Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 1, с. 7 – 12 © 2013 г. 10 января

Устойчивость потока столкновительной плазмы в магнитном поле

А. В. Тимофеев[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 ноября 2012 г.

Рассматривается поток столкновительной плазмы, движущийся вдоль магнитного поля со скоростью, меньшей скорости звука. Обнаружено, что стационарные малые возмущения возрастают вниз по течению. Механизм возрастания связан с тем обстоятельством, что дозвуковые потоки идеальной плазмы отвечают на внешние возмущения в первую очередь изменением давления плазмы. В результате, например, при возмущении скорости давление меняется таким образом, что стационарный поток замедляется, если сила направлена по скорости, и ускоряется, если против. Это явление можно описать, считая, что эффективная масса плазмы отрицательна. Если скорость потока неоднородна в поперечном направлении, то роль внешней возмущающей силы играет сила вязкости. В этом случае можно перенормировать не эффективную массу, а эффективный коэффициент поперечной вязкости, который приходится считать отрицательным. Аналогичным образом меняется знак эффективной теплоемкости или эффективного коэффициента поперечной теплопроводности, если скорость потока меньше скорости звука, но превышает тепловую скорость ионов, рассчитанную по сумме температур ионов и электронов. Явление возрастания стационарных возмущений вниз по потоку названо в работе пространственной неустойчивостью. Определен пространственный инкремент нарастания возмущений вниз по течению. Численный анализ эволюции возмущений иллюстрирует развитие пространственной неустойчивости дозвуковых потоков столкновительной плазмы, движущихся вдоль магнитного поля.

DOI: 10.7868/S0370274X13010025

1. Введение. Неравновесность плазменных потоков, как и потоков других сплошных сред, может проявляться двояко. Во-первых, поток может быть неустойчив по отношению к раскачке собственных колебаний. Во-вторых, по ходу потока могут нарастать возмущения, вызываемые внешними объектами, относительно которых поток движется. Пространственная структура таких возмущений "привязана" к их источникам. Экспоненциальный рост возмущений вниз по течению будем называть пространственной неустойчивостью. Моделям однородных потоков присущи только пространственные неустойчивости. В этом случае неравновесность системы проявляется лишь благодаря неявно предполагаемому присутствию физических тел, которые покоятся в лабораторной системе отсчета и являются источником стационарных возмущений. Скорость потока отсчитывается относительно этих объектов.

В настоящей работе рассмотрена пространственная неустойчивость стационарного однородного дозвукового потока плазмы, движущегося вдоль магнитного поля. Решение "дисперсионного уравнения"позволило определить характерный пространственный инкремент нарастания малых (линейных) возмущений. Вывод о неустойчивости потока иллюстрируется численным анализом пространственной эволюции начальных возмущений.

Пространственная неустойчивость связана с действием процессов переноса поперек магнитного поля, вызванных неоднородностями профилей скорости и температуры. Так, вязкость стремится замедлить поток в области, где его скорость превышает среднюю, и ускорить его в области, где значение скорости меньше средней. Однако реакция дозвукового потока на внешнее силовое воздействие определяется в большей степени перераспределением давления, нежели изменением скорости. Последнее зависит как от силы, действующей на поток, так и от продольного градиента давления. Давление же меняется таким образом, что дозвуковой поток ускоряется, если сила направлена навстречу потоку, и замедляется при обратном ее направлении. Таким образом, в определенном смысле дозвуковому потоку можно приписать отрицательную массу. Поскольку в интересующем нас случае сила, действующая на поток, есть сила поперечной вязкости, такой же характер эволюции можно получить, изменяя знак не массы, а коэффициента вязкости.

Изменения удельного объема в потоке плазмы сопровождаются адиабатическими изменениями как

[1)]e-mail: avtim@nfi.kiae.ru

давления, так и температуры. Если скорость дозвукового потока превышает тепловую скорость ионов, то в уравнении тепла по аналогии с уравнением движения можно поменять на отрицательный знак эффективной теплоемкости или эффективного коэффициента поперечной теплопроводности.

2. "Отрицательная масса" и "отрицательная теплоемкость" в потоках газа и плазмы. Система гидродинамических уравнений

$$\frac{d}{dz}nV = 0, \tag{1}$$

$$mnV\frac{d}{dz}V + \frac{d}{dz}p = F, \tag{2}$$

$$\frac{3}{2}nV\frac{d}{dz}T + nT\frac{d}{dz}V = Q \tag{3}$$

описывает как одномерные течения идеального одноатомного газа, так и течения идеальной изотермической плазмы ($T_i = T_e = T$) в одножидкостном приближении (см., например, [1]). Здесь используются общепринятые обозначения. В случае плазмы $m = m_i + m_e$, $p = 2nT$. Правые части уравнений (2), (3) могут быть отличны от нуля благодаря внешним воздействиям или эффектам неидеальности.

При $Q = 0$ из уравнений (1), (3) находим $n = C_1/V$, $T = C_2/V^{2/3}$, где $C_{1,2}$ – постоянные. Подставляя эти выражения в (2), получаем

$$m\left[1 - \left(\frac{V_s}{V}\right)^2\right] nV\frac{d}{dz}V = F, \tag{4}$$

где $V_s = \left(\frac{5}{3}\frac{T}{m}\right)^{1/2}$ – скорость звука.

Согласно (4) "теплый" газ ($T \neq 0$) движется под действием внешней силы так же, как холодный ($T = 0$) с эффективной массой $m_{\text{eff}} = m[1 - (V_s/V)^2]$. Для дозвуковых течений эффективная масса отрицательна. Дело в том, что в таких течениях относительно велика плотность тепловой энергии. Поэтому в присутствии внешней силы определяющим процессом, приводящим к установлению стационарного состояния, является не изменение скорости потока, а такое перераспределение давления, благодаря которому его градиент компенсирует силу. При этом градиент давления ускоряет газ навстречу внешней силе. В сверхзвуковых потоках роль теплового движения частиц газа менее существенна. Реакция таких потоков на внешнюю силу аналогична реакции потоков холодного газа.

Если $F = 0$, а $Q \neq 0$, то из (2), (3) получаем

$$\frac{dV}{dz} = \frac{1}{(V_T/V)^2 - 1}\frac{1}{mV}\frac{dT}{dz},$$

где $V_T = (T/m)^{1/2}$.

Подставляя это выражение в уравнение (3), приводим его к виду

$$\frac{3}{2}\frac{(V_s/V)^2 - 1}{(V_T/V)^2 - 1}n\frac{dT}{dz} = Q.$$

Отсюда следует, что в стационарном потоке газа (плазмы) эффективная теплоемкость дается выражением $\alpha_{\text{eff}} = \frac{3}{2}\frac{(V_s/V)^2-1}{(V_T/V)^2-1}n$. Данная величина отрицательна, если скорость дозвукового потока лежит в интервале $V_T < V < V_s$. При таких значениях скорости стационарное состояние в присутствии источников (стоков) тепла устанавливается за счет работы против течения (по течению) силы давления, сопровождающей расширение (сжатие) газа. Именно адиабатическое изменение объема определяет изменение температуры.

В неоднородных потоках плазмы, движущихся вдоль магнитного поля, появление $F \neq 0$, $Q \neq 0$ вызывается перераспределением импульса и температуры за счет вязкости и теплопроводности соответственно. При этом в силу отрицательности эффективной массы и, возможно, теплоемкости диссипативные процессы приводят к обратному результату: неоднородности дозвукового потока обостряются. Иными словами, в потоке развивается неустойчивость. Поскольку возмущения возрастают в пространстве (вниз по течению), а не во времени, анализируемая неустойчивость названа пространственной.

Приведенные соображения справедливы только для потоков плазмы в достаточно сильном магнитном поле, затрудняющем поперечное движение заряженных частиц.

"Аномальность" поведения дозвуковых потоков плазмы отмечалась в [2]. Там было обнаружено, что повторная ионизация многоэлектронных ионов сопровождается ускорением плазмы. Ионизация увеличивает число заряженных частиц и при условии постоянства электронной температуры ведет к росту давления. Это может нарушить силовое равновесие. При $V < V_s$ оно поддерживается за счет уменьшения плотности ионов, что требует ускорения плазмы.

3. Пространственная неустойчисвость потока плазмы в магнитном поле. В случае плазменных потоков, движущихся вдоль магнитного поля, правые части уравнений (2), (3) определяются поперечной вязкостью и поперечной теплопроводностью (см., например, [1]):

$$\frac{\partial}{\partial z}(nV) = 0, \tag{5}$$

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}[n(T_e + T_i)] = \text{div}(\eta_{\perp i}\nabla_\perp V), \tag{6}$$

$$\frac{3}{2}nV\frac{\partial T_i}{\partial z}+nT_i\frac{\partial V}{\partial z}=\mathrm{div}_\perp(\kappa_{\perp i}\nabla_\perp T_i)+\eta_{\perp i}(\nabla_\perp V)^2. \quad (7)$$

Здесь $\eta_{\perp i}=1.2nm_i\rho_i^2\nu_i$ – коэффициент ионной вязкости, $\kappa_{\perp i}=2n\rho_i^2\nu_i$ – коэффициент ионной теплопроводности, ν_i – частота ион-ионных столкновений, $\rho_i=\frac{1}{\omega_i}\left(\frac{T_i}{m_i}\right)^{1/2}$ – средний ларморовский радиус ионов, ω_i – ионная циклотронная частота. Остальные обозначения общеприняты. Используется декартова система координат с осью $0z$, направленной вдоль магнитного поля.

В системе уравнений (5)–(7) температура электронов считается постоянной ввиду большой электронной теплопроводности. Диффузия плазмы поперек магнитного поля не учитывается, так как она обусловлена слабым электрон-ионным трением. Не учитываются также и продольные вязкость и теплопроводность ионов, поскольку рассматриваются возмущения с характерным продольным масштабом, существенно превышающим длину свободного пробега.

Рассмотрим малые возмущения однородного потока. Стандартным образом линеаризуем систему (5)–(7) по возмущениям вида $\propto\exp(\lambda z+ik_\perp x)$. Условие разрешимости полученной системы линейных алгебраических уравнений приводит к дисперсионному уравнению для собственных значений безразмерной величины $\Lambda=\frac{\lambda V}{(k_\perp\rho_i)^2\nu_i}$:

$$\Lambda^2\left[1-\left(\frac{V_s}{V}\right)^2\right]+\frac{4}{3}\left[1.9-\left(\frac{V_T'}{V}\right)^2\right]+1.6=0, \quad (8)$$

где $V_T'=\left(\frac{T_e+T_i}{m}\right)^{1/2}$, $V_s=\left(\frac{T_e+5T_i/3}{m}\right)^{1/2}$ – скорость звука, который в рассматриваемых условиях адиабатичен по ионам и изотермичен по электронам.

Для дозвуковых потоков ($V<V_s$) уравнение (8) имеет два действительных решения, одно из которых положительно. Данное решение характеризует возмущения, нарастающие вниз по течению.

При $V<V_T'$ отрицательна только эффективная масса, в то время как эффективная теплоемкость положительна (см. выше). В этом случае вариации температуры оказывают второстепенное влияние на эволюцию возмущений. Если $V\ll V_T'$, то при приближенном вычислении пространственного инкремента нарастания возмущений λ можно считать, что температура ионов не возмущается. Опуская в уравнении движения также и инерционное слагаемое, находим

$$\lambda\approx k_\perp^2\frac{\eta_{\perp i}}{m_i n}\frac{V}{{V_T}^2}=1.2(k_\perp\rho_i)^2\nu_i\frac{V}{{V_T'}^2}.$$

Инкремент неограниченно возрастает, если скорость потока приближается к скорости звука:

$$\lambda\approx\frac{4}{3}\frac{(k_\perp\rho_i)^2\nu_i}{V_s}\frac{1.9-(V_T'/V_s)^2}{(V_s/V)^2-1}. \quad (9)$$

Он также увеличивается и с уменьшением поперечной длины волны. На границе области применимости гидродинамического приближения ($k_\perp\approx\rho_i^{-1}$) при скорости потока V порядка тепловой скорости ионов характерный инкремент по порядку величины равен обратной длине свободного пробега. Это означает, что гидродинамическое приближение одновременно становится непригодным и для описания движения ионов вдоль магнитного поля.

Рассматриваемая пространственная неустойчивость – неустойчивость потока плазмы, “протекающего” через стационарные возмущения. Для их возникновения необходимо присутствие внешних тел, покоящихся в лабораторной системе отсчета. В качестве внешнего тела может выступать источник плазмы. Поток, предоставленный самому себе, разумеется, устойчив (неустойчивые собственные колебания отсутствуют). Действительно, можно перейти в систему отсчета, в которой плазма покоится.

3. Численный анализ эволюции малых возмущений. В реальных условиях возмущения плазменного потока, в отличие от неограниченных гармонических возмущений, рассмотренных выше, имеют конечный поперечный размер. Эволюция подобных возмущений может быть рассмотрена лишь численно. Такие расчеты сталкиваются с принципиальной трудностью, связанной с дискретизацией значений координат и численной аппроксимацией аналитических зависимостей. Неизбежные погрешности, связанные с этими факторами, выступают как неконтролируемые внешние возмущения, являющиеся “затравкой” для развития неустойчивости. Положение усугубляется тем обстоятельством, что данные “возмущения” мелкомасштабны. Из предыдущего же пункта следует, что пространственный инкремент развития неустойчивости возрастает с уменьшением характерного поперечного масштаба, $\lambda\propto k_\perp^2$. Чтобы избежать неконтролируемых явлений, “время” расчета (протяженность пространственной эволюции) приходится ограничивать. На небольших расстояниях изменения параметров плазменного потока невелики. Чтобы они выглядели рельефнее, на рис.1, 2 показаны не сами возмущения, а их изменения.

Неустойчивость, рассмотренная в предыдущем пункте, может проявиться, например, в системах ИЦР разделения изотопов [2] и системах ИЦР плазменной переработки отработавшего ядерного топлива (ОЯТ) [3, 4]. В этих устройствах ИЦР-нагрев плазменного потока должен происходить при его прохождении по довольно протяженному участку однородного или слабо неоднородного магнитного поля. Плазменный поток имеет сложный ионный состав. При этом нагреву подлежат ионы, доля которых невелика. Основная же часть ионов остается холодной. Поведение последних может быть рассмотрено в рамках гидродинамики (см. выше).

Ориентируясь на системы плазменной переработки ОЯТ, будем рассматривать поток плазмы урана в магнитном поле $B_0 = 15$ кГс при плотности плазмы $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$ и температуре $T_i = 1$ эВ, $T_e = 3$ эВ. Эти параметры отличаются от приведенных в [3]. В частности, магнитное поле увеличено в несколько раз, а плотность плазмы – на порядок величины. Выбор параметров расчета определялся необходимостью удовлетворить условиям применимости гидродинамического приближения и желанием избежать развития неконтролируемой неустойчивости (см. выше).

В связи с изменением знака эффективной теплоемкости при $V = [(T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$ представлялся интересным анализ потоков, скорости которых как превышали это значение, так и были меньше него. Поэтому расчеты производились для трех значений начальной скорости, $V_0 = [(T_e + 2T_i/3)/m_i]^{1/2}$, $[(T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$ и $[(T_e + 4T_i/3)/m_i]^{1/2}$, меньших скорости распространения звукового сигнала $V_s = [(T_e + 5T_i/3)/m]^{1/2}$.

Предположим сначала, что на входе в систему задано возмущение скорости вида $V_1(x) = 10^{-2} V_0 \exp[-(x/a)^2]$ (пунктир на рис. 1a). Плотность плазмы и температуру будем считать невозмущенными. На рис. 1a показаны изменения скорости на расстоянии 0.5 см от входа в систему (кривые *1–3*). Видно, что при движении потока возмущение скорости стягивается к центру, где за счет замедления периферийных областей поток ускоряется. Обострение профиля скорости интенсифицирует обмен импульсом между различными областями возмущения за счет вязкости, что ускоряет его рост: инкремент пространственной неустойчивости увеличивается с уменьшением поперечного масштаба возмущения, см. предыдущий раздел. Такого поведения следовало ожидать при отрицательной вязкости плазмы. Действительно, если в уравнение (2) в качестве внешней силы подставить силу вязкости, которая для малых возмущений однородного потока имеет вид $f_{\rm ex} = \eta_{\perp,i} \Delta V$, и разделить это уравнение на $1 - (V_s/V)^2$, то мы получим уравнение движения среды, частицы которой при $V < V_s$

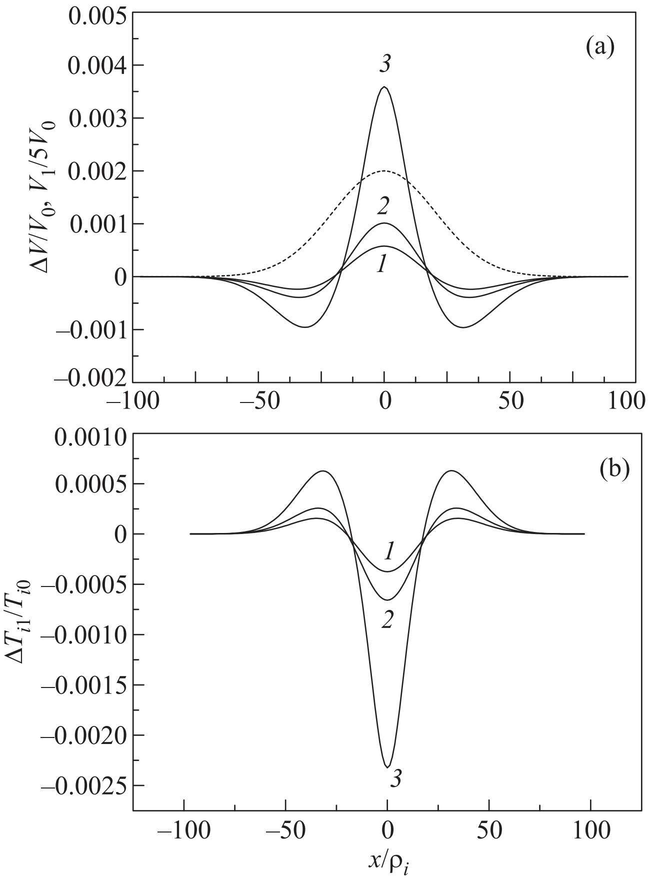

Рис. 1. Изменения параметров плазменного потока на расстоянии 0.5 см от входа в систему при возмущении на входе скорости $V_1(x) = 10^{-2} V_0 \exp[-(x/a)^2]$. (a) – скорость. (b) – Ионная температура. Кривая *1* – $V_0 = [T_e + 2T_i/3)/m_i]^{1/2}$, *2* – $V_0 = [(T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$, *3* – $V_0 = [(T_e + 4T_i/3m_i]^{1/2}$. Штриховая линия – возмущение скорости на входе в систему

имеют положительную массу, но отрицательный коэффициент вязкости $\eta_{\rm eff} = \eta_{\perp,i}[1 - (V_s/V)^2]^{-1}$.

Заметим, что в соответствии с результатами предыдущего пункта темп эволюции возмущений возрастает с увеличением скорости потока.

Хотя предполагается, что на входе температура ионов и плотность плазмы не возмущены, изменения скорости вдоль течения влекут за собой изменения указанных параметров. При этом в силу зависимостей $n = C_1/V$ и $T \approx C_2/V^{2/3}$ (см. выше) плотность и ионная температура меняются разнонаправленно со скоростью. Относительные возмущения плотности плазмы примерно в полтора раза превышают относительные возмущения ионной температуры. Однако форма этих возмущений практически одинакова. Поэтому на рис. 1b мы показываем лишь изменения ионной температуры.

Из соображений, аналогичных приведенным в п. 2, следует, что при приближенном анализе динамики дозвукового потока эффективную теплоемкость (или, что эквивалентно, эффективный коэффициент теплопроводности) можно считать отрицательной при $V_s > V > V_T'$. Поэтому если на входе в систему возмущена ионная температура, то профиль возмущения будет обостряться при $V > V_T'$ и сглаживаться при $V < V_T'$. Этот вывод подтверждает рис. 2a, на котором приведены зависимо-

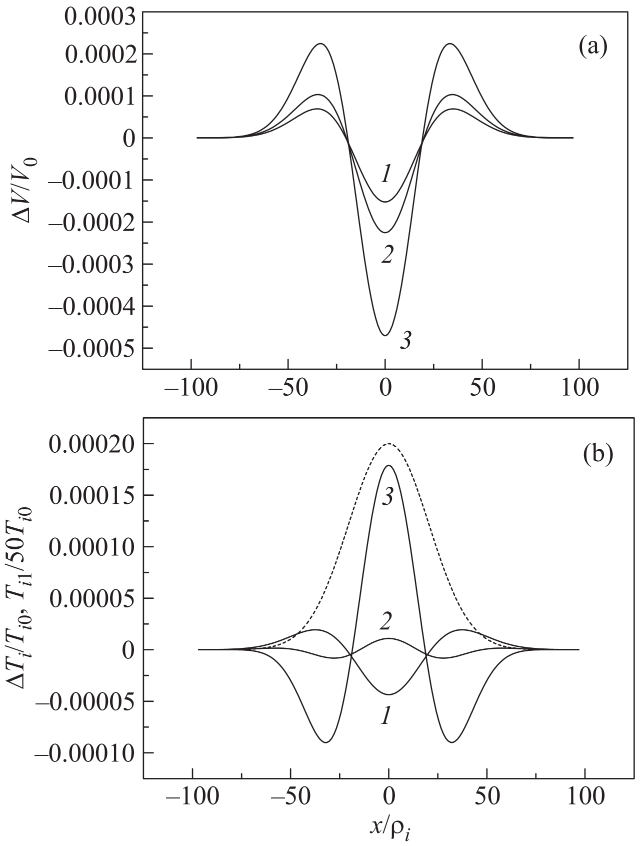

Рис. 2. Изменения параметров плазменного потока на расстоянии 0.5 см от входа в систему при возмущении на входе ионной температуры $T_{i1}(x) = 10^{-2}T_{i10}\exp[-(x/a)^2]$. (a) – Скорость. (b) – Ионная температура. Кривая *1* – $V_0 = [(T_e + 2T_i/3)/m_i]^{1/2}$, *2* – $V_0 = [(T_e + T_i)/m_i]^{1/2}$, *3* – $V_0[(T_e + 4T_i/3)/m_i]^{1/2}$. Штриховая линия – возмущение ионной температуры на входе в систему

сти ионной температуры от поперечной координаты при $T_{i1}(x, 0) = 10^{-2}T_{i0}\exp[-(x/a)^2]$ и $V_1(x, 0) = n_1(x, 0) = 0$ и на том же расстоянии от входа в систему, что и выше.

В рамках используемого нами гидродинамического приближения дозвуковой поток благодаря влиянию вязкости неустойчив по отношению к гармоническим возмущениям вне зависимости от значения поперечного волнового числа как при $V > V_T'$, так и при $V < V_T'$ (см. рис. 2b). Поэтому расплывание температурных возмущений при $V < V_T'$ следует приписать интерференции определенным образом скоррелированных гармонических составляющих. На достаточном удалении от входа в систему из начального возмущения выделятся наиболее быстро растущие составляющие, которые и будут определять его дальнейшую эволюцию. К сожалению, вычислительные трудности, упомянутые выше, препятствуют анализу этого процесса.

4. Заключение. Проведенное рассмотрение показывает, что стационарные дозвуковые потоки плазмы, двигаясь вдоль магнитного поля, становятся резко неоднородными в поперечном направлении. В таких потоках, по-видимому, будут раскачиваться собственные колебания, что может ограничить их дальнейшую стратификацию. В результате в системе может установиться стационарное турбулентное состояние.

Однако возможен и другой вариант. Сверхзвуковые потоки как обычного газа, так и плазмы неустойчивы по отношению к образованию ударных волн (УВ), в которых скорость потока сбрасывается до дозвуковой. Эта неустойчивость может рассматриваться как еще один пример пространственной неустойчивости. Действительно, профиль стационарной УВ описывается выражением (см., например, [5])

$$V(z) = \frac{1}{2}\left[V_0 + V_1 - \Delta V \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\lambda_\parallel z\right)\right],$$

где $V_0(V_1)$ – скорость набегающего (уходящего) потока, $\Delta V = V_0 - V_1$, $\lambda_\parallel = \frac{3}{2}\frac{V_0 - V_{s0}}{\mu}$, V_{s0} – скорость звука в набегающем потоке, $\mu = \frac{\eta_\parallel}{mn} + \frac{1}{5}\frac{\kappa_\parallel}{n}$, координата Z отсчитывается от центра УВ. На большом расстоянии перед УВ имеем $V \approx V_0 - \Delta V\exp(\lambda_\parallel z)$. Данное выражение показывает, что возникновение УВ связано со стационарными возмущениями, вносимыми в поток внешними телами, покоящимися в лабораторной системе отсчета. Если в набегающем потоке разность $V - V_s$ достаточно мала, то скорость потока в пределах системы изменится на малую величину и УВ не успеет сформироваться.

Вместе с тем сверхзвуковые потоки устойчивы по отношению к поперечной стратификации. Более того, $\lambda \xrightarrow[V \to V_s]{} -\infty$ (см. (9)).

Эти соображения приводят к выводу о том, что скорость стационарного плазменного потока должна превышать звуковую, отличаясь от нее на малую величину. Данный вывод согласуется с результатами экспериментов по ИЦР разделению изотопов на французской установке ERIC [6]. В этой работе утверждается, что потоки металлических плазм двигались вдоль магнитного поля со скоростью, близкой к скорости звука, $V_s = \left(\frac{T_e+5T_i/3}{m}\right)^{1/2}$. Обычно скорость плазмы, выходящей из источника, определяется перепадом электрического потенциала в его пределах. Если результат работы [6] справедлив, то встает вопрос о механизме обратного воздействия потока на источник плазмы. Такое воздействие возможно при скорости потока, меньшей скорости звука, когда физические процессы, происходящие в какой-то области, могут влиять на динамику потока как ниже, так и выше по течению.

Автор благодарен К.В. Чукбару за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ, ФЦП Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы, Соглашение # 8238 и грантом # НШ-4361.2012.2 Президента РФ для гос. поддержки ведущих научных школ.

1. С. И. Брагинский, Сб. *Вопросы теории плазмы* (под ред. М. А. Леонтовича), М.: Атомиздат, 1963, т. 1, с. 183.
2. А. И. Карчевский, Ю. А. Муромкин, *Изотопы* (под ред. В. Ю. Баранова), М.: Физматлит, 2005, т. 1, с. 307.
3. А. В. Тимофеев, Физика плазмы **37**, 1047 (2011).
4. А. В. Тимофеев, Физика плазмы **37**, 60 (2011).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
6. A. Compant, P. Louvet, P. Guerrierec, and A. Pailloux, J. Phys. D **31**, 847 (1998).