Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 12, с. 689 – 692 

# Сверхсветовой параметрический эффект Доплера в диэлектриках и в электрон-позитронном вакууме

*Н. Н. Розанов*[1)]

*Государственный оптический институт им. Вавилова, 199034 С.-Петербург, Россия*

*С.-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 197101 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 3 апреля 2012 г.

Показано, что встречные электромагнитные волны с различающимися частотами наводят в кубично-нелинейной среде две решетки, одна из которых в типичных условиях движется со сверхсветовой скоростью. При отражении слабого излучения от сверхсветовой решетки происходит квазиобращение волнового фронта с искажениями из-за доплеровского сдвига частот. Эти эффекты имеют место как в диэлектриках с быстрой нелинейностью, так и в электрон-позитронном вакууме.

В среде с кубической оптической нелинейностью вызванное электромагнитным полем изменение поляризации среды имеет вид $\hat{\chi}^{(3)}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, где $\mathbf{E}_l$ – напряженности электрического поля волн с различающимися частотами $\omega_l$ и поляризациями, $\hat{\chi}^{(3)}$ – оператор кубической восприимчивости, зависящий от частот $\omega_l$ и состояния поляризации этих волн. Если волны 1 и 2 – сильные, волна 3 – слабая (практически не влияющая на характеристики сильных волн), а поляризация слабой волны ортогональна поляризации сильных волн, то можно говорить о линейном распространении волны 3 в среде с диэлектрической $\varepsilon$ (и в общем случае магнитной $\mu$) проницаемостью, зависящей от характеристик сильных волн.

Пусть исходное поле отвечает двум встречным плоским монохроматическим волнам с одинаковой поляризацией (орт $\mathbf{e}$), но различающимися частотами ($\omega_1 \neq \omega_2$) и противоположными направлениями распространения по оси $z$:

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{e}E_{1,2}\cos\Phi_{1,2}, \quad \Phi_{1,2} = k_{1,2}z - \omega_{1,2}t + \varphi_{1,2}, \\ k_1 > 0, \quad k_2 < 0, \quad \omega_{1,2} > 0, \tag{1}$$

где волновые числа $|k_{1,2}| = \omega_{1,2}n_{1,2}/c$ (нелинейным сдвигом показателей преломления $n_{1,2} = n(\omega_{1,2}) = \sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$ мы здесь пренебрегаем), $\varepsilon_{1,2} > 0$, $\mu_{1,2} > 0$, $t$ – время, $c$ – скорость света в вакууме. Тогда эффективная диэлектрическая проницаемость среды для слабой волны будет включать слагаемые, пропорциональные

$$\hat{\chi}^{(3,+)}E_1E_2\cos\Phi^{(+)} \quad \text{и} \quad \hat{\chi}^{(3,-)}E_1E_2\cos\Phi^{(-)}, \tag{2}$$

где

$$\Phi^{(\pm)} = \Phi_1 \pm \Phi_2 = K^{(\pm)}z - \Omega^{(\pm)}t + (\varphi_1 \pm \varphi_2), \\ K^{(\pm)} = k_1 \pm k_2 = k_1 \mp |k_2|, \quad \Omega^{(\pm)} = \omega_1 \pm \omega_2. \tag{3}$$

Выражения (2) описывают две решетки, бегущие со скоростями

$$V^{(\pm)} = \frac{\Omega^{(+)}}{K^{(+)}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1-|k_2|} = c\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1n_1-\omega_2n_2}, \\ V^{(-)} = \frac{\Omega^{(-)}}{K^{(-)}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1+|k_2|} = c\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1n_1+\omega_2n_2}. \tag{4}$$

В [1] решетки назывались волнами интенсивности и из них учитывалась только досветовая, отвечающая индексу “$-$”, что оправдано при близких частотах ($|\omega_1-\omega_2| \ll \omega_{1,2}$) для сред с инерционным откликом. В пренебрежении дисперсией

$$n_1 = n_2 = n, \quad V^{(+)} = \frac{c}{n}\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}, \\ V^{(-)} = \frac{c}{n}\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \quad V^{(+)}V^{(-)} = \left(\frac{c}{n}\right)^2. \tag{5}$$

Направление движения обеих решеток – в сторону распространения волны с большей частотой. При близких частотах ($|\omega_1-\omega_2| \ll \omega_{1,2}$) одна из решеток является медленной, досветовой ($|V^{(-)}| \ll c$), а другая – быстрой, сверхсветовой ($|V^{(+)}| \gg c$). Сверхсветовое движение решетки в рамках плоских волн приводит к излучению Вавилова–Черенкова вдоль направления скорости только при условии равенства скорости движения $|V|$ фазовой скорости в среде $c/n$. При большей скорости движения оно отсутствует. Описание такого излучения требует учета поперечной ограниченности пучков сильного излучения. В случае достаточно широких пучков и коротких трасс можно пренебречь потерями энергии за

[1)] e-mail: nrosanov@yahoo.com

счет черенковского излучения, оставаясь в рамках приближения плоских волн. Экспериментальный интерес представляет случай малой глубины решеток.

Рассмотрим теперь взаимодействие с решетками слабого излучения, отвечающего вне решетки ($z \to \to -\infty$) плоской монохроматической волне с поляризацией, ортогональной поляризации сильного поля, частотой $\omega_i$ и ненулевыми компонентами волнового вектора $k_{x,i} = \omega_i n_i \sin\theta_i$ и $k_{z,i} = \omega_i n_i \cos\theta$ (наклонное падение под углом $\theta_i$ к нормали к решеткам, т.е. оси $z$). Взаимодействие такой волны с неглубокими решетками будет эффективным лишь в условиях брэгговского резонанса, что в общем случае при фиксированных параметрах волны достигается не более чем для одной из двух решеток. Вблизи резонанса для одной из решеток наличием другой решетки можно пренебречь. Отражение от краев решетки является слабым, если она включает большое число периодов, а ее границы размыты в продольном направлении на несколько длин волн. Тогда на основной протяженности решетки

$$\varepsilon = \varepsilon(z - Vt) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon \cos(Kz - \Omega t),$$

где $V = \Omega/K = V^{(+)}$ или $V^{(-)}$ (4). Распределение $\mu(z - Vt)$ аналогично.

Задача о падении волны на неоднородность, движущуюся с единой скоростью, решается в подходе [2] заменой плавных распределений $\varepsilon$ и $\mu$ ступенчатыми с последующим стремлением к нулю ширин ступенек. Для слабой волны с $s$-поляризацией отличны от нуля только $y$-компоненты электрических величин. Уравнения Максвелла в пределах $m$-й ступеньки имеют решение в виде суперпозиции двух плоских волн, например

$$E_{ym} = \sum_j A_m^{(j)} \exp(ik_{x,m}^{(j)} x + ik_{z,m}^{(j)} z - i\omega_m^{(j)} t) + \text{c.c.} \quad (6)$$

При этом $k_{x,m}^{(j)2} + k_{m,z}^{(j)2} = (\omega_m^{(j)} n_m^{(j)}/c)^2$. Во внутренних слоях индекс суммирования принимает значения $j = 1$ и 2, во внешних (полубесконечных) могут распространяться или две волны, или одна (см. ниже). Сшиванию на границах слоев подлежат величины

$$E_{ym} + \frac{V}{c} B_{xm} = \sum_j \left(1 - \frac{V}{c} \frac{c k_{z,m}^{(j)}}{\omega_m^{(j)}}\right) \times$$
$$\times A_m^{(j)} \exp(ik_{x,m}^{(j)} x + ik_{z,m}^{(j)} z - i\omega_m^{(j)} t) + \text{c.c.}, \quad (7)$$
$$H_{xm} + \frac{V}{c} D_{ym} = \sum_j \left(\frac{V}{c} \varepsilon_m^{(j)} - \frac{c k_{z,m}^{(j)}}{\mu_m^{(j)} \omega_m^{(j)}}\right) \times$$
$$\times A_m^{(j)} \exp(ik_{x,m}^{(j)} x + ik_{z,m}^{(j)} z - i\omega_m^{(j)} t) + \text{c.c.}$$

На первом этапе из сравнения показателей экспонент в (7) при $z - Vt = \text{const}$ определяются частоты $\omega_m^{(j)}$ и направления распространения волн $(k_{x,m}^{(j)}, k_{z,m}^{(j)})$ в каждом слое. При этом заданы характеристики падающей волны (при $z \to -\infty$ известны ее амплитуда, частота $\omega_i$ и компоненты волнового вектора $k_{x,i}$ и $k_{z,i}$). На втором этапе находятся соотношения между амплитудами волн в слоях.

На первом этапе возможны два варианта. В "нормальном" режиме при всех $m$ и $j$

$$k_{x,m}^{(j)} = k_{x,i}, \quad k_{z,m}^{(j)} V - \omega_m^{(j)} = k_{z,i} V - \omega_i. \quad (8)$$

Из-за присутствия в (7) комплексного сопряжения в "аномальном" режиме для некоторых $m$ и $j$ вместо (8) выполняются соотношения

$$k_{x,m}^{(j)} = -k_{x,i}, \quad k_{z,m}^{(j)} V - \omega_m^{(j)} = \omega_i - k_{z,i} V. \quad (9)$$

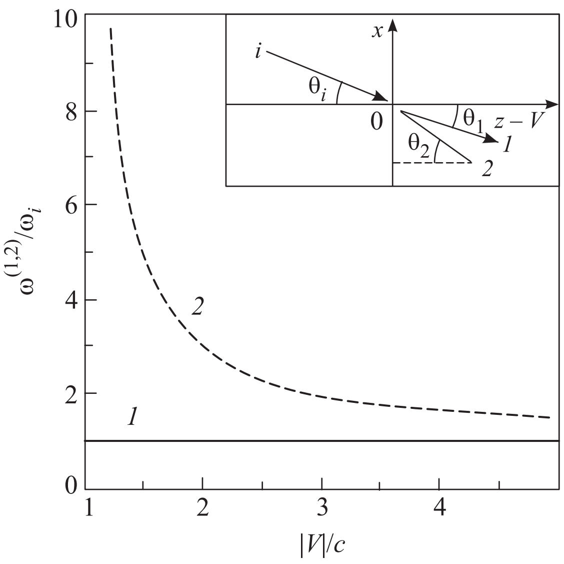
Нормальный режим характерен для досветового движения неоднородности. Для простоты и ввиду отсутствия принципиальных различий с более сложным случаем рассмотрим падение волны с частотой $\omega_i$ на одну ступеньку (скачок) диэлектрической и магнитной проницаемостей, движущуюся со скоростью $V < 0$. При нормальном падении, когда $k_{x,m}^{(j)} = 0$, такая задача решалась в приведенных в [3, 4] статьях. В аномальном режиме скорость движения фронта неоднородности (скачка) превышает нормальную составляющую фазовой скорости излучения в среде [5]. Поэтому "отраженная" от скачка волна отстает от него, в области перед скачком ($m = 1$, $z - Vt < 0$) имеется только падающая волна, а за скачком ($m = 2$, $z - Vt > 0$) – две волны (прошедшая *1* и "отраженная" *2*; см. рисунок). Соответственно, из (9) следует модифицированный закон Снелиуса (с учетом отрицательности $k_{x,2}^{(2)} = -(\omega^{(2)}/c) n^{(2)} \sin\theta^{(2)}$ и $k_{z,2}^{(2)} = -(\omega^{(2)}/c) n^{(2)} \cos\theta^{(2)}$ можно говорить об отрицательном угле отражения):

$$\omega_i n_i \sin\theta_i = \omega^{(1)} n^{(1)} \sin\theta^{(1)} = \omega^{(2)} n^{(2)} \sin\theta^{(2)}. \quad (10)$$

Кроме того, с учетом отрицательности $k_{z,2}^{(2)}$ из (9) находим

$$\omega_i \left(\frac{V}{c} n_i \cos\theta_i - 1\right) = \omega^{(1)} \left(\frac{V}{c} n^{(1)} \cos\theta^{(1)} - 1\right) =$$
$$= \omega^{(2)} \left(\frac{V}{c} n^{(2)} \cos\theta^{(2)} + 1\right). \quad (11)$$

В рассматриваемом случае ($V < 0$) аномальный режим [5] существует только при сверхсветовой скорости движения неоднородности, $(|V|/c) n^{(2)} \cos\theta^{(2)} > 1$.




Зависимость частот прошедшей (*1*) и "отраженной" (*2*) волн от сверхсветовой скорости движения неоднородности. Врезка поясняет направления распространения волн; $n_i = n_t = 1$

Отметим, что волна *2* порождается именно отражением падающего излучения от неоднородности. Режим напоминает обращение волнового фронта, но с искажениями, так как из-за доплеровского сдвига частоты модули волновых векторов $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}^{(2)}$ различаются. Эффект не сводится и к известному обращению волнового фронта при четырехволновом смешении, равно как сдвинутые из-за эффекта Доплера частоты не описываются традиционным для нелинейной оптики соотношением $\omega = |\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_i|$.

В пренебрежении дисперсией $n_i$ и $n^{(1)} = n^{(2)} = n_t$ – заданные постоянные. Тогда

$$\sin\theta^{(1)} = \frac{n_i}{n_t}\frac{\omega_i}{\omega^{(1)}}\sin\theta_i, \quad \sin\theta^{(2)} = \frac{n_i}{n_t}\frac{\omega_i}{\omega^{(2)}}\sin\theta_i, \quad (12)$$

а частоты волн 1 и 2 ($\omega^{(2)} > \omega^{(1)}$) находятся как корни квадратного уравнения

$$\frac{\omega^{(1,2)}}{\omega_i} = \left[\left(\frac{|V|}{c}n_t\right)^2 - 1\right]^{-1}\left[\mp\left(\frac{|V|}{c}n_i\cos\theta_i + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{|V|}{c}n_t\right)^2\left(\frac{|V|}{c}n_i\cos\theta_i + 1\right)^2 + \left[\left(\frac{|V|}{c}n_t\right)^2 - 1\right]\left(\frac{|V|}{c}n_i\sin\theta_i\right)^2}\,\right]. \quad (13)$$

Если $n_i = n_t$ (см. ниже), то $\omega^{(1)} = \omega_i$ и $\theta^{(1)} = \theta_i$ (частота и угол преломленной волны не меняются). При $|V|/c \to \infty$ частоты волн 1 и 2 сближаются: $\omega^{(1,2)}/\omega_i \approx n_i/n_t$.

Сшивание комбинаций амплитуд в (7) при $z = Vt$ приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{A^{(1)}}{A_i} = \frac{1}{D}\left[Y^{(2)}\left(1 - \frac{V}{c}n_i\cos\theta_i\right)\left(\cos\theta^{(2)} + \frac{V}{c}n^{(2)}\right) - Y_i\left(1 + \frac{V}{c}n^{(2)}\cos\theta^{(2)}\right)\left(\cos\theta_i - \frac{V}{c}n_i\right)\right], \quad (14)$$

$$\frac{A^{(2)*}}{A_i} = \frac{1}{D}\left[-Y^{(1)}\left(1 - \frac{V}{c}n_i\cos\theta_i\right)\left(\cos\theta^{(1)} - \frac{V}{c}n^{(1)}\right) + Y_i\left(1 - \frac{V}{c}n^{(1)}\cos\theta^{(1)}\right)\left(\cos\theta_i - \frac{V}{c}n_i\right)\right],$$

где $Y_i = Y(\omega_i)$ и $Y^{(l)} = Y(\omega^{(l)}) = \sqrt{\varepsilon_l/\mu_l}$ – обратные импедансы среды перед скачком и за ним, а

$$D = Y^{(1)}\left(\cos\theta^{(1)} - \frac{V}{c}n^{(1)}\right)\left(1 + \frac{V}{c}n^{(2)}\cos\theta^{(2)}\right) - Y^{(2)}\left(1 - \frac{V}{c}n^{(1)}\cos\theta^{(1)}\right)\left(\cos\theta^{(2)} + \frac{V}{c}n^{(2)}\right). \quad (15)$$

Тот факт, что в (14) входит комплексно-сопряженная амплитуда "отраженной" волны 2, вновь указывает на близость к режиму обращения волнового фронта. Переход к случаю решетки конечной длины не меняет выражений для частот и направления распространения волн, но в коэффициенте отражения возникает дополнительный множитель – фурье-компонента изменения обратного импеданса (при нормальном падении) [2].

В рамках теории Гейзенберга–Эйлера [6] распространение интенсивного электромагнитного излучения в электрон-позитронном вакууме описывается теми же уравнениями Максвелла для сплошной среды. Вновь полагаем, что в вакууме навстречу друг другу распространяются две интенсивные плоские волны с амплитудами $E_1$ и $E_2$ и различающимися частотами $\omega_1 \neq \omega_2$, а также слабое излучение с ортогональной поляризацией и частотой $\omega_i$. Тогда сильные волны наводят для слабого излучения решетки диэлектрической и магнитной проницаемостей слабой волны вида

$$\varepsilon = 1 + \eta(\cos\Phi^{(+)} + \cos\Phi^{(-)}),$$
$$\mu = \varepsilon^{-1} = 1 - \eta(\cos\Phi^{(+)} + \cos\Phi^{(-)}), \quad (16)$$
$$\eta = (4e^4/45\pi m^4)E_1E_2,$$

где $m$ – масса электрона. Здесь используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$, постоянная Планка $\hbar = 1$ и $e^2 = 1/137$. При этом $\eta \ll 1$. Хотя согласно (16) показатель преломления вакуума $n = 1$, это не означает отсутствия отражения, для которого существенна имеющаяся неоднородность импеданса $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 1 - \eta(\cos\Phi^{(+)} + \cos\Phi^{(-)})$. Поэтому и в вакууме сильное излучение также наводит бегущие решетки, на которых рассеивается слабое излучение. Воспользовавшись результатом [2], в случае нормального падения слабого излучения и точного брэгговского резонанса получим амплитудный коэффициент отражения слабой волны:

$$r \approx i\frac{\pi\eta}{2}\frac{L}{\lambda_i}\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 3\cdot 10^{-4}\frac{E_1}{E_c}\frac{E_2}{E_c}\frac{L}{\lambda_i}\frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (17)$$

Здесь $\lambda_i$ – длина волны падающего излучения, а $E_c = m^2c^3/(e\hbar)$ – критическое (швингеровское) значение напряженности поля (в обычных единицах), отвечающее интенсивности $\sim 10^{29}$ Вт/см$^2$. Коэффициент отражения увеличивается при значительном различии частот двух волн, записывающих решетку (т.к. при этом скорость движения решетки приближается к скорости света), и при увеличении длины решетки (в единицах длины волны зондирующего излучения), что требует значительной длительности импульсов излучения, записывающих решетку. При этом длина решетки должна быть меньше дифракционной длины пучков излучения, так что предпочтительно использование лазеров коротковолнового диапазона. Сохраняется требование близости частоты слабого излучения к резонансной для брэгговской решетки. Отметим, что мощность проектируемых сейчас лазерных установок превышает $10^{23}$ Вт/см$^2$ [7].

Автор благодарен Е.Б. Александрову, Р.А. Сурису и В.Б. Шилову за стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ # 11-02-12250-офи-м-2011 и 12-02-0028-а, а также НИУ ИТМО # 411402.

1. Ю. Н. Денисюк, ЖТФ **44**, 131 (1974); **49**, 97 (1979); **52**, 1338 (1982).
2. Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **88**, 577 (2008); Опт. и спектр. **106**, 487 (2009).
3. Л. А. Островский, УФН **116**, 315 (1975).
4. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН **159**, 155 (1989).
5. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, М.: Наука, 1975.
6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, М.: Наука, 1989.
7. http://www.extreme-light-infrastructure.eu/