Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 12, с. 683 – 688 © 2012 г. 25 июня

# Расчет двойных разностей масс околомагических ядер на основе полумикроскопической модели

*Н. В. Гнездилов*[+*], *Э. Е. Саперштейн*[+1)]

[+]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Россия*

Поступила в редакцию 29 марта 2012 г.

После переработки 20 апреля 2012 г.

Двойные разности масс ядер с магическим числом протонов (нейтронов) и их соседей, отличающихся на один и два протона (нейтрона), рассчитываются в рамках полумикроскопической модели, предложенной недавно для проблемы ядерного спаривания. Основной член эффективного взаимодействия нуклонов рассчитывается исходя из реалистического аргоннского $NN$-потенциала $v_{18}$. Он дополняется небольшим феноменологическим слагаемым, содержащим один универсальный параметр, общий для протонов и нейтронов. Выполнены расчеты двойных разностей масс протонных соседей цепочек изотопов свинца ($Z = 82$) и нейтронных соседей изотонов с $N = 82$. Дана оценка поправок к модели, обусловленных вкладом низколежащих поверхностных колебаний – фононов.

Поскольку пока не существует последовательной микроскопической теории тяжелых и средних ядер, использующей только потенциал взаимодействия нуклонов в пустоте, приходится отмечать каждый успех в этом направлении. В последние годы наметился явный прогресс в микроскопической теории спаривания нуклонов [1–7], основанной на решении уравнения БКШ для щели $\Delta$ с реалистическим $NN$-потенциалом в качестве спаривательного взаимодействия. К такому рецепту приводит теория Бракнера в простейшем ее варианте [8], поскольку лестничные диаграммы, суммирование которых типично для этого подхода, учтены уже в самом уравнении для щели. Первая работа миланской группы в этом направлении [1], в которой уравнение для щели решалось в базисе без учета возможного отличия эффективной массы $m^*$ от свободной массы $m$, показала, что уже такой простейший микроскопический подход приводит к разумному результату, хотя для количественного согласия с экспериментальными данными необходим учет поправок к простейшей теории БКШ.

Такие поправки возникают, во-первых, от эффектов $m^* \neq m$, во-вторых, из-за вклада виртуальных низколежащих поверхностных колебаний ("фононов"), и наконец, благодаря наличию индуцированного взаимодействия, вызванного обменом высоколежащими возбуждениями. Попытки учета первых двух поправок в [1, 2] и всех трех в [3] продемонстрировали трудности учета каждой из них. Их основная причина в известной экспоненциальной зависимости [9] величины $\Delta$ от обратной безразмерной спаривательной константы $g = m^* V_{\text{eff}} k_{\text{F}}/\pi^2$, где $V_{\text{eff}}$ – эффективное спаривательное взаимодействие, а $k_{\text{F}}$ – импульс Ферми. Из-за нее даже незначительные изменения $V_{\text{eff}}$ или $m^*$ приводят к большим вариациям $\Delta$. Так, переход от вудс-саксоновского базиса с $m^* = m$ в [1] к самосогласованному базису в [3], полученному методом Скирма–Хартри–Фока (СХФ) с эффективными силами SLy4, для которых внутри ядра эффективная масса заметно меньше, $m^* \simeq 0.7m$, для ядра $^{120}$Sn, реперного для проблемы спаривания, получено уменьшение величины $\Delta$ вдвое (от 2.2 до $\simeq 1$ МэВ). Сверхчувствительность спаривательной щели к деталям расчета видна и из сравнения результатов [3] с расчетами Дуге и др. [4, 5], которые на первый взгляд делались в близких предположениях, в частности с использованием СХФ-спектра с теми же силами SLy4. При этом для того же ядра $^{120}$Sn в последнем случае получено $\Delta \simeq 1.6$ МэВ.

Более внимательный анализ [7] показал, что расчет с использованным в последних работах сверхмягким ("low-k") $NN$-взаимодействием [10] и расчет типа [3] с обычным аргоннским $NN$-потенциалом $v_{14}$ дают близкие результаты, если в последнем использовать эффективную массу SLy4 только для мягкой части спектра ($k < 3$ фм$^{-1}$) и голую массу для бо́льших импульсов (вплоть до $k \simeq 6$ фм$^{-1}$). Таким образом, решение "микроскопического" уравнения БКШ для щели зависит не только от значения $m^*$ на поверхности Ферми, но и от всей функции $m^*(k)$ в широком интервале импульсов. Эта функция для ядерной материи не известна достаточно хорошо [7],

1) e-mail: saper@mbslab.kiae.ru

что и заставило нас взять слово "микроскопическое" в кавычки. Не меньшие неопределенности существуют и для двух других упомянутых поправок к теории БКШ [7]. Вместо их явного рассмотрения в [11–13] была предложена полумикроскопическая модель, в которой микроскопическое эффективное взаимодействие дополнено небольшим феноменологическим слагаемым:

$$\mathcal{V}^{\tau}_{\rm eff}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) = V^{\rm BCS}_{\tau,\rm eff}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4) + \\ + \gamma C_0 \frac{\rho_\tau(r_1)}{\bar\rho_\tau(0)} \prod_{i=2}^{4} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

Здесь $\tau = n,\ p$ – изотопический индекс, $C_0 = 300$ МэВ·фм$^3$ – стандартный для теории конечных ферми-систем (ТКФС) нормировочный множитель (обратная плотность уровней на поверхности Ферми) [14], $\rho_\tau(r)$ – плотность нуклонов сорта $\tau$, $\bar\rho_\tau(0)$ – центральное значение плотности, усредненное по интервалу $r < 2$, $\gamma$ – феноменологический параметр, который удается взять не зависящим от $\tau$, если учесть для протонов кулоновское взаимодействие [12]. Эта модель оказалась достаточно успешной [12, 13] в описании спаривательной щели в сферических ядрах при очень маленькой величине этого параметра, $\gamma = 0.06$. На рис. 1 демонстрируется, что

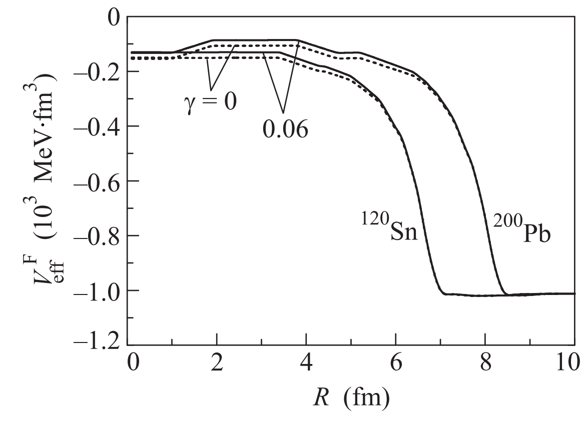


Рис. 1. Эффективное взаимодействие

феноменологическая добавка к $V_{\rm eff}$ в (1) действительно мала. Здесь построено локализованное "ферми-среднее" эффективное взаимодействие [15] при $\gamma = 0$ и 0.06 для двух ядер: $^{120}$Sn и $^{200}$Pb. Причина столь заметного эффекта в величине $\Delta$ – упомянутая выше экспоненциальная зависимость спаривательной щели от взаимодействия. Данный рисунок поясняет причину относительной успешности применения приближения БКШ (другими словами, теории Бракнера) для случая проблемы спаривания. Это поверхностная природа ядерного спаривания. Дело в том, что эффективное спаривательное взаимодействие на поверхности на порядок сильнее, чем внутри. В то же время известно, что на поверхности ядра условия для применимости теории Бракнера значительно лучше, чем в центральной области. Эта область вносит в величину щели непренебрежимый вклад только из-за эффекта экспоненциального усиления.

Имеется еще одна физическая величина, которая определяется тем же самым эффективным взаимодействием, что и спаривательная щель, т.е. неприводимым блоком взаимодействий в двухчастичном канале. Это двойные разности масс околомагических ядер:

$$D^{+}_{2p} = M(N,Z+2) + M(N,Z) - 2M(N,Z+1), \quad (2)$$

$$D^{-}_{2p} = -M(N,Z-2) - M(N,Z) + 2M(N,Z-1), \quad (3)$$

$$D^{+}_{2n} = M(N+2,Z) + M(N,Z) - 2M(N+1,Z), \quad (4)$$

$$D^{-}_{2n} = -M(N-2,Z) - M(N,Z) + 2M(N-1,Z), \quad (5)$$

где $Z$ и $N$ – магические. Как известно, дважды магические ядра не являются сверхтекучими. Однако эти двойные разности масс определяются тем же эффективным взаимодействием $V_{\rm eff}$ в канале $S = 0, L = 0$, что и нуклонное спаривание. На этот факт было обращено внимание в очень давней работе [16], где на основе анализа таких разностей масс был сделан вывод о поверхностной природе спаривания в ядрах. Разности масс для несверхтекучих ядер (2), (3) определяются полюсами двухчастичной функции Грина $K(1,2,3,4)$ в $pp$-канале, а (4), (5) – в $nn$-канале. Действительно, запишем разложение Лемана для $K$ в представлении одночастичных собственных функций $|1\rangle{=}|n_1,l_1,j_1,m_1\rangle$:

$$K^{34}_{12}(E) = \sum_s \frac{\chi^s_{12}\chi^{s*}_{34}}{E - E^{+,-}_s \pm i\gamma}, \quad (6)$$

где $E$ – полная энергия в канале двух частиц, а $E^{+,-}_s$ – собственные энергии в ядрах, получающихся из исходного добавлением двух частиц или дырок соответственно. Вместо $K$ удобно использовать двухчастичную амплитуду взаимодействия $\Gamma$:

$$K = K_0 + K_0 \Gamma K_0, \quad (7)$$

где $K_0 = GG$, а $G$ – одночастичная функция Грина. Уравнение для $\Gamma$ имеет вид [14]

$$\Gamma = \mathcal{U} + \mathcal{U}GG\Gamma, \quad (8)$$

где $\mathcal{U}$ – неприводимый в канале двух частиц блок взаимодействий. Заменим, как это делается в теории Бракнера или в приближении БКШ в проблеме спаривания, блок $\mathcal{U}$ на реалистический потенциал $\mathcal{V}$ рассеяния свободных нуклонов, который не зависит от энергии. Тогда в (8) можно произвести интегрирование по относительной энергии:

$$A_{12}=\int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} G_1\left(\frac{E}{2}+\varepsilon\right) G_2\left(\frac{E}{2}-\varepsilon\right)=\frac{1-n_1-n_2}{E-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ – одночастичные энергии, а $n_{1,2}$ – соответствующие числа заполнения. В результате получаем:

$$\Gamma = \mathcal{V} + \mathcal{V} A \Gamma. \quad (10)$$

Простые преобразования для каждого полюса $E = E_s^{+,-}$ в уравнении (7) или (10) приводят к следующему уравнению для собственных функций $\chi^s$:

$$(E_s - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\chi^s_{12} = (1 - n_1 - n_2) \sum_{34} \mathcal{V}^{34}_{12} \chi^s_{34}. \quad (11)$$

Оно отличается от уравнения Шредингера для двух взаимодействующих частиц во внешнем поле лишь фактором $1-n_1-n_2$, отражающим многотельный характер проблемы, в частности принцип Паули. Прямое решение этого уравнения затруднительно из-за медленной сходимости суммы по $\{34\}$, связанной с короткодействующим характером $NN$-потенциала $\mathcal{V}$. Как и в БКШ-уравнении для щели $\Delta$ [11–13], мы используем 2-ступенчатый метод, разбивая полное гильбертово пространство $S = \{12\}$ на модельное подпространство $S_0$ $(\varepsilon_1 < E_0, \varepsilon_2 < E_0)$ и дополнительное ему подпространство $S_1$ (соответственно, пропагатор $A = A_0 + A_1$). Стандартная перенормировка уравнения (11) превращает его в аналогичное уравнение в модельном пространстве:

$$(E_s-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\chi^s_{12}=(1-n_1-n_2)\sum_{34}^{0} \left(\mathcal{V}^{\rm BCS}_{\rm eff}\right)^{34}_{12} \chi^s_{34}, \quad (12)$$

где эффективное взаимодействие $\mathcal{V}^{\rm BCS}_{\rm eff}$ определяется уравнением, аналогичным (10), в дополнительном подпространстве $S_1$:

$$\mathcal{V}^{\rm BCS}_{\rm eff} = \mathcal{V} + \mathcal{V} A_1 \mathcal{V}^{\rm BCS}_{\rm eff}. \quad (13)$$

Для его решения используется "локально-потенциальное" приближение [11–13], что значительно упрощает проблему. Следующий шаг, согласно (1), состоит в замене $\mathcal{V}^{\rm BCS}_{\rm eff} \to \mathcal{V}_{\rm eff}$ за счет феноменологической добавки $(\sim \gamma)$.

Двойные разности масс (2)–(5) определяются двумя первыми решениями $E_s^{+,-}$ уравнения (12), отвечающими добавлению двух частиц (дырок) к магическому остову в состояние $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mu^{+,-}$. Химические потенциалы $\mu^{+,-}$ определены здесь стандартным образом как разности энергий связи. Например, $\mu_p^+ = E_{\rm B}(N, Z+1) - E_{\rm B}(N, Z)$. Тогда, очевидно, стоящая в левой части (12) разность энергий есть $E_s^{+,-} - 2\mu^{+,-} = D^{+,-}$. Если мы интересуемся только такими решениями, то можно переписать уравнение (12) для $E_s$ следующим образом:

$$E_s - 2\mu = (1-2n_1)\left(\Gamma'(E_s)\right)^{11}_{11}, \quad (14)$$

где

$$\left(\Gamma'(E_s)\right)^{34}_{12} = \left(\mathcal{V}_{\rm eff}\right)^{34}_{12} + \sum_{56}{}' \left(\mathcal{V}_{\rm eff}\right)^{56}_{12} \times \\ \times \frac{1-n_5-n_6}{E_s-\varepsilon_5-\varepsilon_6} \left(\Gamma'(E_s)\right)^{34}_{56}. \quad (15)$$

Штрих в сумме означает, что здесь исключается двухчастичное состояние $5 = 6 = 1$. В формулах (12)–(15) предполагается, что угловые моменты всех двухчастичных состояний $|12\rangle$ складываются в полный момент $I = 0$.

Система уравнений (14), (15) решалась в самосогласованном базисе метода Энергетического Функционала Плотности [17] с функционалом DF3. Результаты расчетов протонных разностей масс для изотопов свинца приведены в табл. 1, а нейтронных разностей масс для изотонов $N = 82$ – в табл. 2. Разные знаки величин $D_2^+$ и $D_2^-$ обусловлены фактором $1 - 2n_1$ в (14): частицы притягиваются, а дырки отталкиваются. Приведены результаты как целиком первопринципного расчета $(\gamma = 0)$, так и с феноменологической добавкой $(\gamma = 0.06)$. Для характеристики точности расчетов в среднем удобно ввести среднеквадратичную ошибку

$$\overline{\delta M_{2p,2n}} = \sqrt{\frac{1}{N_{p,n}} \sum_i \left(D^{(i)}_{\rm theor} - D^{(i)}_{\rm exp}\right)^2} \quad (16)$$

с очевидными обозначениями. Расчет по этой формуле ошибки для изотопов свинца дает $\overline{\delta M_{2p}}(\gamma = 0) = 0.64$ МэВ и $\overline{\delta M_{2p}}(\gamma = 0.06) = 0.42$ МэВ $(N_p = 26)$. Для изотонов $N = 82$ имеем $\overline{\delta M_{2n}}(\gamma = 0) = 0.66$ МэВ и $\overline{\delta M_{2n}}(\gamma = 0.06)$=0.42 МэВ $(N_n = 19)$. Суммарная ошибка для протонов и нейтронов равна $\overline{\delta M_{\rm tot}}(\gamma = 0) = 0.65$ МэВ и $\overline{\delta M_{\rm tot}}(\gamma = 0.06) = 0.42$ МэВ. Анализ обеих таблиц показывает, что согласие с экспериментом, как правило, заметно хуже для состояний с энергиями $\varepsilon_\lambda$, близкими к нулю. Это имеет ясную причину, поскольку для ядер вблизи границы нуклонной стабильности (химический потенциал $\mu \to 0$) сама концепция не зависящего от энергии среднего

Таблица 1

**Двойные разности масс $D_{2p}^{+,-}$ [МэВ] в четных изотопах свинца**

| Ядро | $\varepsilon_\lambda(1h_{9/2})$ | $D^+_{2p,\text{theor}}$ | | $D^+_{2p,\text{exp}}$ | $\varepsilon_\lambda(3s_{1/2})$ | $D^-_{2p,\text{theor}}$ | | $D^-_{2p,\text{exp}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\gamma=0$ | $\gamma=0.06$ | | | $\gamma=0$ | $\gamma=0.06$ | |
| $^{180}$Pb | $>0$ | – | – | – | –0.95 | 1.08 | 0.79 | 1.66(8) |
| $^{182}$Pb | $>0$ | – | – | – | –1.43 | 1.08 | 0.80 | 1.47(4) |
| $^{184}$Pb | $>0$ | – | – | – | –1.90 | 1.09 | 0.80 | 1.45(3) |
| $^{186}$Pb | $>0$ | – | – | – | –2.38 | 1.12 | 0.82 | 1.52(8) |
| $^{188}$Pb | $>0$ | – | – | – | –2.85 | 1.12 | 0.82 | 1.47(3) |
| $^{190}$Pb | $>0$ | – | – | – | –3.33 | 1.11 | 0.80 | 1.42(3) |
| $^{192}$Pb | –0.05 | –2.08 | –1.40 | –1.82(4) | –3.80 | 1.45 | 0.83 | 1.36(4) |
| $^{194}$Pb | –0.60 | –2.10 | –1.41 | –1.63(4) | –4.29 | 1.36 | 1.02 | 1.58(14) |
| $^{196}$Pb | –1.14 | –2.12 | –1.52 | –1.46(4) | –4.77 | 1.21 | 0.85 | 1.24(4) |
| $^{198}$Pb | –1.66 | –2.14 | –1.43 | –1.41(5) | –5.25 | 1.35 | 0.87 | 1.20(3) |
| $^{200}$Pb | –2.15 | –2.18 | –1.45 | –1.34(3) | –5.75 | 1.30 | 0.89 | 1.08(4) |
| $^{202}$Pb | –2.62 | –2.21 | –1.48 | –1.19(4) | –6.23 | 1.35 | 0.91 | 1.07(2) |
| $^{204}$Pb | –3.07 | –2.25 | –1.51 | –1.17(2) | –6.70 | 1.40 | 0.93 | 0.93 |
| $^{206}$Pb | –3.49 | –2.30 | –1.54 | –1.15(1) | –7.15 | 1.43 | 0.95 | 0.83 |
| $^{208}$Pb | –3.89 | –2.35 | –1.54 | –1.19 | –7.52 | 1.43 | 0.93 | 0.63(3) |
| $^{210}$Pb | –4.36 | –2.39 | –1.60 | –1.38(20)* | –7.95 | 1.44 | 0.94 | 0.55(31)* |
| $^{212}$Pb | –4.83 | –2.43 | –1.61 | –1.56(1) | –8.37 | 1.46 | 0.95 | 0.55(33)* |
| $^{214}$Pb | –5.30 | –2.47 | –1.62 | –1.70(2) | –8.79 | 1.47 | 0.95 | – |

Таблица 2

**Двойные разности масс $D_{2n}^{+,-}$ [МэВ] в четных изотопах $N = 82$**

| Ядро | $\varepsilon_\lambda(2f_{7/2})$ | $D^+_{2n,\text{theor}}$ | | $D^+_{2n,\text{exp}}$ | $\varepsilon_\lambda(2d_{3/2})$ | $D^-_{2n,\text{theor}}$ | | $D^-_{2n,\text{exp}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\gamma=0$ | $\gamma=0.06$ | | | $\gamma=0$ | $\gamma=0.06$ | |
| $^{132}$Sn | –2.32 | –1.28 | –0.97 | –1.45(15) | –7.76 | 2.90 | 2.19 | 2.07(5) |
| $^{134}$Te | –2.95 | –1.32 | –0.99 | –1.33(15) | –8.74 | 2.84 | 2.12 | 1.85(4) |
| $^{136}$Xe | –3.56 | –1.36 | –1.01 | –1.72(6) | –9.01 | 2.77 | 2.05 | 1.82(1) |
| $^{138}$Ba | –4.18 | –1.42 | –1.04 | –1.71(1) | –9.64 | 2.77 | 2.03 | 1.71 |
| $^{140}$Ce | –4.78 | –1.46 | –1.06 | –1.74(1) | –10.27 | 2.75 | 2.00 | 1.75(2) |
| $^{142}$Nd | –5.39 | –1.83 | –1.40 | –1.70(1) | –10.89 | 2.79 | 2.02 | 1.81(3) |
| $^{144}$Sm | –5.99 | –1.60 | –1.13 | –1.66(1) | –11.51 | 2.82 | 2.04 | 1.92(1) |
| | | | | | $\varepsilon_\lambda(3s_{1/2})$ | | | |
| $^{146}$Gd | –6.59 | –1.67 | –1.17 | –1.64(1) | –12.12 | 2.95 | 2.06 | 2.00(5) |
| $^{148}$Dy | –7.18 | –1.75 | –1.21 | –1.75(2) | –12.69 | 2.83 | 2.02 | 2.04(5) |
| $^{150}$Er | –7.76 | –1.84 | –1.26 | –1.80(4) | –13.25 | 2.81 | 1.99 | 2.00(24)* |

поля, на которую мы опираемся, становится ошибочной [18, 19]. Если выбросить из анализа состояния с $\varepsilon_\lambda > -4$ МэВ, получим $\overline{\delta M_{2p}}(\gamma = 0) = 0.53$ МэВ и $\overline{\delta M_{2p}}(\gamma = 0.06) = 0.27$ МэВ ($N_p = 10$). Для изотонов $N = 82$ имеем $\overline{\delta M_{2n}}(\gamma = 0) = 0.71$ МэВ и $\overline{\delta M_{2n}}(\gamma{=}0.06) = 0.39$ МэВ ($N_n = 16$). Суммарная ошибка для протонов и нейтронов в этом случае равна $\overline{\delta M_{\text{tot}}}(\gamma = 0) = 0.65$ МэВ и $\overline{\delta M_{\text{tot}}}(\gamma = 0.06) = 0.35$ МэВ.

Как видно, хотя и чисто микроскопический расчет ($\gamma = 0$) правильно воспроизводит масштаб величины двойной разности масс, феноменологическая добавка в эффективном взаимодействии (1) улучшает согласие с опытом. Однако остающиеся расхождения порядка 0.3 МэВ заметно больше тех, которые имели место для аналогичной величины в сверхтекучих ядрах (порядка 0.1–0.2 МэВ) [11–13]. Слабым местом рецепта (1) с одним универсальным параметром $\gamma$ является включение в него эффектов поверхностных фононов, которые могут флуктуировать от ядра к ядру. В рассматриваемой проблеме это особенно существенно, т.к. величины $D_{2p}$ или $D_{2n}$, в отличие от спаривательной щели $\Delta$, в значительной степени определяются диагональным матричным элементом $(\mathcal{V}_{\text{eff}})^{11}_{11}$, фононные поправки к которому могут сильно зависеть от рассматриваемого ядра и от состояния $|1\rangle$. Оценим величину этих поправок.

Основные поправки к формуле (14) за счет фонона мультипольности $L$ изображены на диаграммах рис. 2. Первая из них – это так называемое

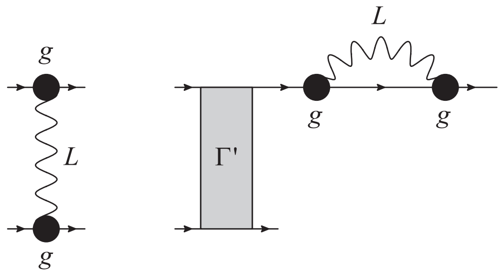


Рис. 2. Фононные поправки к эффективному взаимодействию $\Gamma'$

индуцированное взаимодействие, вторая – "поправки к концам". Обычно в магических и околомагических ядрах величину $g$ можно рассматривать как малый параметр и использовать так называемое $g^2$-приближение. Именно $g^2$-поправки изображены на рис. 2. Волнистая линия изображает $\mathcal{D}$-функцию фонона, $\mathcal{D}(\omega) = 2\omega_L/(\omega^2 - \omega_L^2)$, где $\omega_L$ – энергия возбуждения $L$-фонона, а передаваемая энергия для диагонального матричного элемента $\omega = 0$. Вершина $g(r)$ рождения $L$-фонона и частота $\omega_L$ находились [20] решением уравнений самосогласованной ТКФС [21]. Отметим, что все низколежащие фононы имеют нормальную четность $\pi = (-1)^L$. Поэтому явно мы ее не указываем. Первая диаграмма легко вычисляется, давая

$$\delta^{(1)}_{ph} D_2 = -\frac{2(\langle j_1 l_1 || L || j_1 l_1 \rangle g_{11})^2}{\omega_L(2j_1+1)}, \qquad (17)$$

где $\langle\ ||L||\ \rangle$ обозначает приведенный матричный элемент [22], а $g_{11}$ – радиальный матричный элемент от $g(r)$.

На второй диаграмме, конечно, подразумевается, что точно такие же поправки существуют для каждого из концов. Эти поправки легко суммируются [14], приводя к умножению каждого из концов на $\sqrt{Z_1}$, где $Z_1$ – вычет функции Грина $G(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = \varepsilon_1$. Соответствующая поправка к двойной разности масс, очевидно, есть

$$\delta^{(2)}_{ph} D_2 = (Z_1^2 - 1) D_2. \qquad (18)$$

Это выражение содержит более высокие по $g^2$ члены. Вместе с тем такое частичное суммирование имеет ясный физический смысл. Кроме того, бывают случаи, когда разность $Z_1 - 1$ не мала. Дело в том, что реальным безразмерным малым параметром является отношение $\bar{g} = g_{12}/\delta\varepsilon_{12}$, где $\delta\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \omega_L$. Для коллективных $L$-фононов матричные элементы $g_{12} \simeq 1$ МэВ, а характерная величина $\delta\varepsilon_{12} \simeq \varepsilon_{\text{F}}/A^{1/3}$, где $\varepsilon_{\text{F}}$ – энергия Ферми, $A$ – массовое число ядра, так что действительно $\bar{g} \ll 1$. Однако возможны отдельные "резонансные" случаи, когда величина $\delta\varepsilon_{12}$ аномально мала. Тогда $g^2$-приближение не работает и нужно суммировать высшие по $g^2$ члены. В таких случаях естественно умножать на $\sqrt{Z_1}$ и концы в первой диаграмме рис. 2. В результате для поправленной на фононы двойной разности масс имеем

$$\tilde{D}_2 = \left(D_2 + \delta^{(1)}_{ph} D_2\right) Z_1^2. \qquad (19)$$

Рассчитаем с помощью этой формулы поправки к протонной разности масс $D_{2p}$ сначала для дважды магического ядра $^{208}$Pb. При этом в качестве $D_2$ следует использовать значения из табл. 1, отвечающие $\gamma = 0$. В этом ядре основную роль играет коллективный $3^-$-фонон с энергией $\omega_3 = 2.684$ МэВ. Для состояния $h_{9/2}$ имеем $Z_1 = 0.98$, $\delta^{(1)}_{ph} D_{2p} = -0.14$ МэВ и $\tilde{D}_{2p} = -2.38$ МэВ. Таким образом, для этого состояния фононная поправка $\delta_{ph} D_{2p} = \tilde{D}_{2p} - D_{2p} = -0.03$ МэВ пренебрежимо мала. Для состояния $3s_{1/2}$, очевидно, $\delta^{(1)}_{ph} D_{2p} = 0$ (просто в силу сохранения углового момента), а $Z_1 = 0.96$ и $\tilde{D}_{2p} = 1.32$ МэВ, т.е. фононный эффект $\delta_{ph} D_{2p} = -0.11$ МэВ несколько больше, но тоже мал (меньше 10%). Иная ситуация наблюдается в полумагическом ядре $^{204}$Pb. Здесь фононные поправки определяются в основном низколежащим $2^+$-фононом, $\omega_2 = 0.882$ МэВ. В этом случае для состояния $h_{9/2}$ имеем $Z_1 = 0.74$, $\delta^{(1)}_{ph} D_{2p} = -0.55$ МэВ, $\tilde{D}_{2p} = -1.53$ МэВ и $\delta_{ph} D_{2p} = 0.72$ МэВ. Для состояния $3s_{1/2}$ опять $\delta^{(1)}_{ph} D_{2p} = 0$, $Z_1 = 0.82$, $\tilde{D}_{2p} = 0.93$ МэВ и $\delta_{ph} D_{2p} = -0.47$ МэВ. Таким образом, здесь для обоих состояний фононная поправка имеет практически ту же величину, что и эффект от феноменологической добавки (1) при $\gamma = 0.06$, т.е. теперь нужно брать меньшие значения $\gamma$, а для состояния $3s_{1/2}$ вообще можно взять $\gamma = 0$. По-видимому, для лучшего согласия с опытом нужно систематически учитывать фононные поправки и выбирать заново феноменологический параметр $\gamma$. Это мы планируем сделать в следующей работе.

Авторы благодарят С.В. Толоконникова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке грантов Министерства науки и образования # НШ-7235.2010.2 и 2.1.1/4540, грантов РФФИ # 11-02-00467-а и 12-02-00955-а, а также совместного гранта

РФФИ и DFG (Германия) # 09-02-91352-ННИО_а, 436 RUS 113/994/0-1(R).


1. F. Barranco, R. A. Broglia, H. Esbensen, and E. Vigezzi, Phys. Lett. B **390**, 13 (1997).
2. F. Barranco, R. A. Broglia, G. Colo et al., Eur. Phys. J. A **21**, 57 (2004).
3. A. Pastore, F. Barranco, R. A. Broglia, and E. Vigezzi, Phys. Rev. C **78**, 024315 (2008).
4. T. Duguet and T. Lesinski, Eur. Phys. J. Special Topics **156**, 207 (2008).
5. K. Hebeler, T. Duguet, T. Lesinski, and A. Schwenk, Phys. Rev. C **80**, 044321 (2009).
6. С. С. Панкратов, М. Балдо, М. В. Зверев и др., Письма в ЖЭТФ, **90**, 612 (2009).
7. M. Baldo, U. Lombardo, S. S. Pankratov, and E. E. Saperstein, J. Phys. G: Nucl. Phys. **37**, 064016 (2010).
8. P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Berlin, 1980.
9. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. IX, Статистическая физика, часть 2*, М.: Наука, Физматгиз, 1978.
10. S. K. Bogner, T. T. S. Kuo, and A. Schwenk, Phys. Rep. **386**, 1 (2003).
11. С. С. Панкратов, М. Балдо, М. В. Зверев и др., Письма в ЖЭТФ **92**, 79 (2010).
12. S. S. Pankratov, M. Baldo, U. Lombardo et al., Phys. Rev. C **84**, 014321 (2011).
13. S. S. Pankratov, M. Baldo, U. Lombardo et al., ЯФ **74**, 1670 (2011).
14. А. Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, М.: Наука, 1965.
15. M. Baldo, U. Lombardo, E. E. Saperstein, and M. V. Zverev, Phys. Rep. **391**, 261 (2004).
16. Э. Е. Саперштейн, М. А. Троицкий, ЯФ **1**, 400 (1965).
17. S. A. Fayans, S. V. Tolokonnikov, E. L. Trykov, and D. Zawischa, Nucl. Phys. A **676**, 49 (2000).
18. M. Baldo, U. Lombardo, E. E. Saperstein, and M. V. Zverev, Phys. Lett. B **533**, 17 (2002).
19. Э. Е. Саперштейн, С. В. Толоконников, Письма в ЖЭТФ **78**, 795 (2003).
20. S. V. Tolokonnikov, S. Kamerdzhiev, D. Voytenkov et al., Phys. Rev. C **84**, 064324 (2011).
21. V. A. Khodel and E. E. Saperstein, Phys. Rep. **92**, 183 (1982).
22. О. Бор, Б. Моттельсон, *Структура атомного ядра*, М.: Мир, 1971, т. 1.