Письма в ЖЭТФ, том 95, вып. 12, с. 751 – 760 © 2012 г. 25 июня

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проект РФФИ # 09-02-01146

Турбулентный капиллярный каскад вблизи края инерционного интервала на поверхности квантовой жидкости

Л. В. Абдурахимов[1], *М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, И. А. Ремизов, С. В. Филатов*

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 10 мая 2012 г.

В диссипативной области на частотах выше частоты края инерционного интервала турбулентный каскад капиллярных волн на поверхности жидкого гелия и водорода затухает по экспоненциальному закону. Величина характерной частоты квазипланковского распределения определяется спектральной характеристикой возбуждающей силы. При гармонической накачке на поверхности сверхтекучего гелия в режиме дискретной турбулентности наблюдается накопление энергии вблизи края инерционного интервала. Эффект обусловлен влиянием дискретности в спектре собственных частот поверхностных возбуждений и в турбулентном распределении на процесс распространения энергии по каскаду.

1. Введение. Частота капиллярных волн на поверхности жидкости ω определяется величиной волнового вектора k, а также зависит от величины коэффициента поверхностного натяжения σ и плотности жидкости ρ:

$$\omega = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/2} k^{3/2}. \tag{1}$$

Закон дисперсии капиллярных волн (1) является распадным, т.е. разрешены трехволновые процессы распада одной волны на две и слияния двух волн в одну с сохранением энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 &= \omega_3, \\ k_1 \pm k_2 &= k_3. \end{aligned} \tag{2}$$

При возбуждении поверхности жидкости внешней силой в области низких частот в системе капиллярных волн может быть сформировано турбулентное состояние, в котором поток энергии P в k-пространстве направлен из области накачки в сторону бо́льших векторов (высоких частот), – прямой каскад. Теория волновой (слабой) турбулентности [1] предсказывает, что основной вклад в перенос энергии по турбулентному капиллярному каскаду вносят трехволновые процессы слияния волн. При этом энергия волн степенным образом распределена по шкале частот: $E_\omega \sim \omega^{-\alpha}$. С экспериментальной точки зрения наиболее удобно исследовать парную корреляционную функцию $I(\tau) = \langle \eta(r, t+\tau)\eta(r,t)\rangle$ отклонения поверхности от равновесного состояния в точке r, а не распределение энергии E_ω, так как величина отклонений поверхности от плоского состояния $\eta(r,t)$ может быть непосредственно измерена в опыте. Теория волновой турбулентности [1] для системы капиллярных волн на поверхности жидкости предсказывает формирование турбулентного каскада в инерционном интервале, ограниченном областью накачки на низкой частоте и диссипативным интервалом на высоких частотах. В пределах инерционного интервала парная корреляционная функция $I(r,t)$ в фурье-представлении описывается степенной функцией частоты (турбулентный каскад):

$$I_\omega \sim \omega^{-m}. \tag{3}$$

При этом $E_\omega \sim \omega^{4/3} I_\omega$. Величина показателя степени m зависит от спектральной характеристики возбуждающей силы. Для широкополосной накачки $m = 17/6$. Наши предварительные экспериментальные исследования на поверхности жидкого водорода показали, что спектральная характеристика возбуждающей силы определяет величину показателя степенной функции [2]. При возбуждении поверхности низкочастотной гармонической силой корреляционная функция I_ω представляет собой ряд узких пиков с частотами, кратными частоте накачки ω_p. Положе-

[1]e-mail: abdurl@issp.ac.ru

ние максимумов пиков хорошо описывается степенной функцией ω^{-m} с показателем $m = 3.7 \pm 0.3$. Если в дополнение к накачке на одной резонансной частоте добавлялось возбуждение гармонической силой на другой резонансной частоте, то величина показателя уменьшалась до $m = 2.8 \pm 0.2$. Величина показателя степени также была близка к $m = 3 \pm 0.3$ при возбуждении поверхности низкочастотным шумом в широкой полосе. В этих экспериментах мы качественно показали, что при переходе от возбуждения поверхности шумом в широкой полосе к накачке гармонической силой на одной резонансной частоте ячейки величина показателя степени m увеличивается, как это следовало из работы [3]. Компьютерные моделирования [3] показали, что по мере уменьшения ширины полосы накачки шумом на турбулентном каскаде формируется ряд пиков, равноудаленных друг от друга. Их ширина линейно зависит от частоты. При накачке в узкой полосе уменьшение высоты максимумов пиков с ростом частоты описывается степенной функцией частоты с показателем степени, величина которого на единицу превосходит величину такого же показателя для случая накачки шумом в широкой полосе, т.е. $m = 23/6$. Более подробные исследования эволюции турбулентного каскада при изменении спектральной характеристики возбуждающей силы от широкополосной к узкополосной накачке были сделаны в нашей работе [4]. В стационарном турбулентном спектре в системе капиллярных волн энергия переносится в сторону высоких частот, где она трансформируется в тепло в силу вязких потерь, и турбулентный каскад затухает. Поэтому чтобы поддерживать турбулентный каскад в стационарном состоянии, требуется непрерывно вводить энергию на низких частотах. Частоту ω_b высокочастотного края инерционного интервала можно оценить, предположив, что на этой частоте время нелинейного взаимодействия волн τ_{nl} сравнивается по порядку величины с временем вязкого затухания τ_ν [2]:

$$\omega_b \sim \left(P^{1/2}/\nu\right)^{6/5} \sim \left(\eta_0^2 \omega_0^{17/6}/\nu\right)^{6/5}, \qquad (4)$$

где η_0^2 – квадрат амплитуды волны на частоте накачки ω_p, ν – кинематическая вязкость жидкости. На высоких частотах поведение спектра определяется особенностями диссипации энергии и нелинейного взаимодействия волн. Когда волны в диссипативном интервале взаимодействуют в основном с ближайшими соседями (случай широкополосной накачки), а не с волнами из инерционного интервала, распределение волн на высоких частотах становится близким к больцмановскому [5]. Детальный анализ дает квазипланковский спектр корреляционной функции в диссипативной области:

$$P_\omega \sim \omega^s e^{-\omega/\omega_d}, \qquad (5)$$

где ω_d – характерная частота распределения, s – показатель степени в предэкспоненте. Численное моделирование для капиллярных волн подтвердило экспоненциальную зависимость в распределении волн в диссипативном интервале. В то же время при возбуждении поверхности жидкости гармонической силой для высокочастотных гармоник турбулентного каскада доминирующими могут оказаться процессы взаимодействия с модами из инерционного интервала [6]. В условиях ограниченной геометрии спектр капиллярных волн из непрерывного становится дискретным, причем расстояние между резонансными модами возрастает с частотой. Для случая монохроматического возбуждения поверхности жидкости турбулентный каскад состоит из гармоник, частота которых кратна частоте возбуждающей силы. Простые рассуждения приводят к выводу о том, что при таком возбуждении поверхности система уравнений (3) решений не имеет [7, 8]. Однако, как показано в [9], это ограничение снимается, если учесть нелинейное уширение резонансных пиков. Тогда законы сохранения нужно переписать в следующей форме:

$$\begin{gathered} \left||k_1|^{3/2} \pm |k_2|^{3/2} - |k_3|^{3/2}\right| < \delta\omega, \\ k_1 \pm k_2 - k_3 = 0, \end{gathered} \qquad (6)$$

где δ – характерная величина нелинейного уширения резонансного пика. Кроме того, следует принять во внимание, что для классической жидкости на высоких частотах дискретный спектр становится квазинепрерывным в силу вязкого уширения резонансных пиков. В жидком водороде и, особенно, в гелии коэффициент кинематической вязкости в 10 и 100 раз, соответственно, меньше, чем в воде. Поэтому условия дискретности могут играть существенную роль в переносе энергии по каскаду [10] при монохроматическом возбуждении. В нашей работе [11] были представлены результаты, полученные на поверхности сверхтекучего гелия при гармонической накачке, когда дискретность является существенной, – дискретная турбулентность. В то же время для случая широкополосной накачки поверхности жидкого водорода и гелия реализована ситуация кинетической турбулентности, которая наиболее близка к модельной системе, развитой в теории [1]. Особенности взаимодействия волн из диссипативного интервала и между собой могут отразиться и на форме турбулентного распределения вблизи края инерционного интервала. Как показано в [6], если диссипация энергии на высоких частотах не обеспечивает сброса энергии из турбулентного каскада, то это может приводить к отклонению распределения в инерционном интервале от степенного закона. В наших предыдущих экспериментах [12] мы показали, что использование жидкого гелия и водорода в исследованиях турбулентности имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными средами благодаря малой величине их плотности и низкой кинематической вязкости.

2. Экспериментальная методика. Значительный прогресс в исследовании капиллярной турбулентности в последние годы связан со стремительным развитием экспериментальной техники и компьютерных методов обработки быстро меняющихся сигналов. В выполненных исследованиях была использована методика [13], основанная на измерении изменений мощности лазерного луча, отражающегося от колеблющейся поверхности жидкости. Схема измерений приведена на рис. 1. Измерения проводились на оптических ячейках, расположенных в вакуумной полости гелиевого криостата. Внутри ячеек был установлен плоский горизонтальный конденсатор. Газообразный водород (или гелий) конденсировался в цилиндрический медный стакан. Диаметр стакана составлял 60 мм в экспериментах с водородом и 30 мм в экспериментах с гелием. Высота стакана была в пределах 4–6 мм. Над стаканом на расстоянии 3.5 мм размещалась верхняя горизонтальная металлическая обкладка. Набор жидкости производился до тех пор, пока поверхность жидкости не достигала края стакана. Температура измерений составляла $T = 15.5$ K в опытах с водородом и 1.7 K в опытах с гелием. На нижней обкладке конденсатора располагалась радиоактивная мишень, которая излучала β-электроны со средней энергией 5 кэВ. Под действием излучения вблизи поверхности мишени образовывался ионизированный слой жидкости. Приложенное к обкладкам электрическое напряжение величиной около 1000 В извлекало из ионизированного слоя положительные ионы и поджимало их к поверхности жидкости. Таким образом, заряженная поверхность жидкости и верхняя металлическая пластина образовывали плоский конденсатор. Волны на заряженной поверхности жидкости возбуждались переменным электрическим полем при подаче на металлический стакан переменного напряжения амплитудой 1–100 В в дополнение к постоянному. Накачка осуществлялась гармонической силой на частотах, близких к резонансным частотам цилиндрической ячейки, или широкополосным шумом. Шумовой сигнал накачки синтезировался обратным фурье-преобразованием по заданному спектру мощности и случайному набору фаз. Использование электрического поля для возбуждения поверхности жидкости имеет ряд достоинств, так как позволяет воздействовать только на поверхность, контролируемым образом изменять симметрию воздействия, изменять спектральную характеристику возбуждающей силы. Изменение мощности в отраженном лазерном луче регистрировалось полупроводниковым приемником Hamamatsu s3590-08. Переменное напряжение с фотоприемника $P(t)$, пропорциональное мощности отраженного луча, усиливалось SR570 усилителем и записывалось в память компьютера на частоте опроса до 102.4 кГц с помощью скоростного 24-битного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) Leonardo-II. Время записи сигнала $P(t)$ изменялось в пределах от 3 до 100 с. Зависимости $P(t)$ обрабатывались программой быстрого фурье-преобразования (FFT). В результате этой процедуры получали распределение квадрата амплитуд гармоник по частоте P_ω^2, которое, как показано в [13], для широкого луча пропорционально парной корреляционной функции отклонений поверхности от равновесия: $I_\omega \sim P_\omega^2$.

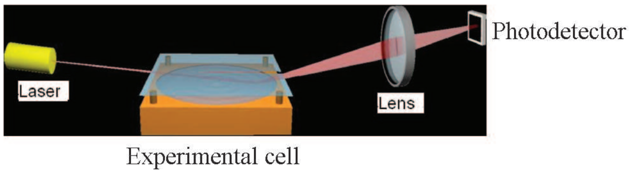

Рис. 1. Принципиальная схема регистрации волн на поверхности жидкого гелия и водорода

3. Экспериментальные результаты. *3.1. Два различных режима затухания турбулентного каскада в диссипативной области частот.* На рис. 2 в двойном логарифмическом масштабе представлен спектр капиллярных волн на поверхности сверхтекучего гелия-4 при температуре $T = 1.7$ K. Поверхность возбуждалась гармонической (синусоидальной) силой на одной из резонансных частот ячейки ($f_p \approx$ ≈ 80 Гц), $f = \omega/2\pi$, где ω – угловая частота. Амплитуда переменного напряжения накачки составляла 11 В. Видно, что турбулентное распределение состоит из набора эквидистантных гармоник. Первая гармоника расположена на частоте f_p. Она соответствует вынужденным колебаниям под действием внешней синусоидальной силы. Остальные гармоники формируются в результате трехволновых процессов нелинейного взаимодействия на частотах, кратных частоте накачки f_p. В диапазоне частот от 800 Гц до 4 кГц отчетливо наблюдается инерционный интервал, в котором турбулентное распределение описывает-

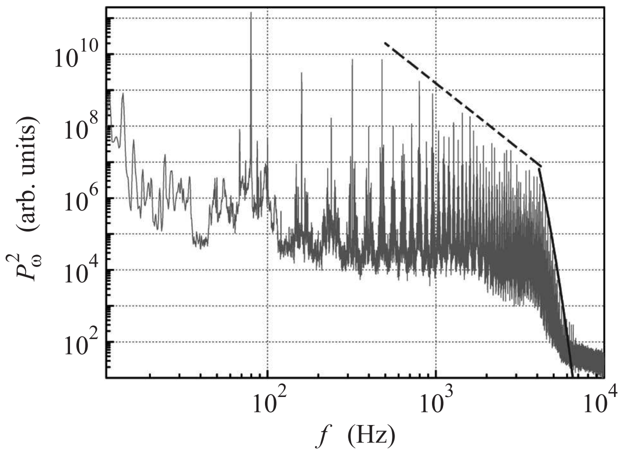

Рис. 2. Турбулентный спектр капиллярных волн P_ω^2 на поверхности He-II в случае гармонической накачки на частоте $f_p \approx 80$ Гц переменным напряжением с амплитудой 11 В. Штриховая линия соответствует степенному закону $P_\omega^2 \sim \omega^{-3.7}$. Высокочастотный край инерционного интервала f_b расположен на частоте около 4 кГц. Сплошная линия представляет экспоненциальную функцию $P_\omega^2 \sim \exp(-f/f_d)$ с характерной частотой $f_d \approx 170$ Гц (частота f_d близка к частоте накачки f_p)

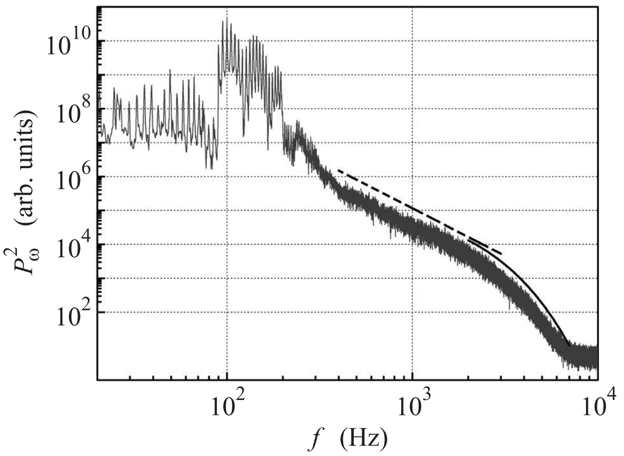

Рис. 3. Турбулентный спектр капиллярных волн P_ω^2 на поверхности He-II в случае широкополосной накачки в полосе частот $90 - -200$ Гц. Штриховая линия соответствует степенному закону $P_\omega^2 \sim \omega^{-2.8}$. Высокочастотная граница инерционного интервала f_b находится приблизительно на частоте 2 кГц. Сплошная линия соответствует экспоненциальной функции $P_\omega^2 \sim \sim \exp(-f/f_d)$, с характерной частотой $f_d \approx 700$ Гц. В соответствии с теорией значение f_d близко к граничной частоте f_b

ся степенной функцией: $P_\omega^2 \sim \omega^{-3.7}$. Значение показателя степени, равное -3.7, находится в согласии с теоретическими предсказаниями для капиллярной турбулентности в случае узкополосной накачки [3]. На частотах выше 4 кГц турбулентное распределение быстро спадает под влиянием вязкостной диссипации и выходит на уровень аппаратного шума. Очевидно, что частоту $f_b \approx 4$ кГц можно интерпретировать как положение высокочастотной границы инерционного интервала. В диссипативной области (на частотах выше f_b) турбулентное распределение может быть описано экспоненциальной функцией $P_\omega^2 \sim \exp(-f/f_d)$ с характерной частотой $f_d \approx 170$ Гц. Таким образом, значение f_d оказалось близким к частоте накачки f_p. Более того, было обнаружено, что частоты f_d и f_p близки в экспериментах с разными частотой и амплитудой накачки. Стоит отметить, что в теоретической работе [6] было показано, что в случае широкополосной накачки характерная частота f_d должна принимать значение, близкое к граничной частоте f_b. Действительно, когда волны на поверхности возбуждались шумовой накачкой, турбулентное распределение имело качественно другую форму. На рис. 3 показан спектр, полученный при накачке поверхности шумовой силой в диапазоне частот 90–200 Гц. Видно, что спектр имеет гладкую форму, а инерционный интервал, на котором спектр описывается степенным законом Колмогорова–Захарова: $P_\omega^2 \sim \omega^{-2.8}$, в согласии с предсказаниями теории [14], является довольно коротким (от $\approx$400 Гц до $f_b \approx$2 кГц). В диссипативной области волновое распределение может быть описано экспонентой $\exp(-f/f_d)$ с частотой $f_d = 700$ Гц. Важно, что значение f_d значительно выше частот накачки и довольно близко к значению граничной частоты спектра Колмогорова–Захарова f_b (это качественное соотношение между f_d и f_b в случае широкополосной накачки не зависит от амплитуды накачки).

Таким образом, мы обнаружили два различных режима затухания волновой турбулентности в диссипативной области частот: в случае гармонической накачки характерная частота f_d экспоненциального затухания значительно меньше граничной частоты f_b и близка к значению частоты накачки f_p, а в случае широкополосной накачки f_d близка к граничной частоте f_b.

Стоит отметить, что наличие двух различных режимов затухания турбулентного каскада не связано со спецификой сверхтекучего гелия-4, так как качественно схожие результаты были получены в экспериментах с нормальным гелием-4 и с жидким водородом. На рис. 4 представлен спектр капиллярных волн на поверхности жидкого водорода при интенсивной гармонической накачке на частоте ≈ 120 Гц. Ха-

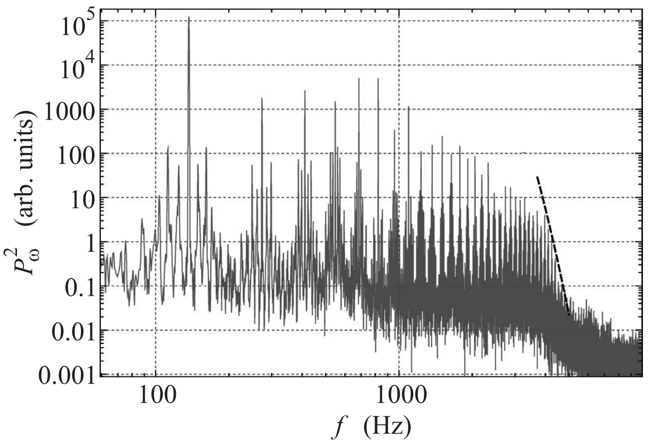

Рис. 4. Турбулентный спектр капиллярных волн на поверхности жидкого водорода при гармонической накачке на частоте ≈ 120 Гц. Высокочастотный край инерционного интервала f_b расположен на частоте ≈ 4 кГц. Линия соответствует экспоненциальной функции $P^2_\omega \sim \sim \exp(-f/f_d)$ с характерной частотой $f_d = 180$ Гц

рактерная частота f_d экспоненциального затухания турбулентного распределения в диссипативной области много меньше высокочастотной границы инерционного интервала и близка к области частот накачки. Другой режим затухания представлен на рис. 5, где показаны спектры капиллярных волн на поверхности жидкого водорода при накачке шумовой силой различной амплитуды в полосе частот 39–103 Гц. В низкочастотном диапазоне хорошо видна область частот накачки. За областью накачки следует инерционный интервал – относительно широкая частотная область, в которой спектр P^2_ω подчиняется степенному закону Колмогорова–Захарова. Ширина инерционного интервала зависит от амплитуды накачки. Когда поверхность возбуждается слабой силой при $V_p = 4$ В, диссипация начинается сразу после области накачки и инерционного интервала не наблюдается. Увеличение амплитуды накачивающей силы приводит к уширению инерционного интервала. При этом высокочастотная граница $\omega_b/2\pi$ инерционного интервала сдвигается в сторону высоких частот. Наиболее широкий инерционный интервал (от ≈ 0.3 кГц до $\omega_b/2\pi \approx 4$ кГц) наблюдается при максимальном напряжении накачки ($V_p = 30$ В). На частотах выше высокочастотной границы инерционного интервала поверхностные колебания затухают в силу вязких потерь и спектр P^2_ω плавно выходит на уровень аппаратного шума. Если перестроить турбулентные спектры в полулогарифмическом масштабе (рис. 6), то отчетливо видно, что спад амплитуд волн на частотах выше высокочастотной границы инерционного интервала может быть в некотором интервале достаточно хорошо описан экспоненциальным затуханием $P^2_\omega \sim e^{-\omega/\omega_d}$. Например, спектр волн, полученный в экспериментах с амплитудой накачки $V_p = 26$ В, может быть аппроксимирован в диапазоне 5–9 кГц экспоненциальной функцией $e^{-\omega/\omega_d}$ с $\omega_d/2\pi \approx 0.6$ кГц. Заметим, что частота $\omega_d/2\pi$ в несколько раз мень-

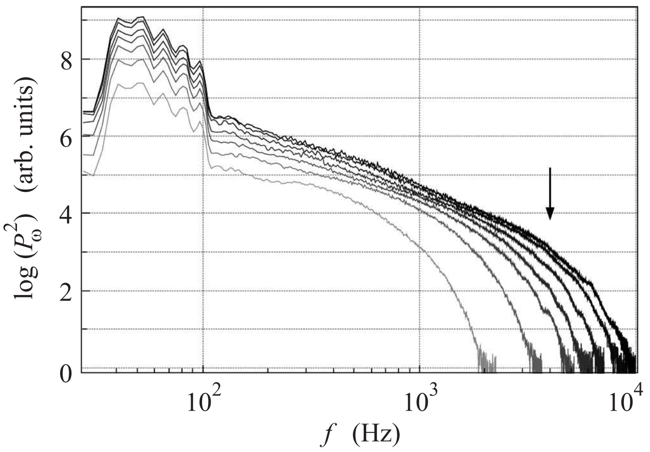

Рис. 5. Спектр поверхностных колебаний P^2_ω жидкого водорода, возбужденных случайной силой в частотном диапазоне 39–103 Гц при различных амплитудах накачки. Среднеквадратичное значение напряжения накачки V_p изменялось от 4 до 30 В. Более темные линии соответствуют более интенсивной накачке. Стрелка указывает высокочастотную границу инерционного интервала $\omega_b/2\pi \approx 4$ кГц при напряжении накачки $V_p = 30$ В

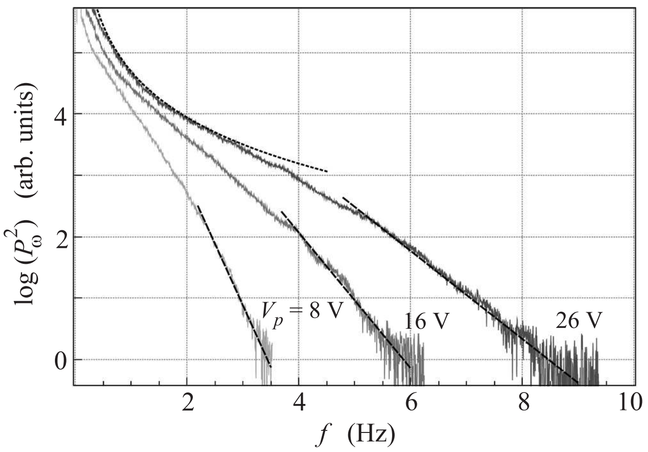

Рис. 6. Спектры P^2_ω при напряжениях накачки $V_p = 8$, 16 и 26 В, представленные в полулогарифмическом масштабе (они представлены также на рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе). Точечная линия – степенное распределение $\sim \omega^{-2.8}$, штриховая – аппроксимация функциями $\sim e^{-\omega/\omega_d}$. Величина $\omega_d/2\pi \approx 0.2$, 0.4 и 0.6 кГц для $V_p = 8$, 16 и 26 В соответственно

ше частоты видимой границы между инерционным интервалом и диссипативной областью (см. рис. 5). Однако такое несоответствие может быть приписано некоторому произволу в определении граничной частоты, которая на самом деле имеет смысл характерной частоты и может содержать некоторый постоянный нормировочный множитель в зависимости от выбранной процедуры нахождения границы инерционного интервала. Это предположение подтверждается тем фактом, что зависимости ω_d и ω_b от амплитуды накачки идентичны (см. рис. 7). (Интересно, что показатель степенной зависимости ω_b от амплитуды накачки плохо согласуется с предсказаниями теории волновой турбулентности, см. [15].) Таким образом, можно сделать вывод о том, что в случае широкополосной накачки значение ω_d соответствует высокочастотной границе инерционного интервала. Экспериментальные результаты подтверждают теоретическое рассмотрение [6] об определяющей роли локального взаимодействия волн в диссипативной области для широкополосной накачки. Характерная частота квазипланковского распределения возрастает с повышением уровня накачки по закону, отличному от теоретически предсказанной зависимости. К сожалению, в эксперименте не хватает точности измерений для того, чтобы оценить величину показателя степени s в (5).

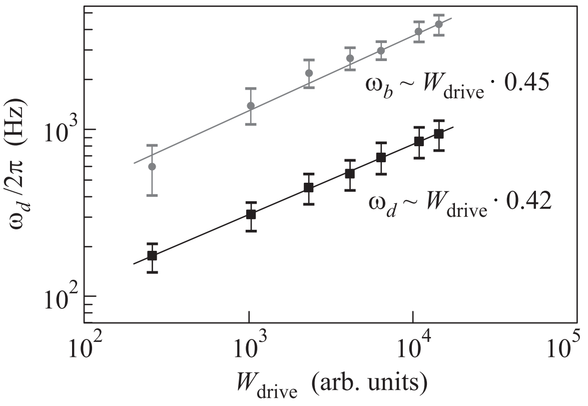

Рис. 7. Зависимости граничной частоты инерционного интервала ω_b и характерной частоты экспоненциального затухания в диссипативной области ω_d от амплитуды возбуждающей силы в случае широкополосной накачки (эксперименты с жидким водородом)

Итак, как и в экспериментах на поверхности сверхтекучего гелия-4, в экспериментах на поверхности жидкого водорода в случае гармонической накачки характерная частота $f_d = \omega_d/2\pi$ экспоненциального затухания близка к значению частоты накачки f_p, а в случае широкополосной накачки – к высокочастотной граничной частоте $f_b = \omega_b/2\pi$. Мы полагаем, что полученные результаты в случае гармонической накачки могут быть объяснены нелокальностью 3-волнового нелинейного взаимодействия волн в диссипативной области. Рассмотрим область частот вблизи высокочастотной границы инерционного интервала f_b, где происходит переход от нелинейного переноса волновой энергии к вязкостной диссипации. Хотя основным процессом уже становится вязкое затухание с характерным временем $\tau_\nu = (2\nu k^2)^{-1} \sim \omega^{-4/3}$, между волнами все еще происходит некоторое нелинейное взаимодействие. Более того, учтем, что кроме локальных процессов взаимодействия с волнами из высокочастотной области инерционного интервала, волны из переходной области вблизи f_b могут взаимодействовать нелокально с волнами из всего инерционного интервала. Действительно, характерное время локального нелинейного взаимодействия внутри инерционного интервала (трехволновые процессы с близкими волновыми векторами, $k_1 \approx k_2 \approx k_3$) в случае гармонической накачки имеет вид $\tau_{nl}^{\text{harm}} \approx \omega^{1/6}$, а в случае широкополосной – вид $\tau_{nl}^{\text{broad}} \approx \omega^{-1/2}$ [16]. Будем полагать, что и в диссипативной области вблизи высокочастотной границы инерционного интервала f_b времена локального нелинейного взаимодействия имеют такой же вид. В то же время характерное время взаимодействия волн с сильно отличающимися волновыми векторами (нелокальное взаимодействие, $k_1 \ll k_2$, $k_2 \approx k_3$) выражается как $\tau_{nl}^{\text{nonloc}} \sim k^{-1/2} \sim \omega^{-1/3}$ [6]. Таким образом, в случае гармонической накачки на высоких частотах (выше f_b) может выполняться условие $\tau_{nl}^{\text{nonloc}} < \tau_{nl}^{\text{harm}}$ (см. рис. 8). Поэтому доминантным

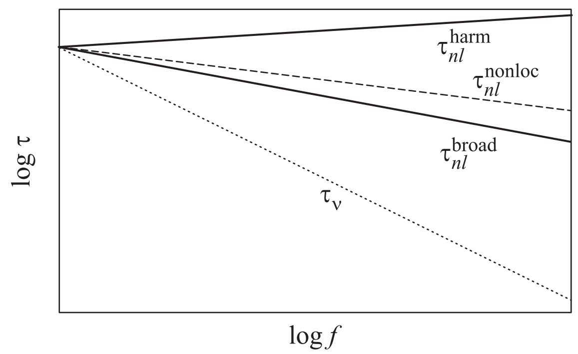

Рис. 8. Схематичное изображение частотных зависимостей характерных времен волновых процессов в диссипативной области: время вязкого затухания $\tau_\nu \sim \omega^{-4/3}$, время локального взаимодействия в случае гармонической накачки $\tau_{nl}^{\text{harm}} \sim \omega^{1/6}$ и в случае широкополосной накачки $\tau_{nl}^{\text{broad}} \sim \omega^{-1/2}$, время нелокального взаимодействия $\tau_{nl}^{\text{nonloc}} \sim \omega^{-1/3}$

нелинейным взаимодействием волн в диссипативной области может являться нелокальное взаимодействие с волнами из инерционного интервала (это, конечно, совсем не означает, что нарушается локальность внутри самого инерционного интервала). Поскольку волновая энергия сконцентрирована на низких частотах в области накачки, нелокальное взаимодействие волн из диссипативной области с волнами из низкочастотной части инерционного интервала определяет экспоненциальное затухание волнового спектра с характерной частотой, близкой к частоте накачки.

3.2. Накопление волновой энергии вблизи высокочастотного края инерционного интервала. В ряде экспериментов на поверхности He-II при умеренных амплитудах гармонической накачки в спектрах капиллярных волн была обнаружена особенность в области высоких частот. Так, например, когда в случае гармонической накачки на частоте 80 Гц амплитуда напряжения накачки была изменена с 11 (см. рис. 2) до 10 В, форма турбулентного спектра заметно изменилась (рис. 9). В согласии с предыдущими

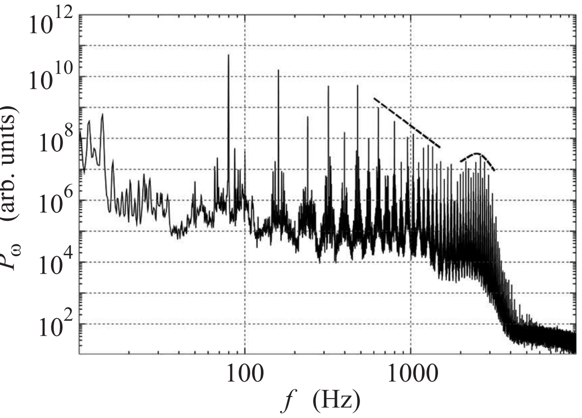

Рис. 9. Турбулентный спектр капиллярных волн на поверхности He-II при умеренных амплитудах гармонической накачки. Частота накачки 80 Гц, амплитуда напряжения накачки 10 В. На частотах около 2.5 кГц наблюдается локальный максимум (отмечен штриховой линией). Штриховая прямая линия соответствует $P_\omega^2 \sim \omega^{-3.7}$

работами [17, 18] высокочастотный край турбулентного каскада сдвинулся в сторону низких частот. Однако, как видно из рис. 9, вблизи высокочастотного края инерционного интервала наблюдалось отклонение от степенного спектра: вблизи частоты ω_b сформировался локальный максимум (показано штриховой линией). При дальнейшем уменьшении амплитуды накачки положение локального максимума сдвигалось в сторону низких частот. Наконец, при очень низких амплитудах накачки спектр состоял лишь из нескольких гармоник и локального максимума не наблюдалось.

Как уже говорилось ранее, формирование локального максимума наблюдалось в ряде экспериментов с гармонической накачкой на определенных частотах. Распределение частот накачки, при которых возможно возникновение локального максимума, различно в разных сериях экспериментов и, по-видимому, очень сильно зависит от рабочих параметров системы, таких, как температура He-II и уровень He-II в экспериментальной ячейке. Общей чертой всех данных экспериментов являлось то, что локальный максимум формировался вблизи высокочастотного края турбулентного распределения, однако форма локального максимума и его точное положение зависели и от частоты, и от амплитуды накачки. Например, когда поверхность возбуждалась синусоидальной силой на частоте 34 Гц, был получен спектр с отчетливым локальным максимумом (рис. 10). Однако локальный

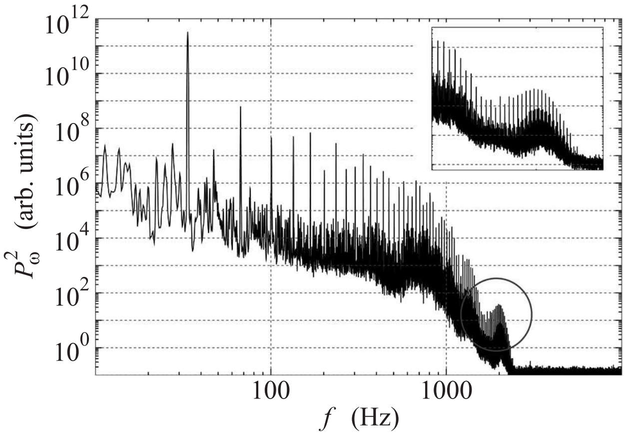

Рис. 10. Турбулентный спектр в случае накачки на частоте $\omega_{\rm pump}/2\pi = 34$ Гц. Отчетливо прослеживается формирование локального максимума в спектре (на основном графике он выделен окружностью, на вставке приведен в увеличенном масштабе)

максимум находился в диссипативной области турбулентного распределения, а не в инерционном интервале, как это показано на рис. 9.

Стоит отметить, что в экспериментах с шумовой накачкой локального максимума не наблюдалось. Так, например, на рис. 11 представлено турбулентное распределение волн, полученное в экспериментах, в которых поверхность возбуждалась шумовым сигналом в диапазоне частот 60–130 Гц. Амплитуда накачки была подобрана таким образом, что высокочастотный край инерционного интервала находился приблизительно на тех же частотах, что и в экспериментах, представленных на рис. 9 и 10.

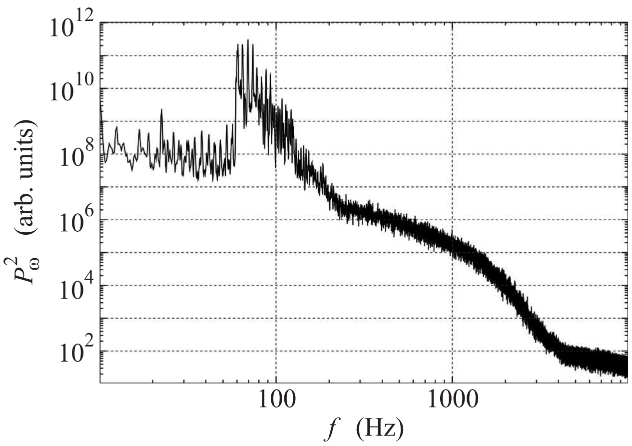

Рис. 11. Турбулентный спектр капиллярных волн в случае шумовой накачки 60–130 Гц

Формирование локального максимума можно интерпретировать как накопление волновой энергии вблизи высокочастотного края турбулентного каскада, где происходит переход от нелинейного переноса волновой энергии к вязкостной диссипации энергии. В теоретической работе [6] показано, что накопление энергии может возникнуть при наличии в системе вязкостной диссипации, которая приводит к ограниченности инерционного интервала благодаря эффекту "узкого горла". Однако наблюдаемую в наших экспериментах зависимость формирования локального максимума от амплитуды накачки объяснить влиянием вязкостной диссипации не удалось. С другой стороны, как было показано Е. А. Карташовой [7, 8], в сосудах конечных размеров могут наблюдаться определенные особенности в процессах нелинейного взаимодействия поверхностных волн из-за дискретности пространства волновых чисел. Теория дискретной волновой турбулентности была позже значительно развита в ряде теоретических работ. Так, в частности, в работе [9] была предложена модель "замороженной" волновой турбулентности. Из этой модели следует, что при малых амплитудах накачки дискретность пространства волновых чисел может приводить к появлению осцилляций на турбулентном спектре. Можно полагать, что формирование локального максимума также определяется дискретностью k-пространства. Однако в упомянутой выше работе [9] рассматривался только случай волн на поверхности с квадратной границей, когда пространство волновых векторов является двумерным. В наших же экспериментах граничные условия являются цилиндрическими: поверхностные колебания описываются функциями Бесселя, а пространство волновых чисел одномерно. Поскольку плотность резонансов в k-пространстве сильно зависит от граничной геометрии [8], мы провели некоторые качественные оценки, чтобы понять роль дискретности в наших экспериментах в цилиндрической геометрии. Результаты этих оценок приведены ниже.

Мы полагаем, что формирование локального максимума вызвано дискретностью системы, а именно расстройкой частот гармоник (изображенных на рис. 2, 9 и 10) и резонансных частот экспериментальной ячейки. Действительно, в случае поверхностных волн в цилиндрическом резонаторе диаметра D собственными волновыми векторами являются корни уравнения $J_1(kD/2) = 0$, где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка. Используя асимптотическую форму функции Бесселя: $J_1(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)}\cos(x - 3\pi/4)$ при $x \to \infty$, можно получить, что в области высоких k резонансные волновые числа принимают эквидистантные значения с шагом $\Delta k \approx 2\pi/D$. Однако в силу дисперсионного соотношения расстояние между двумя ближайшими резонансными частотами увеличивается с ростом частоты как

$$\Delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k}\Delta k \approx \frac{\partial\omega}{\partial k}\frac{2\pi}{D} = \frac{3\pi}{D}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/3}\omega^{1/3}. \quad (7)$$

Таким образом, в случае капиллярных волн резонансные частоты не эквидистантны. Напротив, частоты нелинейных гармоник кратны частоте накачки ω_{pump}. Поэтому, несмотря на то что в наших экспериментах $\Delta\omega < \omega_{\mathrm{pump}}$, множества значений резонансных частот и частот нелинейных гармоник перекрываются незначительно (другими словами, всегда есть частотная расстройка).

Очевидно, что данная расстройка важна только на тех частотах, где уширение резонанса $\delta\omega$ меньше расстояния $\Delta\omega$ между двумя ближайшими резонансами (рис. 12):

$$\delta\omega/\Delta\omega < 1. \quad (8)$$

Резонансное уширение $\delta\omega$ может быть представлено в виде суммы вязкостного уширения $\delta\omega_\nu$ и нелинейного уширения $\delta\omega_{nl}$:

$$\delta\omega = \delta\omega_\nu + \delta\omega_{nl}. \quad (9)$$

Вязкое уширение резонанса соответствует вязкому затуханию [19]:

$$\delta\omega_\nu = 4\nu k_\omega^2 = 4\nu\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3}\omega^{4/3}, \quad (10)$$

и связано с характерным временем вязкой диссипации τ_ν как $\delta\omega_\nu = \tau_\nu^{-1}$. Нелинейное уширение резонанса соответствует нелинейному переносу волновой

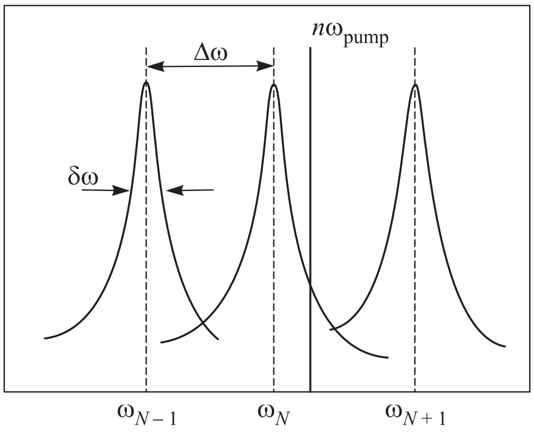

Рис. 12. Иллюстрация возможности сильного подавления некоторых гармоник в случае, когда уширение резонанса $\delta\omega$ меньше расстояния между двумя ближайшими резонансами $\Delta\omega$, если эти гармоники находятся вдали от ближайших резонансных частот колебаний поверхности в экспериментальной ячейке

энергии в инерционном интервале с данной частоты на другие и определяется характерным временем нелинейного взаимодействия τ_{nl} как $\delta\omega_{nl} = \tau_{nl}^{-1}$. Для случая гармонической накачки характерное нелинейное время зависит от частоты как $\tau_{nl} \sim \omega^{1/6}$ [16] и, следовательно, $\delta\omega_{nl} \sim \omega^{-1/6}$. Поскольку можно предположить, что с увеличением амплитуды накачки A нелинейность также должна возрастать, окончательно можно представить нелинейное уширение в следующем виде:

$$\delta\omega_{nl} \approx \epsilon(A)\omega^{-1/6}, \qquad (11)$$

где $\epsilon(A)$ – возрастающая функция амплитуды накачки A.

После подстановки (7), (9)–(11) в (8) можно получить, что расстройка важна на тех частотах, на которых выполняется условие

$$\frac{4\nu(\rho/\sigma)^{2/3}\omega^{4/3} + \epsilon(A)\omega^{-1/6}}{(3\pi/D)(\sigma/\rho)^{1/3}\omega^{1/3}} < 1. \qquad (12)$$

На высокочастотном краю инерционного интервала ω_b, где наблюдается затухание турбулентного каскада, происходит переход от нелинейного переноса энергии к вязкой диссипации. Следовательно, на данной частоте "вязкое" время принимает значение, близкое к значению "нелинейного" времени: $\tau_\nu(\omega_b) \approx \approx \tau_{nl}(\omega_b)$. Таким образом, хотя функция $\epsilon(A)$ и неизвестна, ее значение при данной амплитуде накачки в данном эксперименте может быть оценено из условия равенства нелинейного уширения $\delta\omega_{nl} = \tau_{nl}^{-1}$ и вязкого уширения $\delta\omega_\nu = \tau_\nu^{-1}$ на частоте ω_b:

$$\delta\omega_\nu(\omega_b) \approx \delta\omega_{nl}(\omega_b). \qquad (13)$$

Из наших оценок следует, что в наших экспериментах условие (12) выполняется при умеренных амплитудах накачки в частотной области вблизи высокочастотного края инерционного интервала ω_b (как выше, так и ниже ω_b; рис. 13). В этой частотной

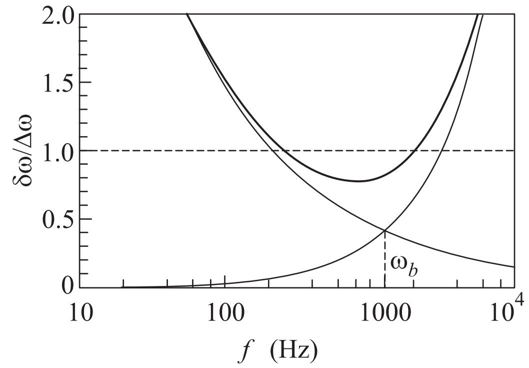

Рис. 13. Результаты оценки относительного уширения $\delta\omega/\Delta\omega$. Монотонно возрастающая тонкая линия соответствует вязкому относительному уширению $\delta\omega_\nu/\Delta\omega$, монотонно убывающая – нелинейному относительному уширению $\delta\omega_{nl}/\Delta\omega$. Толстая линия с минимумом – суммарное относительное уширение $\delta\omega/\Delta\omega$

области расстройка частот гармоник и резонансных частот играет важную роль и именно она определяет образование локального максимума в турбулентном распределении P_ω^2. Из приведенных оценок также можно сделать вывод о том, что для наблюдения волновой энергии на поверхности произвольной жидкости волновая система должна обладать следующими свойствами: малое вязкое уширение (малая вязкость жидкости), малое нелинейное уширение (гармоническая накачка умеренной амплитуды) и относительно большое расстояние между резонансными частотами (относительно малый размер ячейки). В наших экспериментах эти условия выполняются. Именно использование сверхтекучего ^{4}He, вязкость которого чрезвычайно мала по сравнению с классическими жидкостями, позволило обнаружить накопление волновой энергии в турбулентном каскаде.

Приведенные выше оценки и выводы носят лишь качественный характер. Очевидно, требуются дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования, чтобы детально объяснить механизм формирования локального максимума. Так, например, относительно недавно нами были впервые проведены эксперименты по изучению турбулентности капиллярных волн на поверхности сверхтекучего гелия-4 в квадратной ячейке $42 \times 42\,\text{мм}^2$. На рис. 14 и 15 представлены турбулентные спектры в случае гармонической накачки на частоте ≈ 90 Гц при различных амплитудах накачки. Видно, что, как и в случае

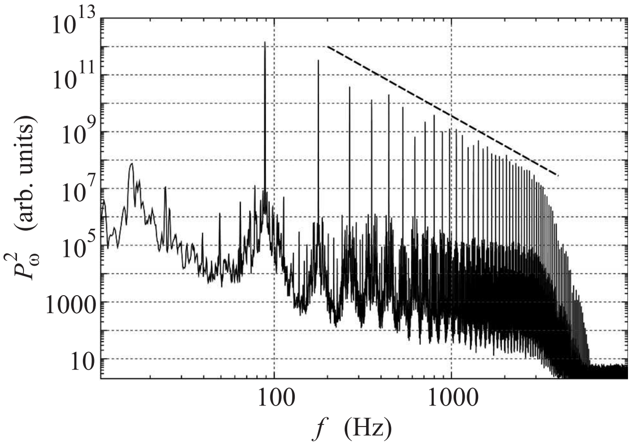

Рис. 14. Турбулентный спектр капиллярных волн P^2_ω на поверхности He-II в квадратной ячейке при интенсивной гармонической накачке на частоте $f_p \approx 90$ Гц. В инерционном интервале спектр описывается степенным законом (прямая линия)

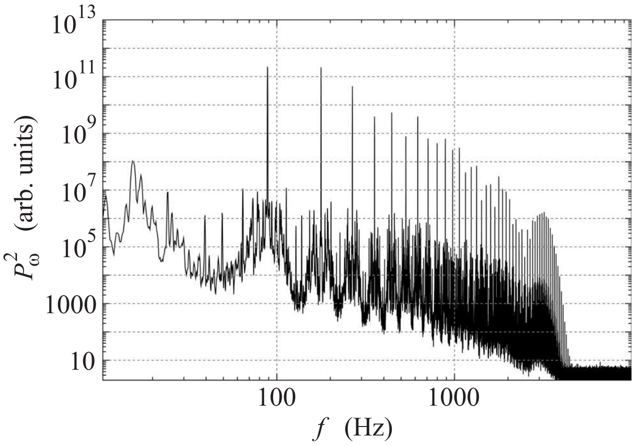

Рис. 15. Турбулентный спектр капиллярных волн P^2_ω на поверхности He-II в квадратной ячейке при гармонической накачке умеренной амплитуды на частоте $f_p \approx 90$ Гц. Вблизи высокочастотного края инерционного интервала наблюдается формирование локального максимума

цилиндрической ячейки, при понижении амплитуды накачки вблизи высокочастотного края инерционного интервала возникает локальный максимум. Однако представленная выше модель для цилиндрической геометрии описывает волновые процессы в одномерном k-пространстве волновых чисел и, строго говоря, не может быть применима для квадратной ячейки, так как в последнем случае волны характеризуются двумерным k-пространством волновых векторов.

4. Заключение. Таким образом, экспериментально показано, что затухание турбулентного каскада в диссипативной области происходит по экспоненциальному закону. Характерная частота затухания определяется взаимодействием волн из диссипативного интервала друг с другом или с волнами из инерционного интервала в зависимости от спектральной характеристики возбуждающей силы на низких частотах. Вблизи высокочастотного края инерционного интервала только на поверхности сверхтекучего гелия при гармонической накачке формируется дискретный режим турбулентности, обусловленный дискретностью в спектре поверхностных возбуждений и дискретностью в турбулентном каскаде. Накопление энергии в узком частотном диапазоне вблизи края инерционного интервала связано с формированием узкого горла в дискретном режиме.

Авторы благодарны Л.П. Межову-Деглину и Е.А. Кузнецову за полезные дискуссии.

1. V. E. Zakharov, V. S. Lvov, and G. E. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence*, v. 1, Springer, Berlin, 1992.
2. М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, ЖЭТФ **122**, 521 (2002).
3. G. E. Falkovich and A. B. Shafarenko, Sov. Phys. JETP **68**, 1393 (1988).
4. Л. В. Абдурахимов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **89**, 139 (2009).
5. V. M. Malkin, JETP **86**, 1263 (1984).
6. I. V. Ryzhenkova and G. E. Falkovich, JETP **98**, 1931 (1990).
7. E. A. Kartashova, Physica D **46**, 43 (1990).
8. E. A. Kartashova, Physica D **54**, 125 (1991).
9. A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, Physica D **135**, 98 (2000).
10. V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. N. Pushkarev, and A. I. Dyachenko, Письма в ЖЭТФ **82**, 544 (2005).
11. Л. В. Абдурахимов, М. Ю. Бражников, И. А. Ремизов, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **91**, 291 (2010).
12. G. V. Kolmakov, M. Yu. Brazhnikov, A. A. Levchenko et al., *Capillary Turbulence on the Surfaces of Quantum Fluids, in Progress in Low Temperature Physics*, Quantum Turbulence **163**, ISBN 978-0-08-054810-4 (2009).
13. М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, ПТЭ **6**, 31 (2002).
14. V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **4**, 37 (1967).
15. M. Yu. Brazhnikov, L. V. Abdurakhimov, S. V. Filatov, and A. A. Levchenko, JETP Letters **93**, 31 (2011).
16. G. V. Kolmakov, JETP Lett. **83**, 58 (2006).
17. L. V. Abdurakhimov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, Low Temp. Phys. **35** (2), 95 (2009).
18. M. Yu. Brazhnikov, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhov-Deglin, JETP Lett. **74**, 583 (2001).
19. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics*, v. 6, Pergamon Press, 1987.