Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 6, стр. 273 - 276 25 марта 1991 г.

ЛИНЕЙНОЕ РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО

Т.А.Аракелян, Г.К.Саввиди

Ереванский физический институт
375036, Ереван

Поступила в редакцию 18 февраля 1991 г.

Строится линейное расширение конформной группы, которое порождается дополнительными токами со спином два. Обсуждается структура и представления этих алгебр и их связь с группой $SU(\infty)$.

Конформная теория поля в двумерном пространстве позволяет с единой точки зрения описать поведение динамических систем в критической точке и вычислить их корреляционные функции и спектр аномальных размерностей [1]. Классификация локальных полей по представлениям конформной группы играет фундаментальную роль при решении "бутстрапных" уравнений, причем хорошо известно, что решения обладают более широкой симметрией, чем конформная [2] и содержат алгебру Вирасоро как подалгебру.

Вызывает интерес дальнейшее расширение динамических симметрий локальных полей и обобщение теории на пространстве более высокой размерности.

Рассмотрим алгебру токов

$$\{J_i(x), J_k(y)\} = \omega_{ik}\partial_x\delta(x-y), \tag{1}$$

где $i, k = 1, \ldots,$ ω_{ik} - постоянная симметричная матрица. Составим новую систему токов, квадратично зависящую от исходных токов (1)

$$T^a(x) = \frac{1}{2}J_i M^a_{ik} J_k + \alpha_i M^a_{ik}\partial_x J_k, \tag{2}$$

эти токи составляют замкнутую алгебру, если матрицы M симметричны.

$$\{T^a(x), T^b(y)\} = F^{ab}_d[\partial_x T^d + 2T^d\partial_x + C^d\partial^3_x]\delta(x-y), \tag{3}$$

а структурные константы F удовлетворяют системе уравнений

$$M^a_{ij}\omega_{jk}M^b_{kl} = F^{ab}_d M^d_{il}. \tag{4}$$

Классический центральный заряд в (3) равен

$$C^d_{кл} = \alpha_i M^d_{ik}\alpha_k. \tag{5}$$

Здесь количество токов T может не равняться количеству токов J. Алгебра (3), представляющая для нас основной интерес, была введена в работах [3,4].

Предположим, что алгебра токов Каца - Муди (1) задана с помощью произвольной не вырожденной симметричной матрицы ω_{ik}, и нужно найти набор матриц M, удовлетворяющий уравнению (4) вместе со структурными константами F. Естественно, что представляют интерес такие алгебры, которые не изоморфны друг другу, поэтому рассмотрим всевозможные линейные преобразования токов J и T. С помощью унитарных преобразований токов J можно привести матрицу ω к диагональному виду. Преобразованные матрицы M будут по-прежнему симметричны и удовлетворяют уравнению

$$M^a M^b = F_c^{ab} M^c \tag{6}$$

откуда видно, что они коммутируют друг с другом $[M^a, M^b] = 0$ и образуют коммутативное кольцо.

Что касается структурных констант F, то они инварианты относительно этих унитарных преобразований.

Рассмотрим теперь линейное преобразование токов $T(T^a = \Omega_b^a T^b)$, при котором константы F преобразуются уже как тензора, а матрицы M как вектора. Можно усмотреть несколько различных решений уравнения (6), не изоморфные друг другу.

1). Если матрица $\| \lambda \|$, составленная из собственных значений M $(M^a\psi = \lambda^a\psi)$, невырождена, $\det \| \lambda \| \neq 0$, тогда алгебра токов (3) эквивалентна прямой сумме алгебр Вирасоро. Действительно, рассмотрим базисные матрицы

$$e^i = \mathrm{diog}(0...1...0), \quad e^i e^j = \delta^{ij} e^j \tag{7}$$

тогда $M^a = \lambda_i^a e^i$. Последнее соотношение можно интерпретировать как преобразование токов T из одного базиса в другой с матрицей $\Omega = \| \lambda \|$. С другой стороны, в базисе (7) основная алгебра (3) равна прямой сумме алгебр Вирасоро.

2) Если матрица $\| \lambda \|$ вырождена, однако среди матриц M нет нильпотентных, т.е. таких, у которых все собственные значения равны нулю, алгебра токов (3) опять равна прямой сумме алгебр Вирасоро, правда, в меньшем количестве.

3) Если среди матриц M есть нильпотентные, тогда их невозможно выразить через базисные матрицы (7), а алгебру токов (3) - через прямую сумму алгебр Вирасоро.

Эти три случая исчерпывают неизоморфные решения уравнения (6).

Разлагая токи J и T в ряд, для коэффициентов T_n^i и L_n^a получим систему коммутационных соотношений из (1) и (3)

$$[L_n^a, L_m^b] = F_d^{ab}[(n-m)L_{n+m}^d + \frac{C^d}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}], \tag{8a}$$

$$[L_n^a, T_m^i] = -nM_{ij}^a T_{n+m}^j, \tag{8b}$$

$$[T_n^i, T_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \tag{8c}$$

где $J_i(x) = T_n^i \exp(-inx) = T_n^i Z^{-n}$, $T^a(x) = L_n^a Z^{-n}$, а соотношение (2) примет вид

$$L_n^a = \frac{1}{2} : \quad T_{n-m}^i M_{ij}^a T_m^j : \tag{9}$$

В последних выражениях опущены слагаемые, пропорциональные α. Выражение (9) есть естественное обобщение конструкции Сугавары, когда M отлична от единицы. Стандартные вычисления позволяют получить выражение для центрального заряда [5]

$$C^d_{\text{кв}} = \text{tr} M^d, \tag{10}$$

а если восстановить в (8) зависимость от α, то и для полного заряда имеем

$$C^d_{tot} = \text{tr} M^d - 24\alpha_0 M^d \alpha_0, \tag{11}$$

где используется нормировка, принятая в литературе $\alpha_i \to i\sqrt{2}\alpha^0_i$.

Расширение алгебры Вирасоро (3, 8а) нас интересует в связи с тем, что ее можно использовать для построения представлений алгебры $SU(\infty)$, возникающей в калибровочных теориях $SU(N)$ при $N \to \infty$. Действительно, структурные константы алгебры $SU(N)$ в двухиндексном базисе $J_{n_1 n_2}$ имеют вид $[J_{\bar{n}}, J_{\bar{m}}] = 2\pi/N \sin(\frac{2\pi}{N}\bar{n}\wedge\bar{m})J_{\bar{n}+\bar{m}}$ [6] и при $N \to \infty$ совпадают со структурными константами алгебр, сохраняющих площадь диффеоморфизмов тора T^2, $[L_{\bar{n}}, L_{\bar{m}}] = (\bar{n}\wedge\bar{m})L_{\bar{n}+\bar{m}}$. Последняя алгебра совпадает с подалгеброй произвольных диффеоморфизмов тора [8,9]

$$[L^1_{\bar{n}}, L^1_{\bar{m}}] = (n_1 - m_1)L^1_{\bar{n}+\bar{m}}, \qquad [L^2_{\bar{n}}, L^2_{\bar{m}}] = (n_2 - m_2)L^2_{\bar{n}+\bar{m}}$$

$$[L^1_{\bar{n}}, L^2_{\bar{m}}] = -m_1 L^2_{\bar{n}+\bar{m}} + n_2 L^1_{\bar{n}+\bar{m}} \tag{12}$$

если положить $L_{\bar{n}} = n_2 L^1_{\bar{n}} - n_1 L^2_{\bar{n}}$. Покажем, что эти аглебры можно строить с помощью основной алгебры (8а).

Пусть собственные значения матрицы M^a равны друг другу и пропорциональны корню N-ой степени из единицы $M^a = \omega^a I$, $\omega^N = 1$ тогда $F^{ab}_c = \delta_{a+b,c}$ по модулю N, так что

$$L_{na} \equiv L^a_n = \frac{1}{2}\omega^a : \; T^i_{n-m} T^i_m :, \tag{13}$$

а алгебра (8а) примет вид

$$[L_{na}, \;\; L_{mb}] = (n-m)L_{n+m,a+b} + \frac{C_{a+b}}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{14}$$

При $N \to \infty$ она воспроизводит подалгебру в (12).

Рассмотрим теперь третий случай, когда матрицы M нильпотентны. Основная алгебра (8а, 3) не изоморфна в этом случае прямой сумме алгебр Вирасоро. Используя жорданову нормальную форму матриц M, можно доказать, что нильпотентные матрицы M образуют коммутативное кольцо тогда и только тогда, когда они имеют вид

$$M^a = (1, e, e^2, \ldots e^{N-1}),$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{O} & & & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

и $e^N = e^{N+1} = \ldots\ldots = 0$. Матрице M^0 соответствует обычный тензор энергии-импульса $T(Z)$ конформной теории, а остальным матрицам соответствуют новые поля $T^a = Q^a_n Z^{-n}$ с конформным спином $S = 2$. Они определяют алгебру

$$[L_n,\ Q^a_m] = (n-m)Q^a_{n+m} + \frac{C_a}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,o},$$

$$[Q^a_n,\ Q^b_m] =$$

$$= \begin{cases} (n-m)Q^{a+b}_{n+m} + \frac{C_{a+b}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, & \text{если } 1 \le a+b \le N-1; \\ 0, & \text{если } a+b \ge N, \end{cases} \tag{16}$$

которая уже не изоморфна прямой сумме алгебр Вирасоро. Отметим, что простейшая из минимальных моделей, содержащая первичное поле со спином два, это $M(14/15)$.

Литература

1. Belavin A.A., Polykov A.M., Zamolodchicov A.B. Nucl. Phys. B, 1984, 241, 333.
2. Zamololodchikov A.B. TMF, 1985, 99, 108.
3. Balinskii A.A., Novikov S.P. Sov. Math. Dokl., 1985, 32, 228.
4. Gelfand I.M., Dorfman I.Ya. Funct. Anal. Appl., 1981, 15, 23.
5. Goddard P., Olive D. Int. Jour. Mod. Phys. A, 1986, 1, 303.
6. Farlie D., Fletcher P., Zachos C.K. Phys. Lett., B, 1989, 218, 203.
7. Arakelian T.A., Savvidy G.K. Phys. Lett., B, 214, 350.
8. Savvidy G.K. Preprint TPI-MINN-90/02-T, January, 1990.
9. Arakelian T.A. Preprint YERPHI-1244(30)-90.