Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 11, с. 627 – 632 © 2012 г. 10 июня

Распространение и аннигиляция вихревых пар в плавно неоднородном бозе-эйнштейновском конденсате

В. А. Миронов, Л. А. Смирнов[1)]

Институт прикладной физики РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2012 г.

Развита асимптотическая теория, позволяющая описать распространение и аннигиляцию вихревых пар в плавно неоднородном бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК) с отталкивающим взаимодействием между атомами. Показано, что траектории вихревых пар совпадают с геометрооптическими лучами в эквивалентной изотропной среде, характеризуемой показателем преломления, зависящим как от плотности невозмущенного неоднородного конденсата, так и от энергии исследуемых структур. Описан процесс преобразования в неоднородном БЭК вихревых пар в безвихревые квазисолитоны и обратно.

1. В настоящее время ведутся активные исследования взаимодействия квантовых вихрей в ультрахолодных газах [1–4]. Как показывают численные расчеты [1, 2] и ряд экспериментов [1–3], квантовые вихри во многом определяют долговременную эволюцию волновой функции бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК). С ними справедливо связывают нарушение режима сверхтекучести [5] и переход конденсата в турбулентное состояние (см., например, [6]).

В 2010 – 2011 гг. проводились эксперименты [7–9] по контролируемому возбуждению одиночных вихревых пар удерживаемых в дискообразных ловушках, и изучению их дальнейшей динамики в БЭК. В этих экспериментах удалось детально проследить поведение вихрей. В частности, было замечено [7], что проникая из менее плотного конденсата в более плотный, вихри и антивихри в парах сближаются, а в противоположном случае, наоборот, расходятся.

В данной работе предлагается теоретическое описание динамики вихревых пар в плавно неоднородном БЭК. Наш подход позволяет учесть многие особенности (в первую очередь сжимаемость) конденсатов ультрахолодных газов. В его основе лежит представление о том, что когда расстояние между вихрем и антивихрем существенно меньше характерного масштаба неоднородности среды, вихревые пары можно рассматривать как локализованные образования, близкие по своей структуре к двумерным темным солитонам, существующим в однородном БЭК.

Мы ограничимся рассмотрением двумерной задачи, т. е. $\mathbf{r}=(x,y)$, к которой сводится анализ поведения бозе-газа в дискообразных ловушках [10, 11]. Динамику БЭК с отталкивающим взаимодействием между атомами мы будем описывать в приближении среднего поля с помощью классической волновой функции $\Psi(\mathbf{r},t)$, удовлетворяющей уравнению Гросса – Питаевского (ГП) [10, 11]:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\Psi+\left(1-|\Psi|^2\right)\Psi=V_{\rm ext}(\mathbf{r})\,\Psi. \qquad (1)$$

Здесь выбрана нормировка, в которой координаты $\mathbf{r}$, время t, плотность конденсата $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ и потенциал внешних сил $V_{\rm ext}(\mathbf{r})$ являются безразмерными величинами, а химический потенциал равен единице.

2. При $V_{\rm ext}(\mathbf{r})=0$ у уравнения ГП (1) есть однопараметрическое семейство решений в виде двумерных темных солитонов (ДТС). Они представляют собой локализованные провалы концентрации, движущиеся с постоянной дозвуковой скоростью $\bar{v}$ на фоне однородного БЭК, и описываются волновыми функциями вида $\Psi_s[\xi=(x-\bar{v}t),y,\bar{v}]$, которые удовлетворяют стационарному уравнению

$$-i\bar{v}\frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial y^2}\right)+\left(1-|\Psi_s|^2\right)\Psi_s=0 \qquad (2)$$

с граничным условием $\Psi_s\left(\sqrt{\xi^2+y^2}\to\infty\right)\to 1$.

В зависимости от величины $\bar{v}$ ДТС могут быть или “вихревыми”, или “безвихревыми”. В первом случае они представляют так называемые вихревые пары, в которых концентрация конденсата в двух точках (топологических дефектах), расположенных на линии, перпендикулярной направлению движения, обращается в нуль. Фаза волновой функции БЭК при обходе вокруг этих точек изменяется на $\pm 2\pi$. Для второго случая характерно отсутствие нулей концентрации бозе-газа и скачков в распределении фазы. В слабонелинейном пределе, когда скорость $\bar{v}$ стремится к звуковой ($|\bar{v}|\to 1$), безвихревые солитоны близки по своей структуре к уединенным решениям уравнения Кадомцева – Петвиашвили (КП) [12].

[1)]e-mail: smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru

В работах [13–16] было проведено детальное изучение свойств ДТС и показано, что вихревые пары реализуются при $0<|\bar{v}|<0.61$, а безвихревые солитоны – при $0.61<|\bar{v}|<1$. При $|\bar{v}|=\bar{v}_*=0.61$ происходит непрерывный переход от вихревых состояний с двумя нулями концентрации к безвихревым состояниям, в которых плотность конденсата всюду отлична от нуля. При этом говорят о своеобразной бифуркации: ДТС "сбрасывают" с себя циркуляцию [13].

Двумерные темные солитоны можно рассматривать как решения вариационной задачи $\delta\big(\mathcal{H}-\bar{v}\mathcal{P}_x\big)=0$, где

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left[|\nabla\Psi|^2+\left(1-|\Psi|^2\right)^2\right], \qquad (3)$$

$$\mathbf{P}=\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi\right) \qquad (4)$$

есть гамильтониан и импульс БЭК соответственно. Из этой вариационной формулировки вытекают следующие соотношения [14]:

$$\bar{\mathcal{E}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left|\frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi}\right|^2,\quad \bar{\mathcal{E}}-\bar{v}\bar{\mathcal{P}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left|\frac{\partial\Psi_s}{\partial y}\right|^2,$$

$$\bar{v}\bar{\mathcal{P}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left(1-|\Psi_s|^2\right)^2,\quad \bar{v}=\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{\mathcal{P}}}<\frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\mathcal{P}}}, \qquad (5)$$

где $\bar{\mathcal{E}}\equiv\mathcal{H}_s$ – энергия ДТС, а $\bar{\mathcal{P}}\equiv\mathcal{P}_{s_x}$ – его импульс. При этом $\bar{v}$, $\bar{\mathcal{P}}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ однозначно связаны друг с другом.

Нам удалось подобрать достаточно простую аналитическую аппроксимацию для зависимости $\bar{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{E}})$:

$$\bar{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{E}})=\alpha(\bar{\mathcal{E}})\,\mathrm{sh}\big[\bar{\mathcal{E}}/\alpha(\bar{\mathcal{E}})\big], \qquad (6)$$

$$\alpha(\bar{\mathcal{E}})=2\pi+(2\pi/3)\exp\left[-\left(\bar{\mathcal{E}}/9.8\right)^2\right]. \qquad (7)$$

Рассчитанные нами в работах [13, 15] путем численного решения стационарного уравнения (2) значения $\bar{\mathcal{P}}$ при соответствующих значениях $\bar{\mathcal{E}}$ всюду отличаются от данной аппроксимации меньше чем на 1%.

3. В плавно неоднородном БЭК существуют вихревые пары и безвихревые возбуждения, локально близкие по своей структуре к ДТС и имеющие существенно меньшие размеры по сравнению с характерным масштабом неоднородности среды [17]. Такие образования (как вихревые, так и безвихревые) мы будем называть двумерными темными квазисолитонами (ДТКС). Для описания их динамики представим волновую функцию $\Psi(\mathbf{r},t)$ в виде произведения

$$\Psi(\mathbf{r},t)=G(\mathbf{r})\,F(\mathbf{r},t), \qquad (8)$$

выделив в качестве сомножителя ее "невозмущенную" часть $G(\mathbf{r})$, сформировавшуюся под воздействием внешнего потенциала $V_{\rm ext}(\mathbf{r})$ и удовлетворяющую стационарному уравнению ГП:

$$\frac{1}{2}\Delta G+\left(1-|G|^2\right)G-V_{\rm ext}(\mathbf{r})\,G=0. \qquad (9)$$

Тогда для $F(\mathbf{r},t)$ получаем следующее нелинейное динамическое уравнение:

$$i\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta F+|G|^2\left(1-|F|^2\right)F=-\left(\frac{\nabla G}{G},\nabla F\right). \qquad (10)$$

Будем считать, что функция $G(\mathbf{r})$, а значит, и потенциал $V_{\rm ext}(\mathbf{r})$ плавно изменяются в пределах характерного размера Λ_{qs} области локализации рассматриваемого возмущения, изначально заданного в виде двумерной квазисолитонной структуры. Другими словами, в задаче есть малый параметр

$$\mu=\Lambda_{qs}/\Lambda_G\ll 1, \qquad (11)$$

где $\Lambda_G\sim|G|/\,|\nabla G|$ – характерный масштаб волновой функции $G(\mathbf{r})$ невозмущенного БЭК.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение ДТКС в покоящемся конденсате, т.е. $G(\mathbf{r})=g(\mathbf{r})\exp(i\theta_g)$, где $g(\mathbf{r})$ – действительная функция координат $\mathbf{r}$, $\theta_g=\mathrm{const}$ – постоянная фаза. Когда выполнено неравенство (11), плотность $n_g(\mathbf{r})=g^2(\mathbf{r})$ в стационарном беспотоковом состоянии можно рассчитать в приближении Томаса–Ферми [10, 11]:

$$n_{g_{\rm TF}}(\mathbf{r})=g_{\rm TF}^2(\mathbf{r})=1-V_{\rm ext}(\mathbf{r})>0. \qquad (12)$$

Пусть трасса, вдоль которой распространяется ДТКС в плавно неоднородном БЭК, задана как функция длины дуги s, т.е. $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(s)$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой расположенной вблизи траектории $\mathbf{r}_0(s)$ точки M можно представить в виде $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(s)+\eta\,\mathbf{n}_0(s)$, где η – расстояние по нормали, опущенной из точки M на кривую $\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{n}_0(s)$ – единичный вектор нормали к $\mathbf{r}_0(s)$. Переход от декартовых координат x,y к ортогональным криволинейным координатам s,η характеризуется следующими коэффициентами Ламе: $h_s=1-\kappa\eta$, $h_\eta=1$, где $\kappa=\kappa(s)$ – кривизна линии $\mathbf{r}_0(s)$. Кроме того, для движущегося вдоль $\mathbf{r}_0(s)$ локализованного двумерного образования удобно вместо длины дуги s использовать "сопровождающую" координату $\xi=s-s_{qs}(t)$, где $s_{qs}(t)$ – положение центра квазисолитона на кривой $\mathbf{r}_0(s)$ (соответственно $v(t)=ds_{qs}(t)\,/dt$ – его скорость).

Перепишем уравнение (10) в переменных ξ и η. Учитывая, что характерный масштаб Λ_G изменения функции $G(\mathbf{r})$ существенно превосходит размеры Λ_{qs} области локализации ДТКС, разложим вблизи кривой $\mathbf{r}_0(s)$ функцию $G(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора по η. После этого решение уравнения (10) представим в виде асимптотического ряда по μ:

$$F(\xi,\eta,t) = \mu^0 F_0[\xi,\eta,v(\mu t)] + \mu^1 F_1(\xi,\eta,\mu t) + \ldots . \tag{13}$$

В нулевом порядке малости по μ получаем для функции F_0 "стационарное" уравнение, которое имеет решения в виде ДТС: $F_0(\xi,\eta,v) \equiv \Psi_s(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{v})$, где $\bar{\xi} = g(s_{qs},0)\,\xi$, $\bar{\eta} = g(s_{qs},0)\,\eta$, $\bar{v} = v/g(s_{qs},0)$. Здесь $(s_{qs},0)$ – положение центра квазисолитона в системе координат s,η, а $g(s_{qs},0)$ – амплитуда волновой функции невозмущенного БЭК в точке $(s_{qs},0)$.

В первом порядке малости по μ имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение для F_1:

$$-iv\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta^2}\right) + \\ + g^2(s_{qs},0)\left[\left(1-2\left|F_0\right|^2\right)F_1 - F_0^2 F_1^*\right] = \mathcal{R}, \tag{14}$$

$$\mathcal{R} = -\left(\xi\left[\frac{\partial g^2}{\partial s}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}} + \eta\left[\frac{\partial g^2}{\partial \eta}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}}\right)\left(1-|F_0|^2\right)F_0 - \\ -\frac{i}{2}\frac{dv^2}{ds_{qs}}\frac{\partial F_0}{\partial v} - \left(iv\xi+1\right)\left[\frac{\partial \ln g}{\partial s}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}}\frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \kappa\eta\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} - \\ -\left(iv\eta\left[\frac{\partial \ln g}{\partial s}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}} + \left[\frac{\partial \ln g}{\partial \eta}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}} - \frac{\kappa}{2}\right)\frac{\partial F_0}{\partial \eta}. \tag{15}$$

Условием существования у (14) локализованных решений является выполнение следующих равенств:

$$\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \mathcal{R}\,\frac{\partial F_0^*}{\partial \zeta_{1(2)}}\right] = 0, \qquad \zeta_1 \equiv \xi,\ \ \zeta_2 \equiv \eta. \tag{16}$$

Для комплексного уравнения (14) выражения (16) представляют собой, по существу, аналог теоремы Фредгольма об альтернативе [18–20].

Воспользовавшись симметрией рассматриваемых структур относительно $\eta = 0$ и соотношениями (5), можно преобразовать условия (16) к виду

$$\frac{d\ln\bar{\mathcal{E}}}{ds_{qs}} = -2\left[\frac{\partial \ln g}{\partial s}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}}, \tag{17}$$

$$\kappa = \left[\frac{\partial \ln g}{\partial \eta}\right]\Bigg|_{\substack{s=s_{qs}\\ \eta=0}}\left(1 - \frac{2\bar{\mathcal{E}}}{\bar{v}\bar{\mathcal{P}}}\right), \tag{18}$$

где $\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{P}}(\bar{v})$ и $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}(\bar{v})$ в каждый момент времени t представляют собой соответствующие характеристики ДТС (см. (5)), распространяющегося со скоростью $\bar{v} = \bar{v}(t)$ в однородном конденсате единичной концентрации. В дальнейшем и $\bar{\mathcal{E}}(\bar{v})$ будем называть $\bar{\mathcal{P}}(\bar{v})$ нормированным импульсом и нормированной энергией квазисолитона соответственно.

Из равенства (17) получаем интеграл движения:

$$\mathcal{E}(s_{qs}) = g^2(s_{qs},0)\,\bar{\mathcal{E}}(s_{qs}) = g^2(0,0)\,\bar{\mathcal{E}}(0)\,. \tag{19}$$

Здесь $g^2(0,0)$ – концентрация невозмущенного неоднородного БЭК в точке $(s_{qs}(t=0)=0,0)$, $\bar{\mathcal{E}}(0)$ – начальное значение (при $t = 0$) нормированной энергии. Соотношение (19) можно трактовать как закон сохранения энергии $\mathcal{E}$ для движущегося в плавно неоднородном конденсате ДТКС. Действительно, в пределах области локализации рассматриваемой структуры волновая функция $\Psi(\mathbf{r},t) = G(\mathbf{r})\,F(\mathbf{r},t)$ близка к волновой функции ДТС в однородном БЭК с плотностью $g^2(s_{qs},0)$. Энергия $\mathcal{E}(v)$ таких солитонов отличается от энергии $\bar{\mathcal{E}}(\bar{v})$ солитонов в однородном конденсате единичной концентрации в $g^2(s_{qs},0)$ раз.

Напомним, что $\bar{\mathcal{P}}$ и $\bar{v}$ являются однозначными функциями $\bar{\mathcal{E}}$. Поэтому, согласно соотношению (19), нормированные энергия $\bar{\mathcal{E}}$, импульс $\bar{\mathcal{P}}$ и скорость $\bar{v}$ квазисолитона являются функциями только $g(s_{qs},0)$: $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}\left[g(s_{qs},0)\right]$, $\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{P}}\left[g(s_{qs},0)\right]$, $\bar{v} = \bar{v}\left[g(s_{qs},0)\right]$. Увеличение (уменьшение) концентрации $g^2(s_{qs},0)$ невозмущенного БЭК вдоль трассы распространения приводит к уменьшению (увеличению) $\bar{\mathcal{E}}(s_{qs})$, $\bar{\mathcal{P}}(s_{qs})$ и увеличению (уменьшению) $\bar{v}(s_{qs})$. В результате вихревая пара при проникновении в более плотный конденсат может стать безвихревым ДТКС и наоборот, безвихревой квазисолитон, попадая в менее плотный бозе-газ, может превратиться в вихревую пару.

Равенство (18) однозначно задает на плоскости траекторию $\mathbf{r}_0(s)$, вдоль которой со скоростью $v = g(s_{qs},0)\,\bar{v}\left[g(s_{qs},0)\right]$ движется квазисолитон. Введя вместо длины дуги s новую переменную τ:

$$d\tau = \frac{ds}{\nu\left[g(s,0)\right]}, \quad \nu\left[g(s,\eta)\right] = \frac{g\,(s,\eta)\bar{\mathcal{P}}\left[g(s,\eta)\right]}{\bar{\mathcal{E}}(0)\,g^2(0,0)}, \tag{20}$$

нетрудно записать уравнение трассы распространения ДТКС в привычном для обычной геометрической оптики виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla\left(\nu^2\right)\Big|_{\eta=0}, \tag{21}$$

где $\nu(\mathbf{r})$ имеет смысл "показателя преломления".

В итоге расчет траекторий движения ДТКС в плавно неоднородном БЭК сводится к следующей

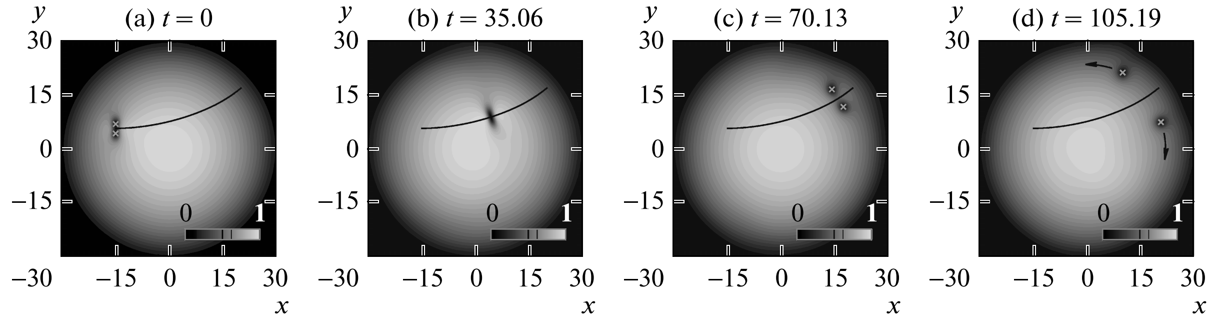

Рис. 1. Мгновенные снимки плотности БЭК в моменты времени: $t = 0$ (a), $t = 35.06$ (b), $t = 70.13$ (c), $t = 105.19$ (d). Сплошной линией изображена траектория движения ДТКС, рассчитанная с помощью предложенной процедуры. Крестиками отмечены нули концентрации бозе-газа. На фрагменте (b) они отсутствуют, что свидетельствует о трансформации вихревой пары в безвихревой квазисолитон. При приближении к границе конденсата безвихревой ДТКС вновь превращается в вихревую пару, которая после столкновения с границей распадается на два отдельных вихря, распространяющихся в направлениях, указанных на фрагменте (d) стрелками

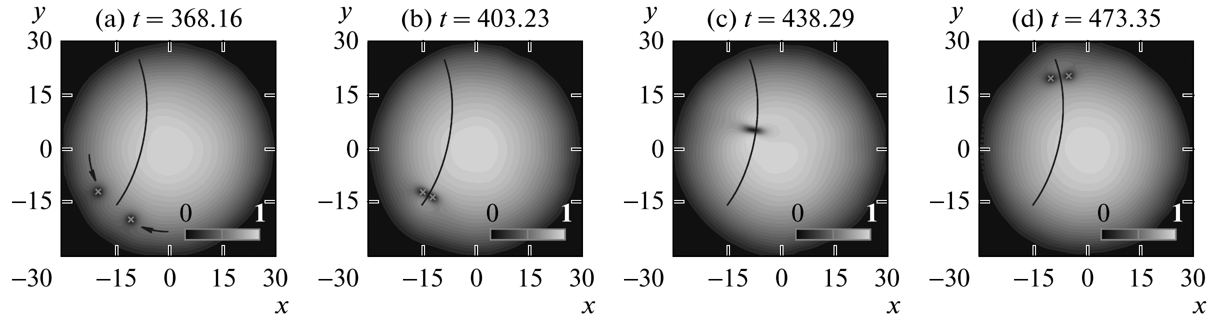

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но в моменты времени: $t = 368.16$ (a), $t = 403.23$ (b), $t = 438.29$ (c), $t = 473.35$ (d). Распространяющиеся вдоль границы конденсата отдельные вихри (их направления движения указаны на фрагменте (a) стрелками) сближаются друг с другом и образуют вихревую пару, которая затем перемещается вдоль сплошной линии, рассчитанной с помощью предложенной процедуры. Крестиками отмечены нули концентрации бозе-газа. На фрагменте (c) они отсутствуют, что свидетельствует о трансформации вихревой пары в безвихревой ДТКС, который при приближении к границе БЭК вновь превращается в вихревую пару (см. фрагмент (d))

процедуре. Прежде всего в приближении Томаса–Ферми по формуле (12) ищется распределение концентрации конденсата, сформировавшегося под воздействием внешнего потенциала $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Затем с использованием интеграла движения (19) и аппроксимации (6) находятся зависимость $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ и показатель преломления $\nu(\mathbf{r})$. Далее решается уравнение геометрической оптики (21) с "начальными" условиями

$$\mathbf{r}_0(\tau=0)=\mathbf{r}_0(t=0)\,,\ \ \left.\frac{d\mathbf{r}_0(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\left\{\nu[\mathbf{r}_0(t)]\frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t)}{|\dot{\mathbf{r}}_0(t)|}\right\}\right|_{t=0},$$

где $\mathbf{r}_0(t=0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0(t=0)$ – положение и скорость квазисолитона в момент времени $t=0$, в который начали следить за его движением.

4. На рис. 1 представлены результаты численного моделирования динамики ДТКС в плавно неоднородном БЭК. Оно было выполнено непосредственно в рамках уравнения ГП (1) с потенциалом гармонической ловушки $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \omega_r^2\left(x^2+y^2\right)/2$, где $\omega_r = 0.047$. Изначально заданный в виде вихревой пары ДТКС стартовал из точки с декартовыми координатами $(x_0=-15.16, y_0=5.68)$ и имел нормированную энергию $\bar{\mathcal{E}}_0 = 9.25$. В момент старта скорость квазисолитона была направлена вдоль оси x.

Фрагменты (a), (b) и (c) на рис. 1 наглядно демонстрируют, что ДТКС действительно перемещается вдоль рассчитанной с помощью уравнения (21) траектории, изображенной сплошной линией. Квазисолитоны всегда отклоняются в сторону менее плотного конденсата, причем с ростом начальной нормированной энергии $\bar{\mathcal{E}}_0$ отклонение увеличивается. Видно, что проникая в более плотный БЭК, вихревая пара трансформируется в безвихревой ДТКС. Это подтверждается отсутствием в локализованном образовании на рис. 1b нулей концентрации конденсата, а значит, и связанных с ними скачков фазы волновой функции. Попадая затем в менее плотный бозе-газ, безвихревой квазисолитон вновь превращается в вихревую пару (см. рис. 1c).

Такое поведение ДТКС находится в полном согласии с представлением о том, что внутренняя структура квазисолитона в каждый момент времени определяется его нормированной энергией $\bar{\mathcal{E}}$, величина которой (см. (19)) обратно пропорциональна плотности невозмущенного неоднородного БЭК в центре ДТКС. Для рис. 1b значение $\bar{\mathcal{E}}$ меньше критического, $\bar{\mathcal{E}}_* = 7.59$, соответствующего скорости $\bar{v}_* = 0.61$, при которой, как отмечалось выше, происходит бифуркация в состоянии ДТС. Для рис. 1c значение $\bar{\mathcal{E}}$ вновь становится больше $\bar{\mathcal{E}}_* = 7.59$. Таким образом, наблюдаемые в наших численных расчетах "аннигиляция" квантовых вихрей, составляющих пару, и их "рождение" являются следствием адиабатической перестройки структуры квазисолитонного образования при "медленном" изменении его нормированной энергии вдоль трассы распространения.

При приближении к границе БЭК, когда нарушается условие применимости (11) развитой здесь теории, вихревая пара распадается на практически не зависимые друг от друга вихрь и антивихрь, которые движутся вдоль границы конденсата, как это показано стрелками на рис. 1d. На противоположной стороне конденсата эти вихри сближаются друг с другом (см. рис. 2a) и снова образуют ДТКС, трасса распространения которого удовлетворяет уравнению (21) (см. рис. 2b–d). Затем вновь происходит столкновение вихревой пары с границей БЭК, вихри расходятся и т.д. Данный процесс повторяется многократно. Такое поведение вихрей полностью соответствует результатам экспериментов [7].

5. Подводя итоги работы, кратко перечислим ее основные результаты. Во-первых, найдена аналитическая аппроксимация зависимости импульсов ДТС от их энергии. Во-вторых, установлено, что траектории движения ДТКС в плавно неоднородном БЭК удовлетворяют геометрооптическому уравнению с показателем преломления, зависящим как от распределения плотности невозмущенного конденсата, так и от энергии распространяющегося в нем квазисолитона. В-третьих, описаны структурные трансформации, происходящие с ДСТК вдоль трассы их распространения, в частности процессы "аннигиляции" и "рождения" вихревых пар. Все полученные результаты подтверждены численными расчетами, выполненными непосредственно в рамках уравнения ГП.

В заключение отметим, что создавая неоднородности в конденсате, например с помощью сфокусированных лазерных пучков, можно управлять поведением ДТКС, в частности динамикой вихревых пар [21]. При этом предложенный способ расчета траекторий движения квазисолитонных структур позволяет достаточно эффективно подбирать управляющие параметры лазерных пучков, что, очевидно, имеет важное практическое приложение для реальных экспериментов с БЭК.

Авторы признательны А.Г. Литваку, В.Е. Семенову, Г.М. Фрайману за полезные обсуждения.

---

1. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
2. A.L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009); A.L. Fetter, J. Low Temp. Phys. **161**, 445 (2010).
3. B. P. Anderson, J. Low Temp. Phys. **161**, 574 (2010).
4. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
5. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **137**, 1004 (2010); ссылки в этой работе.
6. M. Tsubota, J. Phys.: Cond. Matt. **21**, 164207 (2009); R. Numasato, M. Tsubota, and V. S. L'vov, Phys. Rev. A **81**, 063630 (2010).
7. T. W. Neely, E. C. Samson, A. S. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **104**, 160401 (2010).
8. D. V. Freilich, D. M. Bianchi, A. M. Kaufman et al., Science **329**, 1182 (2010).
9. S. Middelkamp, P. J. Torres, P. G. Kevrekidis et al., Phys. Rev. A **84**, 011605 (2011).
10. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 2003.
11. C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
12. M. Ablowitz and P. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
13. C. A. Jones and P. H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2599 (1982); C. A. Jones, S. J. Putterman, and P. H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 2991 (1986).
14. E. A. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E **51**, 4479 (1995).
15. N. G. Berloff, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 1617 (2004).
16. S. Tsuchiya, F. Dalfovo, and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **77**, 045601 (2008).

17. G. Huang, V. A. Makarov, and M. G. Velarde, Phys. Rev. A **67**, 023604 (2003).
18. Y. S. Kivshar, J. Christou, V. Tikhonenko et al., Opt. Commun. **152**, 198 (1998).
19. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **139**, 55 (2011).
20. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, М.: Наука, 1968.
21. T. Aioi, T. Kadokura, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. X **1**, 021003 (2011).