Письма в ЖЭТФ, том 96, вып. 11, с. 783 – 789 © 2012 г. 10 декабря

# Статистические особенности вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности

*А. Н. Кудрявцев*[+*], *Е. А. Кузнецов*[+×○1)], *Е. В. Серещенко*[+*∇]

[+]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[*]*Институт теоретической и прикладной механики им. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[×]*Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[○]*Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия*

[∇]*Дальневосточный федеральный университет, 690091 Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 2 октября 2012 г.
После переработки 25 октября 2012 г.

Численно исследованы статистические характеристики вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса. В частности, в численных экспериментах (с разрешением вплоть до 8192×8192) наблюдался спектр турбулентности крейчнановского типа, $E_k \sim k^{-3}$. С помощью пространственной фильтрации установлено, что основной вклад в спектр вносят резкие градиенты завихренности в виде квазиударных скачков. Такого рода квазисингулярности приводят к появлению сильной угловой зависимости спектра за счет хорошо локализованных по углу джетов со слабыми и/или сильными взаимными перекрытиями. В каждом из таких джетов спектр убывает пропорционально $k^{-3}$. При этом поведение структурной функции третьего порядка с хорошей точностью соответствует картине прямого каскада Крейчнана, отвечающего постоянному потоку энстрофии. Показано, что степени $\zeta_n$ для старших структурных функций растут медленнее линейной по $n$ зависимости, что свидетельствует о перемежаемости турбулентности.

**1. Введение.** Как известно, развитая двумерная гидродинамическая турбулентность, в отличие от трехмерной, в инерционном интервале масштабов обладает дополнительным интегралом движения – энстрофией. Энстрофия представляет собой интеграл от квадрата завихренности, $\int_s \Omega^2 d\mathbf{r}$. Существование этого интеграла, как было показано в 1967 г. Крейчнаном [1], порождает в инерционной области свой колмогоровский спектр турбулентности:

$$E(k) \ \sim \ k^{-3}, \tag{1}$$

называемый теперь спектром Крейчнана. Этот спектр соответствует постоянному потоку энстрофии в область малых масштабов. Одновременно согласно [1] в области больших масштабов реализуется обычный колмогоровский спектр, $E(k) \ \sim \ k^{-5/3}$, с постоянным потоком энергии, направленным в область малых $k$ (обратный каскад). После указанной работы было выполнено множество численных экспериментов (укажем только некоторые из них: [2–9]; более полный список работ можно найти в [10]), которые свидетельствовали в пользу существования спектра Крейчнана. Вместе с тем уже в первых численных экспериментах (см., например, [2]) нередко наблюдалось появление резких (в меру великости числа Рейнольдса) градиентов завихренности. Для завихренности это соответствует появлению скачков, похожих на ударные волны, толщина которых мала по сравнению с их длиной. В результате Саффманом [11] был предложен другой спектр, отличный от распределения Крейчнана: $E(k) \ \sim \ k^{-4}$. Спектр Саффмана был получен на основе предположения о том, что главный вклад в спектр вносят распределенные изотропно скачки завихренности. С другой стороны, из простых соображений следует, что спектр за счет скачков должен иметь скорее крейчнановское поведение, нежели вид распределения Саффмана. Действительно, если рассмотреть фурье-образ $\Omega_k$ скачка завихренности $\Omega \propto \theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, то $\Omega_k \propto k^{-1}$, что немедленно приводит к спектру $E(k) \ \sim \ k^{-3}$. Однако не все так просто. Если считать, что характерная длина ступеньки $L \gg k^{-1}$, то распределение энергии от одной такой ступеньки в $k$-пространстве будет иметь вид джета с угловым раствором порядка $(kL)^{-1}$. При этом максимальное значение распределения энергии вдоль джета будет убывать $\propto k^{-3}$ [10, 12, 13]. Такая оценка, как пока-

1)e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

зано в работах [10, 12], следует из точного анализа при $kL \gg 1$.

В данной работе основное внимание отводится численному исследованию статистических характеристик прямого каскада вырождающейся двумерной турбулентности и влияния на них квазишоков завихренности. По сравнению с предыдущими работами:

(i) существенно увеличено пространственное разрешение (вплоть до $K \times K = 8192^2$ точек). Численный счет с большим разрешением подтвердил все предыдущие результаты [10, 13];

(ii) дано численное доказательство того, что спектр (1) возникает благодаря квазишокам завихренности, которые в $k$-пространстве формируют систему джетов со слабыми и сильными перекрытиями;

(iii) в каждом из этих джетов убывание $E(k)$ при больших $k$ пропорционально $k^{-3}$, что приводит после усреднения по углу к спектру (1);

(iv) тройная структурная функция $\langle(\delta\Omega)^2\delta v_\parallel\rangle$ линейно зависит от $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (где $\delta\Omega = \Omega(\mathbf{r}) - \Omega(\mathbf{r}')$, $\delta v_\parallel$ – проекция разности скоростей на вектор $\mathbf{R}$) в полном соответствии с теорией Крейчнана. Старшие структурные функции скорости имеют показатели $\zeta_n$, растущие медленнее первой степени $n$. Это свидетельствует о перемежаемости турбулентности.

**2. Основные уравнения и численная схема.** Появление резких градиентов завихренности, как уже отмечалось во Введении, наблюдалось в большом количестве численных экспериментов (см., например, [2–9]), моделирующих двумерную турбулентность при больших числах Рейнольдса (в режиме, когда в нулевом приближении можно вместо уравнения Навье–Стокса рассматривать уравнение Эйлера).

В терминах завихренности, $\Omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y$, уравнение Эйлера записывается как

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = 0 \qquad \text{при} \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

т.е. $\Omega$ является лагранжевым инвариантом. Как было показано в работах [10, 12], причина появления резких градиентов завихренности в двумерной турбулентности связана со сжимаемостью поля $\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\Omega\hat{z})$, получившего английское название *divorticity*. Этот вектор направлен по касательной к линиям уровня $\Omega(\mathbf{r}) = \text{const}$. При этом поле $\mathbf{B}$ вморожено в жидкость, т.е. подчиняется уравнению [6, 14]

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что $\mathbf{B}$ изменяется за счет нормальной к $\mathbf{B}$ компоненты скорости $\mathbf{v}_n$, которая благодаря вмороженности представляет собой скорость линий поля $\mathbf{B}$. Лагранжевы траектории, определяемые $\mathbf{v}_n$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}, \tag{4}$$

задают отображение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t). \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) допускает интегрирование [10, 12]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}, \tag{6}$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$ есть начальное значение поля $\mathbf{B}$, а $J$ – якобиан преобразования (5). В силу того что траектории (5) задаются не самой скоростью, а ее нормальной компонентой, якобиан $J$ не фиксирован. Он может принимать произвольные значения, в частности стремиться к нулю. Это означает сжимаемость поля $\mathbf{B}$. Следует отметить, что соотношение (6) является аналогом представления вихревых линий, введенного в работах [15, 16] для трехмерного уравнения Эйлера.

Как известно, появление разрывов в газодинамике связано с обращением якобиана в нуль соответствующего сжимаемого отображения – преобразования от эйлерового описания к лагранжевому. Именно уменьшение $J$ и есть причина появления резких градиентов завихренности, которое происходит благодаря сжимаемости $\mathbf{v}_n$: $\operatorname{div}\mathbf{v}_n = 0$. Однако в двумерной несжимаемой гидродинамике Эйлера образование особенности за *конечное* время невозможно [17]. Возможно же оно, по-видимому, за бесконечное время. Численные эксперименты [10, 13] показывают скорее экспоненциальный рост градиентов завихренности с характерным инкрементом порядка максимального значения завихренности, нежели рост в виде двойной экспоненты, как это следует из оценок [18]. В наших численных экспериментах с лучшим пространственным разрешением такое поведение сохраняется (см. ниже).

Кратко остановимся на численной схеме решения. Численно решалось уравнение для завихренности (2) в квадрате с периодическими граничными условиями по обеим координатам. Размер ящика выбирался равным 1. Для того чтобы исключить численную (*bottleneck*) неустойчивость и обеспечить сток энергии на малых масштабах, в правую часть (2) вводилась диссипация, которая была выбрана в виде гипервязкости:

$$(-1)^{n+1}\mu_n\nabla^{2n}\omega,\ \mu_n = 10^{-20}\left(\frac{2048}{K}\right)^{2n}, \quad n = 3.$$

Применение гипервязкости позволяет существенно сократить диапазон масштабов, на котором влияние диссипации является существенным, и, таким образом, расширить инерциальную область спектра [19]. При изменении пространственного разрешения коэффициент гипервязкости масштабировался так, чтобы величина диссипации для наиболее коротковолновых возмущений, представимых на данной разностной сетке, оставалась постоянной. Влияние гипервязкости на течение в целом всегда оставалось очень малым: в численных экспериментах полная энергия сохранялась на уровне чуть лучше 0.01%.

Уравнение (2) с гипервязкостью решалось с использованием псевдоспектрального метода Фурье [20], т.е. вычисление производных и решение уравнения Пуассона (для нахождения функции тока по завихренности) выполнялись в спектральном пространстве, а вычисление нелинейных членов производилось на конечноразностной сетке в физическом пространстве. Переход из физического пространства к спектральному и обратно осуществлялся с помощью дискретного быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для этого использовалась библиотека FFTW [21].

Введение гипервязкости приводит к появлению в уравнении жесткого члена, из-за которого шаг интегрирования по времени ограничен для любой явной схемы неприемлемо малой ($\sim 1/K^{2n}$) величиной. Чтобы избежать этого, интегрирование по времени выполнялось с помощью гибридного метода Рунге–Кутта / Кранка–Николсона третьего порядка точности [22]. Конвективный член аппроксимировался явным образом, а для диссипативного (линейного) члена использовалась неявная схема.

Вычисления проводились как на обычном многопроцессорным кластере (для чего расчетный код был распараллелен с помощью библиотеки MPI, использовалось до 128 процессоров), так и на GPU-кластере (с использованием технологии NVIDIA CUDA) в вычислительном центре Новосибирского государственного университета. Пространственное разрешение достигало 8192×8192 точек.

**3. Численные эксперименты.** Начальное условие выбиралось в виде двух наборов вихрей с положительной и отрицательной завихренностью. Все вихри имели гауссову форму с максимальным значением $|\Omega| = 1$, со случайными размерами (значениями радиусов, равномерно распределенными в некотором интервале). Центры вихрей были распределены по всей области также случайно. Общая завихренность была равна нулю. Число положительных и отрицательных вихрей совпадало. В зависимости от пространственного разрешения оно варьировалось от $N = 10$ при разрешении 2048×2048 до $N = 40$ при максимальном пространственном разрешении. Вариация начальных условий качественно не изменяла поведения вихрей и их статистических характеристик. Типичное начальное условие представлено на рис. 1.

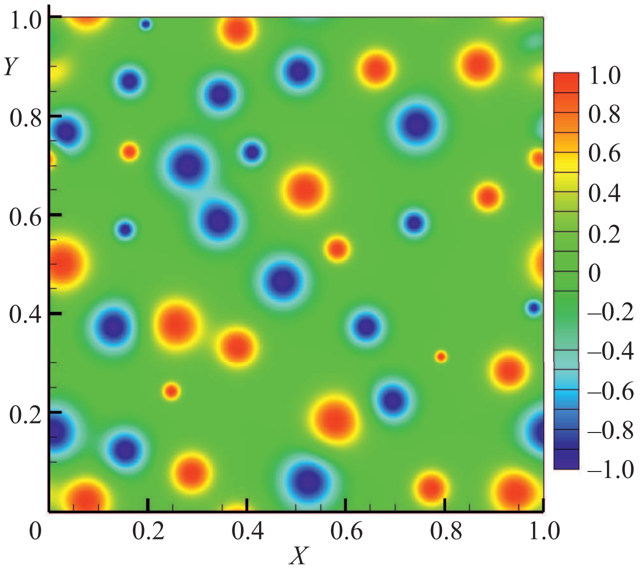


Рис. 1. Начальное распределение завихренности, $N = 20$

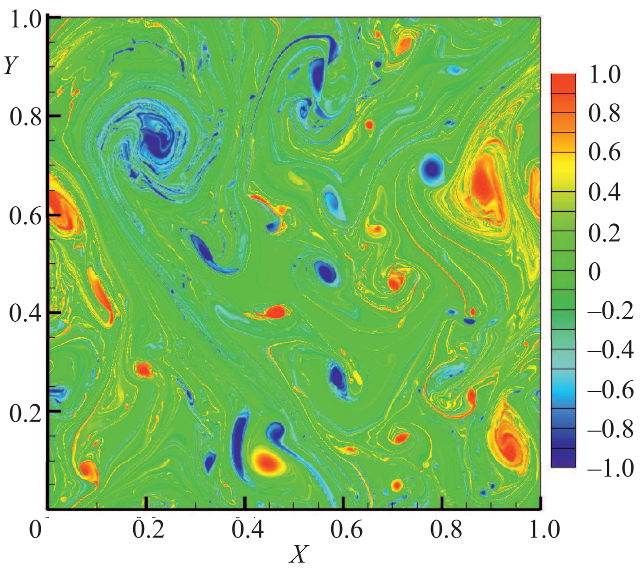


Рис. 2. Распределение завихренности при $t = 100$, $N = 20$

На рис. 2 приведено распределение завихренности при $t = 100$. Это время близко к максимальному значению $t_{\max}$, при котором счет останавливался. Время

$t = t_{\max}$ определяется из условия достижения краем спектра энергии $k_{\text{bound}}$ 2/3 от максимального значения $k_{\max}$ в ящике. При $t > t_{\max}$ возникает явление алиасинга (*aliasing*) [20], когда спектр искажается из-за неразличимости на разностной сетке гармоник, отстоящих друг от друга в спектральном пространстве на $2k_{\max}$.

Как видно из рис. 2 (разрешение $8192^2$), при $t = 100$ структура вихрей существенно изменилась благодаря взаимодействию вихрей, появлению сдвиговых течений, генерируемых вихрями, и их растяжению. На рис. 3 представлен компенсированный, усредненный по углам спектр турбулентности $k^3E(k)$ при различных временах. При временах, близких к $t_{\max}$, для компенсированного спектра происходит формирование плато, т.е. практически на двух декадах возникает спектр крейчнановского типа, $E(k) \sim k^{-3}$.

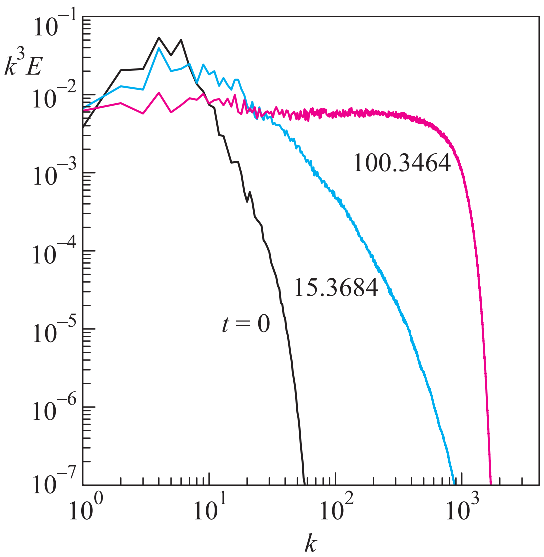


Рис. 3. Компенсированный спектр $k^3E(k)$ при различных временах для начального распределения, представленного на рис. 1

Как было отмечено ранее (см. также работы [10, 13]), появление такого типа спектра вызвано резкими градиентами завихренности. На рис. 4 представлено распределение $|\mathbf{B}| \equiv |\nabla\Omega|$ при $t = 100$, демонстрирующее значительное увеличение ($\sim 100$) начальных градиентов в окрестности линий, соответствующих положению скачков завихренности. При этом между линиями $|\mathbf{B}|$ практически не растет. При бóльших временах ($t > 100$) длина линий значительно увеличивается, плотность заполнения линиями растет и картина их распределения становится запутанной – турбулентной. На начальном этапе, на временах нескольких оборотов $n$ ($T_* = n \cdot 2\pi/\Omega_{\max}$), рост $|\mathbf{B}|$ близок к экспоненциальному. Затем наступает насыщение. Так, для рис. 5 $n \approx 4$, а усиление $|\mathbf{B}|$ оказалось порядка 300. Значительный рост градиентов завихренности и плотности линий, соответствующих положению скачков завихренности, указывает на то, что их роль в формировании спектра оказывается существенной. В работах [10, 13] этот (главный) момент не был до конца выяснен. Для численной проверки того, что спектр крейчнановского ти-

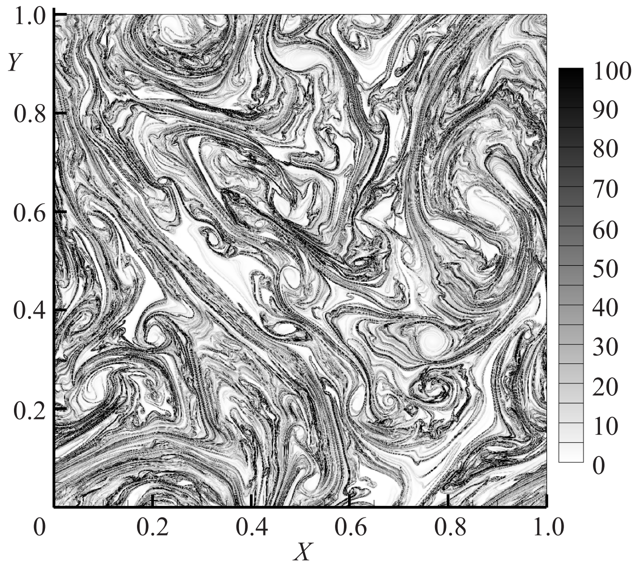


Рис. 4. Распределение $|\mathbf{B}|$ при $t = 100$ для начального распределения, представленного на рис. 1

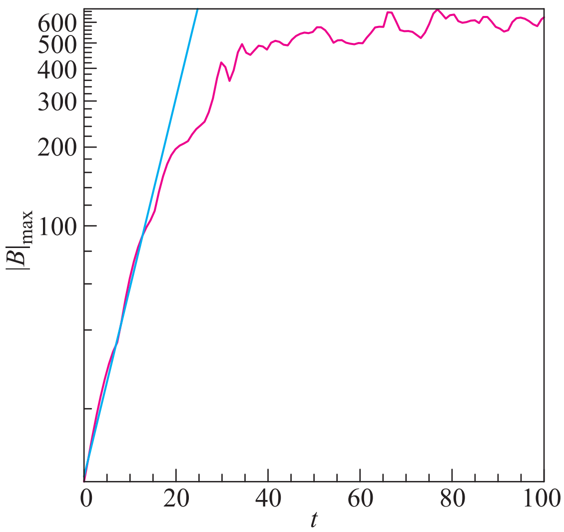


Рис. 5. Зависимость максимального значения $|\mathbf{B}|$ от времени для начального условия, представленного на рис. 1 (логарифмическая шкала, прямая линия соответствует экспоненте)

па, $E(k) \sim k^{-3}$, порождается резкими градиентами завихренности, нами была проведена пространственная фильтрация в отличие от [10, 13], где проводилась фильтрация в $k$-пространстве. В распределении поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ оставлялись только такие области, в которых $|\mathbf{B}|$ превышало некоторое пороговое значение $B_0 > 0$. В областях $|\mathbf{B}| < B_0$ поле $\mathbf{B}$ обнулялось. По "фильтрованному" полю $\widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ находилось преобразование Фурье $\widetilde{\mathbf{B}}_k$. По нему определялся фурье-образ фильтрованной скорости:

$$\mathbf{v}_k = -\frac{1}{k^4}\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{k}\times\widetilde{\mathbf{B}}_k\right]\right],$$

а затем – "отфильтрованный" спектр $\widetilde{E}(k)$. (Очевидно, что такая процедура вносит в спектр $\widetilde{E}(k)$ свой вклад от скачков $|\widetilde{\mathbf{B}}|$, которые дают степенные хвосты, убывающие по крайней мере как $k^{-4}$. Иными словами, фильтрация изменяет только длинноволновую часть спектра.) На рис. 6 представлены зависи-

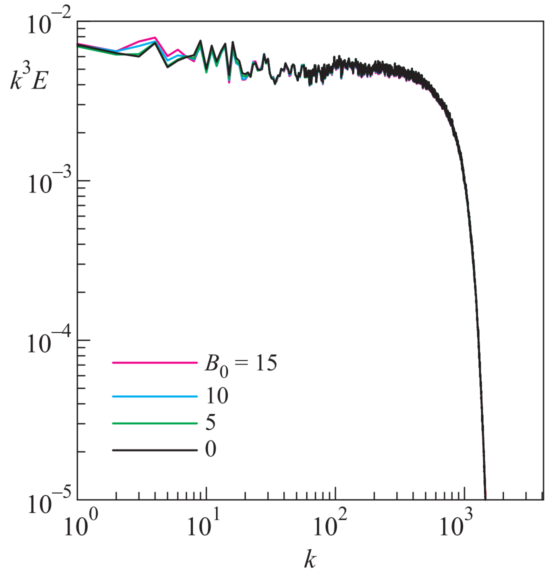


Рис. 6. Отфильтрованные компенсированные спектры $k^3\widetilde{E}(k)$ при различных значениях порога $B_0$

мости "отфильтрованных" спектров $k^3\widetilde{E}(k)$ при различных значениях порога $B_0$. В результате такой фильтрации (компенсированный) спектр $k^3\widetilde{E}(k)$ претерпевал изменения только в области малых $k$. В области больших $k$ он оставался неизменным. Это является численным следствием того, что полученные спектры крейчнановского типа возникают благодаря квази-сингулярностям завихренности. Причина появления у спектра зависимости $k^{-3}$ тесным образом связана с его угловым распределением. На рис. 7 представлено распределение двумерного спектра $\epsilon(k_x, k_y)$. Это распределение сильно изрезано по

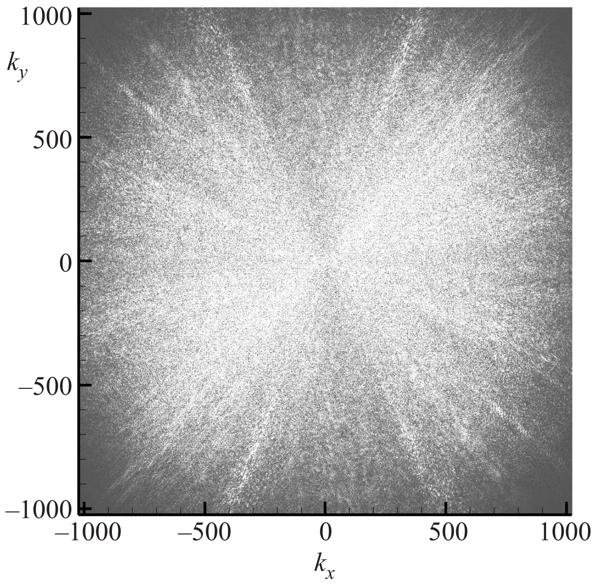


Рис. 7. Распределение двумерного спектра $k^4\epsilon(k_x, k_y)$

углу. Оно представляет собой набор джетов со слабыми и/или сильными перекрытиями. Такое поведение также хорошо прослеживается и на угловой зависимости спектров при разных значениях $k_0$ (рис. 8). При этом вдоль каждого джета спектр $\epsilon_k$ меняется пропорционально $k^{-4}$, что после углового усреднения дает распределение $E(k)$ крейчнановского типа (1).

Помимо спектра, другими важными характеристиками турбулентности являются структурные функции. Как отмечалось выше, при временах $t$, близких к $t_{\max}$, распределение линий максимального $|\mathbf{B}|$ сильно усложняется (можно сказать, турбулизуется). В частности, угловое перекрытие джетов становится более заметным, а спектр — более изотропным. Для того чтобы выяснить, в какой степени рассматриваемая турбулентность близка к крейчнановской, в численных экспериментах для $t$, близких к $t_{\max}$, была получена зависимость корреляционной функции

$$D(R) = \langle[\Omega(\mathbf{r}) - \Omega(\mathbf{r}')]^2\left([\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}')]\cdot[\mathbf{r} - \mathbf{r}']\right)/R\rangle$$

от $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Согласно Крейчнану (см., например, обзор [23]), для прямого каскада эта зависимость должна быть линейной с коэффициентом пропорциональности $\eta$ (поток энстрофии в область малых масштабов). Рис. 9 показывает, что она действительно близка к линейной, особенно при малых $R$. При больших $R$ наблюдается незначительный излом, который, по нашему мнению, связан с отклонением спектра от изотропного, т.е. с его джетовой структурой.

Помимо корреляционной функции $D(R)$, вычислялись структурные функции скорости

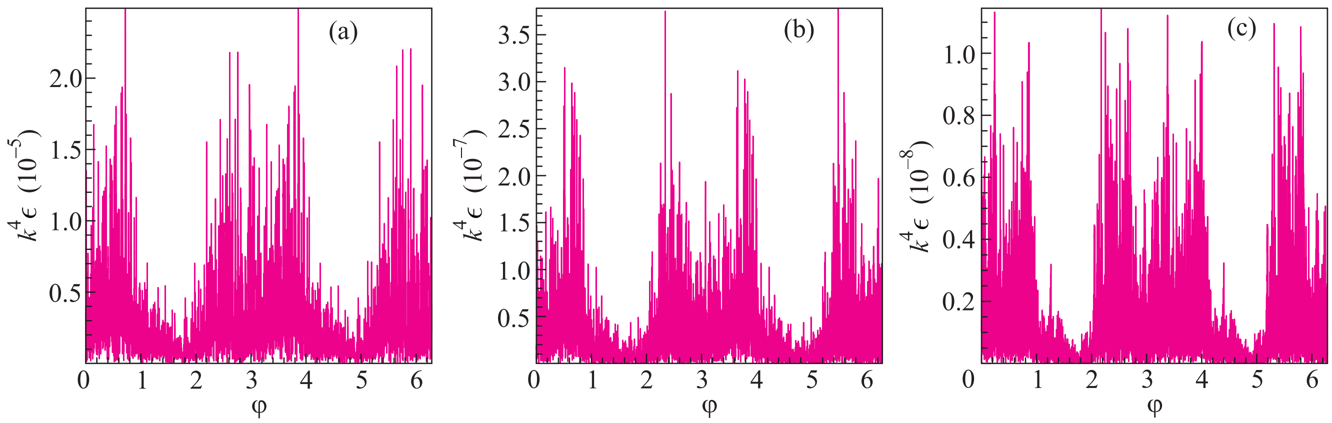


Рис. 8. Зависимости компенсированного спектра $k^4\epsilon$ от угла $\phi$ при $k_0 = 500$ (a), 1000 (b) и 1500 (c)

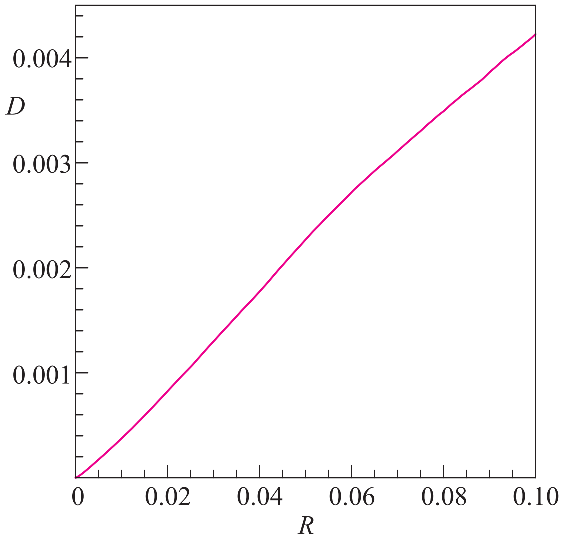


Рис. 9. Корреляционная функция $D(R)$

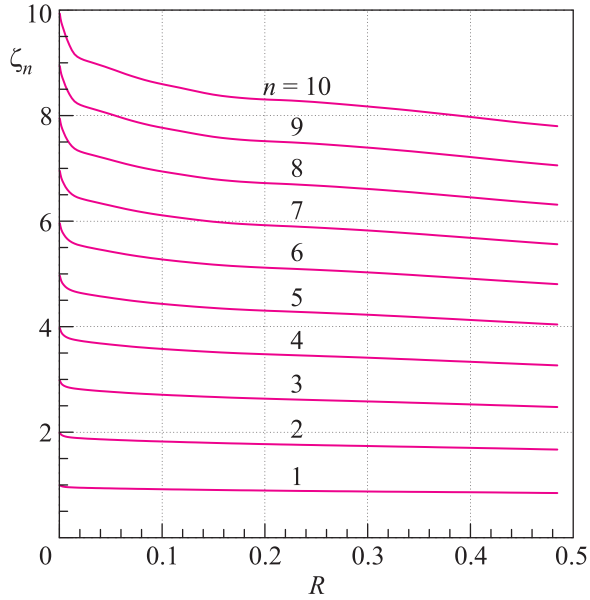


Рис. 10. Степени $\zeta_n$ (локальные) в зависимости от $R$

$S_n(R) = \left\langle\left[(\mathbf{v}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}(\mathbf{r}))\cdot\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{R}\right]^n\right\rangle$. Как известно, зависимость степени структурных функций $\zeta_n$ ($S_n(R) \sim R^{\zeta_n}$) от $n$ характеризует уровень перемежаемости турбулентности. Для колмогоровско-крейчнановского режима $\zeta_n$ линейно зависит от $n$. Наш численный эксперимент показывает, что локальная зависимость $\zeta_n$ (рис. 10) отклоняется от линейной, имея тенденцию к насыщению, особенно при больших $R$. Это свидетельствует о перемежаемости данной турбулентности. Следует отметить, что в отсутствие диссипативного масштаба все $\zeta_n$ при $R \to 0$ линейно зависят от $n$ (см. рис. 10). Это связано с аналитической зависимостью разности скоростей при $R \to 0$.

**4. Заключение.** Основной вывод данной работы состоит в том, что появление степенного спектра крейчнановского типа вызвано квазисингулярностями, которые возникают при решении задачи Коши для двумерного уравнения Эйлера. И хотя коллапс как процесс образования особенности за конечное время в двумерной гидродинамике запрещен, тенденция к появлению особенности присутствует. Как следует из наших численных расчетов, усиление градиентов завихренности превышает два порядка. По нашему мнению, не исключено, что в присутствии накачки этот процесс может усиливаться. Основанием этому может служить наличие в спектре Крейчнана логарифмической поправки по $k$, связанной со слабой нелокальностью взаимодействия. Интересно, что на стадии вырождения турбулентности, когда происходит формирование плато для компенсированного спектра $k^3E(k)$, тройная корреляционная функция

$D(R)$ демонстрирует крейчнановское поведение. Последнее не противоречит выводу о том, что спектр (1) своим происхождением обязан квазишокам завихренности. При этом, однако, на достаточно далекой стадии развития турбулентности спектр турбулентности за счет джетов остается сильно изрезанным по углу.

Авторы благодарят Г.Е. Фальковича за полезные обсуждения. Работа выполнялась при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор # 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым), а также гранта РФФИ # 12-01-00943, Программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" и гранта ведущих научных школ РФ НШ 6170.2012.2. Е.К. благодарит за гостеприимство Обсерваторию Ниццы (Observatoire de la Côte d'Azur), где эта работа была завершена.

1. R. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 1417 (1967).
2. D.K. Lilly, J. Fluid Mech. **45**, 395 (1971).
3. J.C. McWilliams, J. Fluid Mech. **146**, 21 (1984).
4. S. Kida, J. Phys. Soc. Japan **54**, 2840 (1985).
5. M.E. Brachet, M. Meneguzzi, and P.L. Sulem, Phys. Rev. Lett. **57**, 683 (1986).
6. M.E. Brachet, M. Meneguzzi, and P.L. Sulem, J. Fluid Mech. **194**, 333 (1988).
7. R. Benzi, S. Patarnello, and P. Santangelo, Europhys. Lett. **3**, 811 (1986).
8. B. Legras, B. Santangelo, and R. Benzi, Europhys. Lett. **5**, 37 (1988); B. Santangelo, R. Benzi, and B. Legras, Phys. Fluids A **1**, 1027 (1989).
9. K. Okhitani, Phys. Fluids A **3**, 1598 (1991).
10. E.A. Kuznetsov, V. Naulin, A.H. Nielsen, and J.J. Rasmussen, Phys. Fluids **19**, 105110 (2007).
11. P.G. Saffman, Stud. Appl. Maths **50**, 49 (1971).
12. Е.А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **80**, 928 (2004).
13. E.A. Kuznetsov, V. Naulin, A.H. Nielsen, and J.J. Rasmussen, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 253 (2010).
14. J. Weiss, Physica D **48**, 273 (1991).
15. Е.А. Кузнецов, В.П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998); Phys. Rev. E **61**, 831 (2000).
16. Е.А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **76**, 406 (2002).
17. W. Wolibner, Math. Z. **37**, 698 (1933); В.И. Юдович, ЖВМ и МФ **3**, 1032 (1963); T. Kato, Arch. Rat. Mech. Anal. **25**, 189 (1967).
18. H.A. Rose and P.L. Sulem, Journal de Physique **39**, 441 (1978).
19. V. Borue and S.A. Orszag, Europhys. Lett **20**, 687 (1995).
20. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang, *Spectral Methods*, Springer, 2006.
21. www.fftw.org.
22. P.R. Spalart, R.D. Moser, and M.M. Rogers, J. Comput. Phys. **96**, 297 (1991).
23. G. Boffetta and R.E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).