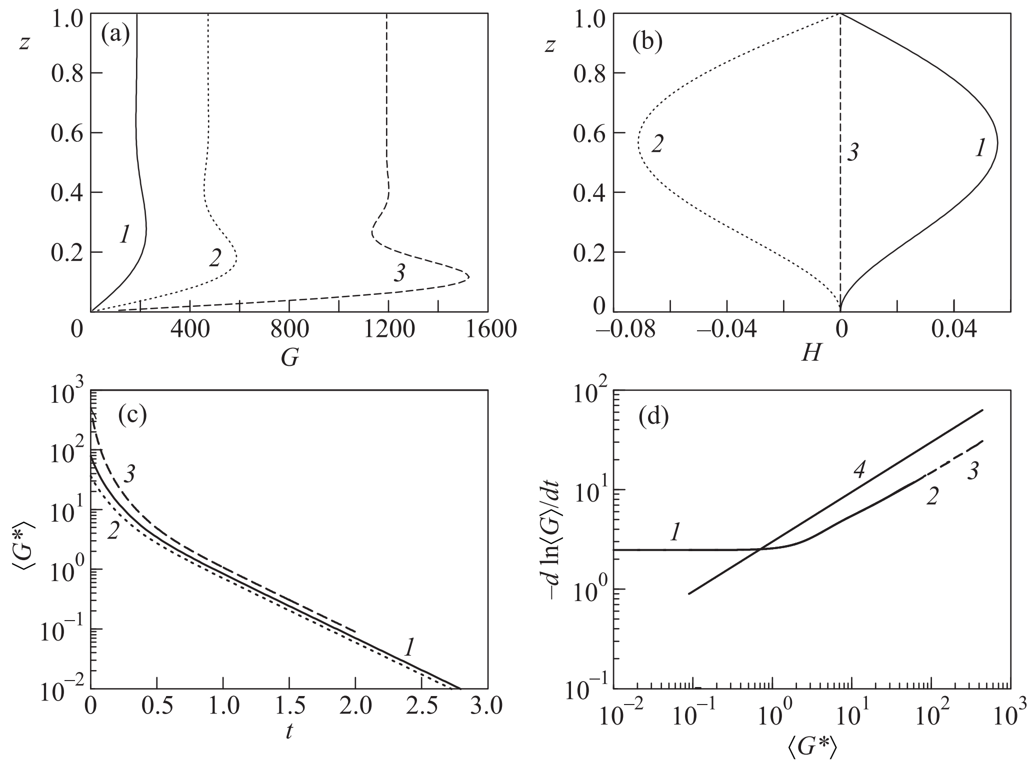

Рис. 1. Результаты численного моделирования неосесимметричной модели Кармана. (a) – Стационарные профили завихренности $G(z)$ для разных значений параметров внешней силы: $q = 2.5 \cdot 10^3$, $k = 0.9$ (*1*); $q = 1 \cdot 10^4$, $k = 0.9$ (*2*); $q = 4 \cdot 10^4$, $k = 0.9$ (*3*). (b) – Стационарные профили вертикальной скорости $H(z)$: $q = 5$, $k = 0.5$ (*1*); $q = 2.5$, $k = 2$ (*2*); $q = 2.5$, $k = 1$ (*3*). (c) – Зависимость среднего по профилю значения нормированной завихренности $G^*(z) = G(z)(1-k^2)^{1/2}$ от времени после выключения внешней силы: $q = 2.5 \cdot 10^3$, $k = 0.9$ (*1*); $q = 2.5 \cdot 10^3$, $k = 0.99$ (*2*); $q = 4 \cdot 10^4$, $k = 0.9$ (*3*). (d) – Зависимость текущего декремента затухания средней по профилю нормированной завихренности от текущего значения функции: $q = 2.5 \cdot 10^3$, $k = 0.9$ (*1*); $q = 1 \cdot 10^4$ (*2*); $q = 4 \cdot 10^4$ (*3*); теоретическая зависимость, соответствующая наклону 1/2 (*4*)

В основной части течения мы имеем уравнение баланса между давлением и вихревой скоростью, которое для кругового движения переходит в условие циклострофического равновесия. Функция K представляет собой функцию О.–В. для двумерных вихревых течений. Она позволяет различать области с эллиптическими ($K < 0$), гиперболическими ($K > 0$) и плоскими ($K = 0$) линиями тока [19, 20]. В пограничном слое давление оказывается нескомпенсированным, что приводит к возникновению циркуляции в вертикальной плоскости.

Представим скорость течения в виде суммы скорости невязкого течения и скорости течения в пограничном слое толщиной σ:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0(x,y) + \psi(x,y,z/\sigma), \\ \Theta &= \Theta_0(x,y) + \theta(x,y,z/\sigma). \end{aligned} \qquad (5)$$

Из граничных условий находим соотношения

$$\psi \sim \Psi_0, \quad \theta \sim \frac{h}{\sigma}\Theta_0 \sim \frac{w(z=\sigma)l^2}{\sigma}. \qquad (6)$$

Из системы уравнений для пограничного слоя получаем оценку его толщины:

$$\frac{\nu}{\sigma^2}\delta \sim |K|, \quad \sigma^2 \sim \frac{\nu}{\delta} \sim \nu|K|^{-1/2}. \qquad (7)$$

Для коэффициента трения из (1), (6), (7) имеем

$$\lambda \sim \frac{\nu}{\sigma h}. \qquad (8)$$

Для проверки изложенных качественных соображений рассмотрим модель неосесимметричного течения Кармана с линейной зависимостью скорости от координат в слое жидкости со свободной поверхностью. Нормируем вертикальную координату на высоту слоя h, а время – на величину $1/E$, где $E = 2\nu/h^2$ – коэффициент линейного трения. Представим выражения для компонент скорости в цилиндрической системе координат r, ϕ, z в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Psi}{E} &= \frac{r^2}{2}[G(z,t) + \Phi(z,t)\cos 2\phi], \\ \frac{\Theta}{E} &= \frac{r^2}{2}F(z,t). \end{aligned} \qquad (9)$$

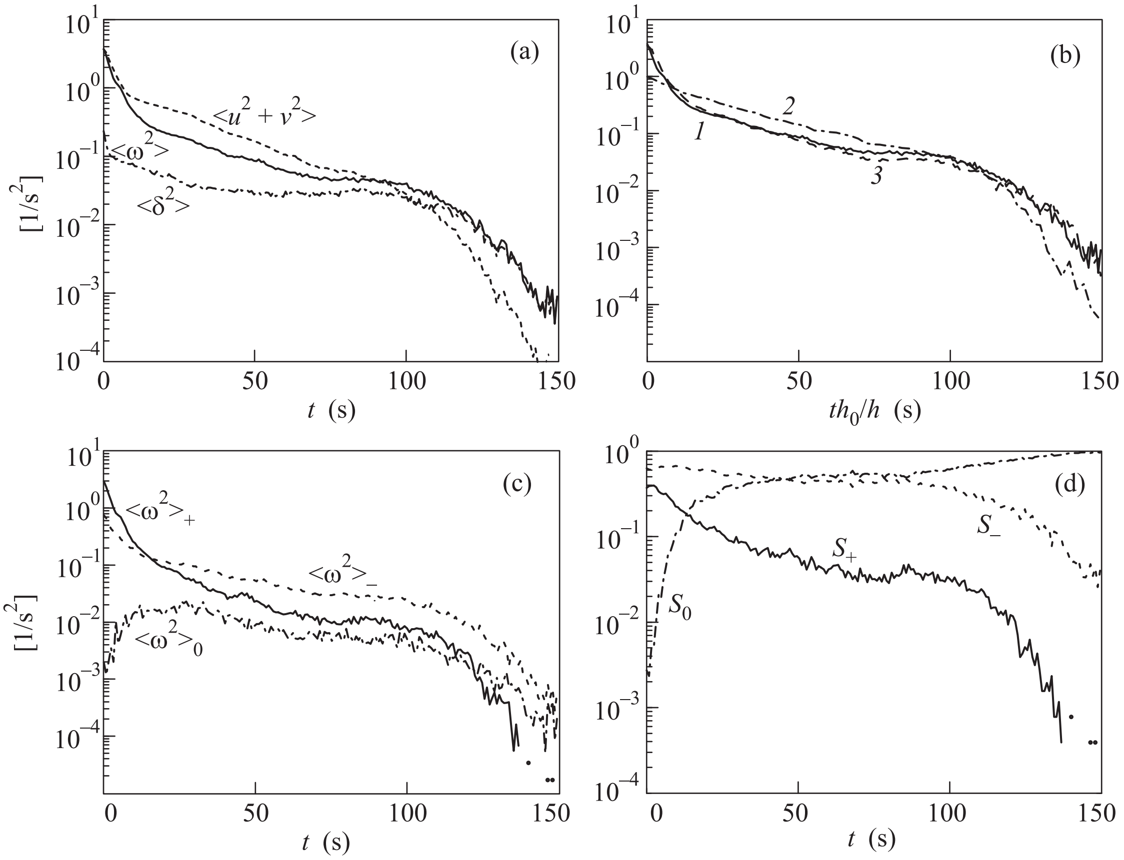

Рис. 2. Зависимость усредненных по пространству экспериментальных характеристик поверхностного течения от времени после выключения внешней силы. (a) – Энстрофия (квадрат завихренности), кинетическая энергия и квадрат дивергенции для $I = 800$ мА, $h = 15$ мм. (b) – Энстрофия для разных токов и глубин жидкости ($h_0 = 15$ мм): $I = 800$ мА, $h = 15$ мм (*1*); $I = 600$ мА, $h = 5$ мм (*2*); $I = 600$ мА, $h = 15$ мм (*3*). (c) – Энстрофия, усредненная по области течения с одним знаком у функции Окубо–Вайса. (d) – Зависимость относительной площади течения с одним знаком у функции Окубо–Вайса от времени. Область с $K = 0$ вычислялась из условия $|K| < 1 \cdot 10^{-6}$ с$^{-2}$

Подставляя выражения (9) в (1), получаем систему уравнений относительно функций G, F, Φ и давления P, результаты численного решения которой для стационарного течения, устанавливающегося под воздействием вихревой силы $\mathbf{F}_{\text{ext}} = E^2\mathbf{e}_z \times \nabla[\frac{qr^2}{2}(1 + k\cos 2\phi)]$, представлены на рис. 1.

Как видно из рис. 1a, b циркуляция в вертикальной плоскости зависит от знака величины $1-k^2$, связанной с функцией О.–В. В данном случае она выражается как $K = \Phi^2 - G^2 \sim -G^2(1-k^2)$, поскольку выполняется условие $\Phi/G \sim k$.

Как показывают вертикальные профили функции G, при больших q и $1 - k^2 > 0$ реализуется течение типа пограничного слоя. В соответствии с (7) имеем

$$\sigma_0^{-2} \sim G_0(1-k^2)^{1/2}. \tag{10}$$

После того как сила отключается, мы наблюдаем свободно затухающее течение. Так как затухание является достаточно медленным, течение остается квазистационарным и выполняются соотношения

$$\sigma(t)^{-2} \sim G(t)(1-k^2)^{1/2},\ \frac{1}{G}\frac{dG}{dt} \sim \lambda(t) \sim F(t) \sim \frac{1}{\sigma(t)}. \tag{11}$$

На рис. 1c, d показаны результаты численного решения, описывающие затухание при разных значениях начального числа Рейнольдса и величины k. Из них следует хорошее выполнение соотношений скейлинга (11). Эта формула представляет собой соотношение, определяющее нелинейное (экмановское) трение для интенсивных эллиптических вихрей ($K < 0$). При $|K|^{1/2} \le \nu/h^2$ мы имеем линейное (рэлеевское) трение.

Визуальные наблюдения лабораторного течения показывают, что в квазистационарном режиме при больших числах Рейнольдса наблюдается попеременное возникновение и уничтожение отдельных вихрей

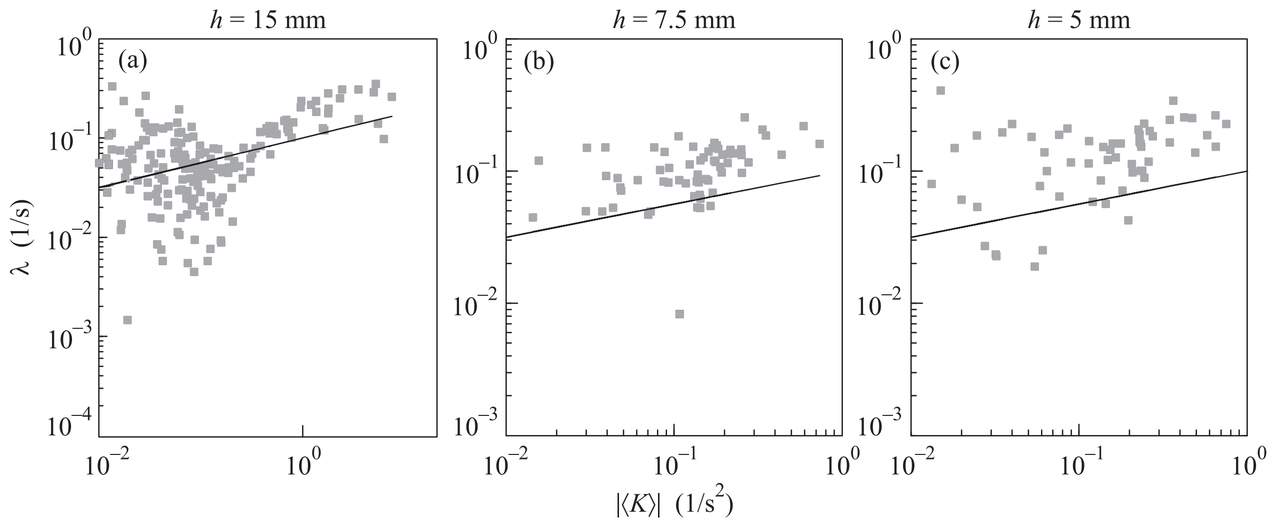

Рис. 3. Зависимость текущего значения декремента затухания от среднего по площади значения функции Окубо–Вайса для трех разных глубин (разные токи): (a) – $h = 15$ мм, $I = 600, 800$ мА; (b) – $h = 7.5$ мм, $I = 300, 325$ мА; (c) – $h = 5$ мм, $I = 200, 600$ мА. Сплошная кривая – теоретическая зависимость, соответствующая наклону 1/4

и струйных течений. Это соответствует наблюдениям, проведенным разными авторами [7–13]. На рис. 2a, b проведен закон затухания логарифма энстрофии (квадрата завихренности), энергии и среднего квадрата дивергенции поверхностного течения во времени при разных значениях глубины и начального числа Рейнольдса. Из рисунка следует, что процесс затухания проходит две стадии, которые соответствуют влиянию придонного и объемного трения. На первой стадии мы имеем явно выраженный участок, соответствующий нелинейному трению. На этом участке энергия спадает несколько медленнее энстрофии, а потенциальная компонента скорости много меньше вихревой. Как следует из рис. 2b, время затухания пропорционально глубине слоя жидкости, т.е. корню из числа Рейнольдса по придонному трению, что согласуется с теоретическими оценками (8), (11). На следующей стадии дивергенция течения оказывается одного порядка с завихренностью, что говорит о существенно трехмерном характере течения. Затухание здесь происходит по другому закону, по-видимому связанному с образованием вертикальных слоев с сильной диссипацией.

Рисунки 2c, d иллюстрируют тот факт, что затухание происходит по-разному в областях с разным значением функции K, которая показывает степень эллиптичности-гиперболичности течения. В областях, где функция K отлична от нуля, затухание происходит значительно быстрее, а площадь самих этих областей сокращается. При затухании струйные течения начинают занимать все большую площадь, как бы поглощая вихри. На рис. 3 показана скейлинговая зависимость текущего декремента затухания энстрофии от текущего значения усредненной по площади величины $\langle K\rangle = \langle K\omega^2\rangle/\langle\omega^2\rangle$ в сравнении с теоретическими оценками. Видно, что результаты измерений при различных глубине и вынуждающей силе тока хорошо согласуются со следующим из (8), (11) законом $\ln\lambda \sim \frac{1}{4}\ln|\langle K\rangle|$ при достаточно больших значениях $|\langle K\rangle|$.

Из результатов работы следует, что процесс затухания турбулентных течений в тонких слоях жидкости имеет явно выраженную стадию, где трение определяется толщиной пограничного слоя, меняющейся в соответствии с изменением текущего числа Рейнольдса и степени эллиптичности течения.

Различия между экспериментом и теорией являются следствием того, что при не очень больших значениях l/h возникновение мелкомасштабной трехмерной турбулентности может приводить к появлению в коэффициенте нелинейного трения квадратичных по завихренности компонентов [2, 13]. Вместе с тем необходима разработка теоретических моделей, более полно учитывающих циркуляцию жидкости в вертикальной плоскости. Что касается свойств чисто двумерной турбулентности, то в условиях эксперимента они проявлялись в слабой степени.

Полученные результаты позволяют оценить возможности перехода к двумерному описанию интенсивных движений в тонких слоях сплошной среды. После соответствующих экспериментов результаты могут быть обобщены на ситуации с общим вращением, где нелинейные эффекты проявляются как циклон-антициклонная асимметрия, и т.д.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты # 11-05-01-206а, 10-05-00-457а) и программы РАН “Нелинейная динамика”.

1. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 1 (1990).
2. Ф. В. Должанский, *Основы геофизической гидродинамики*, М.: Физматлит, 2011.
3. М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры. Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде*, М.: Наука, 1990.
4. Н. Н. Горькавый, А. А. Фридман, *Физика планетных колец. Небесная механика сплошной среды*, М.: Наука, 1994.
5. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, УФН **170**, 921 (2000).
6. L. P. Graves, J. C. McWilliams, and M. T. Montgomery, Geophys. And Astrophys. Fluid Dyn. **100** 151 (2006).
7. D. Suos, N. Bonnetona, and J. Sommeria, Phys. Fluids **16**, 2886 (2004).
8. M. G. Shats, H. Xia, H. Punzmann et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 164502 (2007).
9. G. Boffetta, A. Cenedese, S. Espa et al., Europhys. Lett. **71**, 590 (2005).
10. D. H. Kelley and N. T. Ouellette, Phys. Fluids **23**, 045103 (2011).
11. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, Ф. В. Должанский и др., ЖЭТФ **122**, 57 (2002).
12. H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heijst, and M. L. Zoeteweij, Phys. Rev. E **67**, 066303 (2003).
13. M. G. Shats, D. Birn, and H. Xia, Phys. Rev. Lett. **105**, 264501 (2011).
14. Х. Гринспен, *Теория вращающейся жидкости*, Л.: Гидрометеоиздат, 1975 [H. P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluid*, Cambridge, University Press, 1968].
15. R. E. Hewitt and M. Al-Azhari, J. Eng. Math. **63**, 259 (2009).
16. M. P. Satin, A. W. Cense, R. Verzicco et al., Phys. Fluids **13**, 1932 (2001).
17. R. A. D. Akkermans, A. R. Cieslik, L. P. J. Kamp et al., Phys. Fluids **20**, 116601 (2008).
18. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, Изв. РАН. ФАО **44**, 1 (2008).
19. A. R. Cieslik, L. P. J. Kamp, H. J. H. Clercx et al., J. Hydro-Env. Res. **4**, 89 (2010).
20. D. Elhmaidi, A. Provinzale, and A. Babiano, J. Fluid Mech. **257**, 533 (1993).
21. С. В. Кострыкин, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **139**, 395 (2011).