Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 2, с. 98 – 103

Асимметрия временной динамики бризеров в электроконвективной твист-структуре нематика

О. А. Скалдин[1], *В. А. Делев*, *Е. С. Шиховцева*

Институт физики молекул и кристаллов Уфимского научного центра РАН, 450075 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 2 ноября 2012 г.
После переработки 10 декабря 2012 г.

Экспериментально и теоретически изучена динамика бризерных дефектов в периодических структурах роллов, возникающих при электроконвекции в закрученных на $\pi/2$ нематических жидких кристаллах. В твист-структурах нематиков аксиальные компоненты скорости гидродинамического потока противоположны в соседних роллах. Динамика бризерного дефекта представляет собой периодические рождение и аннигиляцию пары классических дислокаций с топологическими индексами "+1" и "−1". При этом аннигиляция происходит быстрее, чем рождение. Показывается, что асимметричная временная динамика бризерного дефекта хорошо описывается решением возмущенного уравнения *sin*-Гордона в виде взаимодействующих солитона и антисолитона.

DOI: 10.7868/S0370274X13020069

Наличие дальнего порядка в анизотропных жидкостях (жидких кристаллах) определяет возможность наблюдения в них различного рода объемных и поверхностных дефектов [1–3]. Теория статических дефектов, их взаимодействия и симметрийных превращений достаточно хорошо разработана [4]. К ним относятся равновесные и квазиравновесные локализованные образования различного типа: ежи, буджумы, дисклинационные кольца, солитоны и т.д. [4–6]. Менее изучены динамика и свойства дефектов в решетках - периодических структурах диссипативного характера. Одной из таких систем, богатых на подобного рода эффекты, является электроконвекция, реализуемая в нематических жидких кристаллах (НЖК) с различными граничными условиями [7].

Образование и генерация дефектов при электроконвекции, с одной стороны, являются следствием нелинейного взаимодействия ориентационной и гидродинамической подсистем жидкого кристалла. С другой стороны, их временная динамика и структурные особенности в некоторых случаях являются определяющими в сценариях турбулизации пространственно-временного порядка выше порога его формирования [8–11]. Вследствие этого продолжает оставаться актуальным детальное изучение процессов образования дефектов в периодических структурах и их временной динамики. В случае однородных (так называемых гомогенных) граничных условий были классифицированы и подробно изучены статистические характеристики структурных дефектов при электроконвекции в закритической области образования доменов Капустина–Вильямса [12–15].

В более сложной ситуации, например в квазиодномерных твист-структурах нематика, обнаружены линейные локализованные образования со скачком фазы вдоль них на 180^0 [16, 17]. Теоретическое описание подобных объектов основано на использовании амплитудного уравнения Гинзбурга–Ландау [8, 18–21]. Однако возможен и другой подход, связанный с описанием пространственно распределенных дефектов. Он основан на глубокой аналогии их свойств и поведения с моделью Френкеля–Конторовой [22, 23]. В частности, в [24, 25] в пределе непрерывной фазы $\varphi(x)$, описывающей положения отдельных элементов цепочки, $\varphi(x)$ является решением одномерного, не зависящего от времени уравнения *sin*-Гордона.

Динамический случай "дышащего" дефекта был экспериментально и теоретически реализован в работе [26]. В ней где было показано, что такого рода дефекты, генерируемые в одномерной ролловой структуре закрученного нематика выше порога ее образования U_c, описываются решением в виде стоячего бризера. Однако в рамках предложенной модели в случае закрученной ролловой структуры в электроконвективной системе остались неучтенными следующие существенные моменты: тонкая структура диссоциированного по пространству дефекта с нулевым топологическим зарядом и асимметрия коле-

[1]e-mail: scala@anrb.ru

бательного процесса по временному циклу. Возможность их учета открывается при использовании более сложной модели возмущенного уравнения *sin*-Гордона. Эта модель была разработана для изучения пространственно-временных локализованных образований, в том числе и бризерных дефектов, в цепочке ДНК с бистабильной ячейкой и анизотропным внутримолекулярным трением [27].

В связи с вышесказанным целью данной работы явились попытка адекватного описания асимметричности развивающихся локальных пространственно-временных процессов в динамических бризерных дефектах и выяснение физических причин, связанных со свойствами электроконвективной твист-структуры нематика, определяющих это поведение.

В качестве модельной среды использовался НЖК 4-n-метоксибензилиден-n-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO_2. Подложки натирались в одном направлении для создания планарной однородной ориентации директора $\mathbf{n}$. Затем они поворачивались друг относительно друга на угол $\pi/2$, так что возникала закрученная на $\pi/2$ конфигурация поля директора $\mathbf{n}$ [28]. Толщина ЖК-ячейки размером $16 \times 12\,\text{мм}^2$ задавалась майларовыми прокладками $h = 20$ мкм. К ЖК-слою прикладывалось переменное напряжение U с частотой $f = 30$ Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса–Капустина $U_c = 5.6$ В. Измерения скоростей и направлений гидродинамических потоков в роллах проводились путем анализа движений пробных частиц диаметром 2–3 мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany). Их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720×576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

Как отмечалось выше, в закрученном на $\pi/2$ НЖК-слое при электроконвекции в одномерной ролловой структуре выше порога ее образования U_c образуются дефекты с несингулярным ядром (бризеры). Физические причины существования которых связаны с гидродинамикой противоположно направленного геликоидального течения в соседних роллах [26]. Экспериментальные исследования показали, что данный объект имеет сложную структуру. Она определяется начальной твист-закруткой поля директора нематика $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. На рис. 1a и b представлен вид двух состояний диссоциированного дефекта, которые обязаны своим существованием процессу периодического замыкания геликоидальных течений при локальной их коммутации вправо (рис. 1a) и влево (рис. 1b).

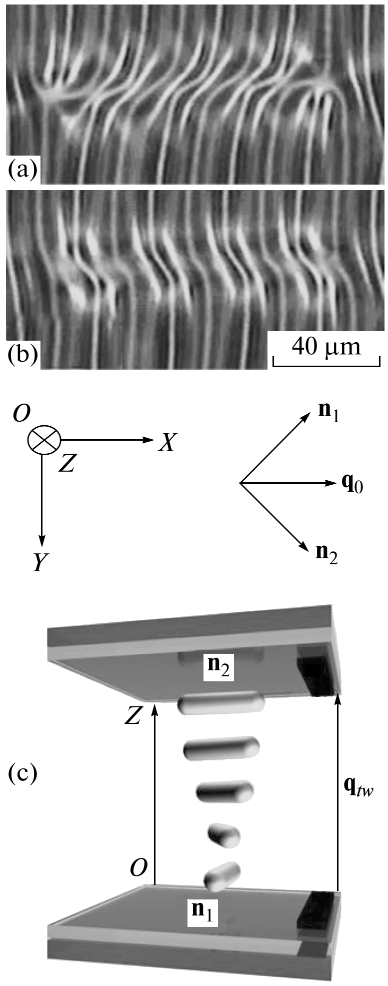

Рис. 1. Состояния бризерного дефекта с разницей по времени в "полпериода" при $U = 1.6U_c$ в крайне правом (a) и в крайне левом положении разворота роллов (b); Геометрия распределения поля директора твист-структуры (c). Здесь $\mathbf{q}_0$ – волновой вектор ролловой структуры, $\mathbf{q}_{tw}$ – волновой вектор твист-структуры. Темными полосами на верхней и нижней подложках обозначены контакты для подвода электрического напряжения

Детальный анализ этих состояний показывает, что имеет место пространственная анизотропия колебательного процесса, неэквивалентность правых и левых состояний в "точках разворота" по циклу. В одном из состояний происходит расщепление такого пространственно диссоциированного дефекта с несингулярным ядром и нулевым топологическим зарядом на дипольную пару дефектов с векторами Бюргерса ± 1 (рис. 1a), тогда как в другом – нет (рис. 1b). Кроме того, имеет место асимметрия временной динамики: время перехода (переключения) T_1 из состояния на рис. 1a в состояние на рис. 1b меньше времени перехода T_2 из состояния на рис. 1b в состояние на рис. 1a, т.е. разница "полупериодов" $\tau_0 = T_2 - T_1 \neq 0$ ($T = T_1 + T_2$ – время полного цикла). Для выяснения причин такого поведения рассмотрим распределение поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ вдоль оси OZ. На рис. 1c изображена конфигурация начального распределения поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, представляющая собой четверть пространственного геликоида, так что директор делает разворот на $\Delta = \pi/2$ от $\mathbf{n}_1$ планарной ориентации на одной из границ до $\mathbf{n}_2$ на другой. В данном конкретном случае мы имеем фрагмент правозакрученной спирали с волновым вектором $\mathbf{q}_{tw}$, направленным вдоль оси OZ. При периодических возмущениях (переключениях) вправо и влево происходит твист-деформация (Т-деформация) кручения, связанная с упругим модулем нематика K_{22}, которую формально можно описать уже распределенным волновым вектором $\mathbf{q}_{tw}(z,t) = \mathbf{q}_{tw} + \mathrm{rot}\,\mathbf{n}(\mathbf{r},t)$. Тогда разница по энергии A между возбужденным и основным состояниями будет пропорциональна

$$A \sim 2K_{22}\left[\mathbf{q}_{tw}\mathrm{rot}\,\mathbf{n}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\mathrm{rot}^2\,\mathbf{n}(\mathbf{r},t)\right]|_{t=T_{1,2}}\,. \quad (1)$$

Последнее следует из того, что вклад энергии T-деформации в гамильтониан $V_{tw} \sim K_{22}[\mathbf{q}_{tw} + \mathrm{rot}\,\mathbf{n}(\mathbf{r})]^2$ [7].

Таким образом, мы имеем бистабильную ячейку со снятым вырождением по энергии устойчивых состояний. Здесь надо отметить, что в одном из возбужденных состояний средняя деформация кручения Δ может превысить $\pi/2$ и составить $\pi/2+\delta$. Это делает такое локальное состояние неустойчивым по отношению к релаксации поля директора в менее напряженное состояние, но со сменой знака кручения с правого на левое и $\Delta = \pi/2 - \delta$. Последнее может иметь место, когда эффективный поворот роллов совпадает с направлением кручения твист-слоя НЖК и на этот процесс требуется некоторое время τ_0 для реализации реориентационной твист-волны. Это связано с фундаментальным свойством нематика, когда навязанное кручение Т-деформации без хиральных добавок не может превышать 90^0 [29]. В действительности процесса смены правого направления на левое не происходит, так как характерных стенок, разделяющих области с правой и левой закрутками, не образуются. Однако наличие такого рода ориентационной неустойчивости стимулирует возрастание времени пребывания осциллирующего дефекта в этом состоянии на τ_0 и, соответственно, определяет появление пары дефектов с векторами Бюргерса ± 1.

Теперь перейдем к обоснованию теоретической модели и интерпретации наблюдаемых процессов. В закрученном на $\pi/2$ НЖК размер элементарной ячейки доменной структуры определяется как $d = 2\lambda$, где λ – поперечный размер ролла, что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости течения $\mathbf{v}_a$ в соседних роллах. Это определяет периодичность аккумулированной потенциальной энергии, связанной с конвективным движением нематической жидкости в доменах [26]:

$$V_r = \sum_n V_0\left[1 - \cos\left(2\pi u_n/h\right)\right], \quad (2)$$

где u_n является координатой n-го двойного ролла вдоль горизонтального направления X на рис. 1, $V_0 = \rho v_H^2 h\lambda l$ [30], ρ – плотность НЖК, v_H – скорость геликоидального течения ($\sim 10^{-5}$ м/с [31]), l – длина двойного ролла, h – толщина НЖК-слоя. Тогда энергия, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна

$$V_r' = \frac{V_r}{l}, \;\; V_0' = \frac{V_0}{l} = \rho v_H^2 h\lambda. \quad (3)$$

Для описания движения дефекта в решетке доменов необходимо учесть его механические свойства. Поскольку перемещение дефекта не является мгновенным, его инерционность можно охарактеризовать, приписав ему некоторую массу, приходящуюся на единицу длины ролла l. Внутренняя динамика дефекта, как, впрочем, и процессы переориентации молекул, энергетически подпитывается гидродинамической подсистемой НЖК. Поскольку же развивающаяся электроконвекция и формирование периодической структуры являются следствием диссипации энергии внешнего электрического поля за счет анизотропии проводящих свойств НЖК $\Delta\sigma_\alpha$, аккумулированная энергия V_0 геликоидальных потоков ЖК и является определяющей в наблюдаемых процессах. Кроме того, как было сказано выше, в электроконвективной твист-структуре нематика необходимо учесть расщепление по энергии устойчивых состояний. Применительно к нашему случаю для потенциальной энергии (2) с учетом возмущения этот вклад в интегральном виде может быть учтен аналогично [32]:

$$V_r = V_0\left(1 - \cos\frac{2\pi u_n}{h}\right) + A\left(1 - \cos\frac{\pi u_n}{h}\right). \quad (4)$$

Далее, энергия взаимодействия соседних вдоль направления X двойных роллов V_{inter} определяется относительными отклонениями их положений от равновесного расстояния u_0:

$$V_{\text{inter}} = \frac{k}{2}\sum_n (u_{n+1} - u_n - u_0)^2, \tag{5}$$

где $k = Kq_0^2 l$ – константа взаимодействия [26], K – средний модуль упругости НЖК ($K \sim 5 \cdot 10^{-12}$ Н), q_0 – волновой вектор доменной структуры ($q_0 = 2\pi/\lambda \sim 10^5$ м$^{-1}$). Запишем относительную величину энергии взаимодействия как $V'_{\text{inter}} = V_{\text{inter}}/l$, т.е. $k' = k/l = Kq^2$. Тогда полная потенциальная энергия системы, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна $V' = V'_r + V'_{\text{inter}}$. Кинетическая энергия запишется в виде

$$K' = \frac{m'}{2}\sum_n \left(\frac{du_n}{dt}\right)^2, \tag{6}$$

где $m' = m/l$, $m = 2\rho l h \lambda$ – масса двойного ролла, h – толщина ЖК-слоя.

Следует также учесть диссипацию в динамике дефекта, для чего соответствующие слагаемые вводятся феноменологически, как это было сделано в [32, 33]. В результате из гамильтониана $H' = V'_r + V'_{\text{int}} + K'$ в континуальном пределе с учетом потерь энергии по аналогии с [27] получаем уравнение движения для нормированного смещения η n-го двойного ролла:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = -\sin\eta + \frac{\partial^2\eta}{\partial\zeta^2} + \Delta E \sin\frac{\eta}{2} - \\ - \sigma_1\left|\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right| - \sigma_2\frac{\partial\eta}{\partial\tau}, \tag{7}$$

где $\eta = \frac{\pi}{\lambda}u$, $\zeta = 1/(2\lambda\sqrt{\tilde{k}})x$, $\tau = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{V'_0}{4m'}}t$, $\tilde{k} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\frac{4k'}{V'_0}$ [26], $\Delta E = -\frac{2A}{V_0}$, τ и ζ – перенормированные время и координата вдоль ядра дефекта (вдоль оси OX на рис. 1). В данном случае $\Delta E < 0$. Это означает, что основными являются состояния $\varphi = 0,\ \pi$ с энергией $E_1 = 0$, а возбужденными – состояния $\varphi = \pi/2,\ 3\pi/2$ с энергией $E_2 = A$ ($A > 0$) (см. (1)).

Отдельно нужно сделать пояснения относительно диссипативных членов с σ_1 и σ_2. Наиболее простым для интерпретации является член с σ_2. Он описывает потери энергии движения дефекта за счет динамической вязкости НЖК, включающей обычное вязкое трение и анизотропную часть, характерную для ЖК [7].

Несколько сложнее дело обстоит с σ_1. Потери энергии, зависящие от направления движения дефекта, описываются слагаемым $-\sigma_1|\partial\eta/\partial t|$. В общем случае σ_1 может быть функцией η. Возможная зависимость $\sigma_1(\eta)$ может быть представлена в виде $\sigma_1(\eta) = \sigma_{10}\sin(\eta/2)$, $\sigma_{10} > 0$. Выбор знака и величины σ_{10} зависит от определенной физической системы. Больший интерес представляют системы с $\sigma_1 < 0$ и $\Delta E < 0$. Сочетание $\sigma_1 < 0$ и $\Delta E < 0$ дает дополнительное значение равновесной скорости солитона (антисолитона). В результате появляется принципиально новый эффект противоположных режимов переключения [33].

При обсуждении пространственно-временной асимметрии в динамике изучаемого дефекта говорилось о возможности протекания локальных релаксационных процессов со сменой направления закрутки твиста в одном из направлений движения с правой на левую и обратно, с переходом к исходной симметрии. Время такого перехода определяется толщиной слоя НЖК и его вязкоупругими характеристиками а [7]:

$$\tau_r \approx \gamma_1 h^2/\pi^2 K_{22}, \tag{8}$$

где $\gamma_1 = 0.015$ П, $K_{22} \simeq 4 \cdot 10^{-12}$ Н [29]. Численные оценки дают $\tau_r \sim (0.1{-}0.2)$ с. Это хорошо согласуется с величиной разницы "полупериодов" τ_0, представленной на рис. 2. Сам же коэффициент σ_1 является функцией $\sigma_1(\tau_r)$. Фактически это означает, что в реальном колебательном процессе имеется временная задержка, зависящая от направления смещения.

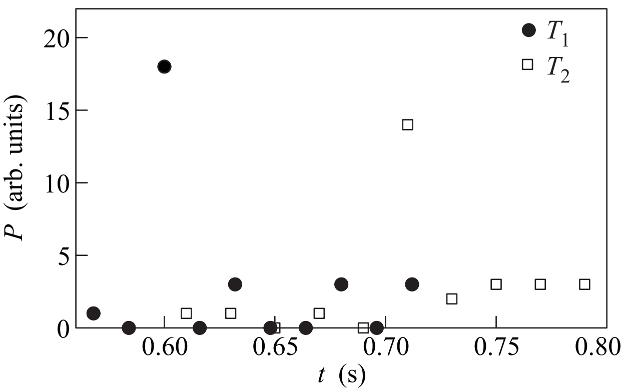

Рис. 2. Функции распределения по времени "полупериодов" T_1 и T_2 колебаний бризерного дефекта при аннигиляции двух дислокаций с зарядами $+1$ и -1, т.е. при столкновении солитона и антисолитона (T_1; см. также рис. 1b) и при их разбегании (T_2; см. также рис. 1a), $U = 1.6U_c$

Таким образом, в данной модели мы учитываем одномерное анизотропное трение, которое определяет неэквивалентность взаимно противоположных движений или колебаний дефекта.

Далее, солитон-антисолитонные столкновения описываются медленно меняющимся во времени двухсолитонным решением невозмущенного уравнения sin-Гордона [34]:

$$\eta = -4\,\mathrm{arctn}\frac{\mathrm{sh}\,R}{v\,\mathrm{ch}\,\Psi}, \tag{9}$$

где $R(\tau) = [\int_0^\tau v(\tau)d\tau + \zeta_0(\tau)](1-v^2)^{-1/2}$ – расстояние между центрами солитона и антисолитона, $\Psi = \zeta(1-v^2)^{-1/2}$. В данном представлении $R < 0$ до столкновения, $R > 0$ после столкновения, а столкновение происходит при $R = 0$. Здесь следует подчеркнуть, что бризер вблизи точки $R \simeq 0$ является частным случаем решения (9), когда величина v^2 становится отрицательной. Таким образом, прохождение солитонной пары через точку $R = 0$ в ее малой окрестности фактически эквивалентно поведению бризера за "полпериода". В связи с этим проанализируем более подробно решение (9) в окрестности $R \sim 0$.

До столкновения решение (9) уравнения (7) представляет собой солитон $\eta_{\zeta\to-\infty} = 0$, $\eta_{\zeta\to+\infty} = 2\pi$, движущийся слева направо со скоростью v, и антисолитон $\eta_{\zeta\to-\infty} = 2\pi$, $\eta_{\zeta\to+\infty} = 0$, движущийся справа налево со скоростью $-v$. Если при столкновении не происходит аннигиляции, что соответствует нашему случаю, то после столкновения образуются солитон $\eta_{\zeta\to-\infty} = -2\pi$, $\eta_{\zeta\to+\infty} = 0$, движущийся слева направо со скоростью v, и антисолитон $\eta_{\zeta\to-\infty} = 0$, $\eta_{\zeta\to+\infty} = -2\pi$, движущийся справа налево со скоростью $-v$.

Согласно теории возмущений [34] для уравнения sin-Гордона функции $v(\tau)$ и $R(\tau)$ определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\mathrm{ch}\,R(1-v^2)v^2FL}{\mathrm{sh}^2\,(R)+v^2} - \frac{\pi\sigma_{10}}{4}v(1-v^2)\times \\ \times\,\mathrm{sh}\,(R)\mathrm{ch}^2\,(R)N, \tag{10}$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Здесь

$$F = \frac{\Delta E}{2}\mathrm{sh}(R)\sqrt{1-v^2} - \sigma_2 v\,\mathrm{ch}\,(R),$$

$$L = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(R)\sqrt{\mathrm{sh}^2\,(R)+v^2}}\times \\ \times\ln\left|\frac{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,(R)+v^2}+\mathrm{sh}\,(R)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,(R)+v^2}-\mathrm{sh}\,(R)}\right|,$$

$$N = \frac{4v^2+\mathrm{sh}^2\,(R)}{[\mathrm{sh}^2\,(R)+v^2]^{5/2}}.$$

Характер солитон-антисолитонного взаимодействия на малых расстояниях между солитоном и антисолитоном определяется из решения уравнения (7). Наглядное представление о нем, как было сказано выше, может быть получено из анализа поведения скоростей солитона и антисолитона вблизи области рассеяния $R = 0$ (рис. 3) для комбинаций параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$.

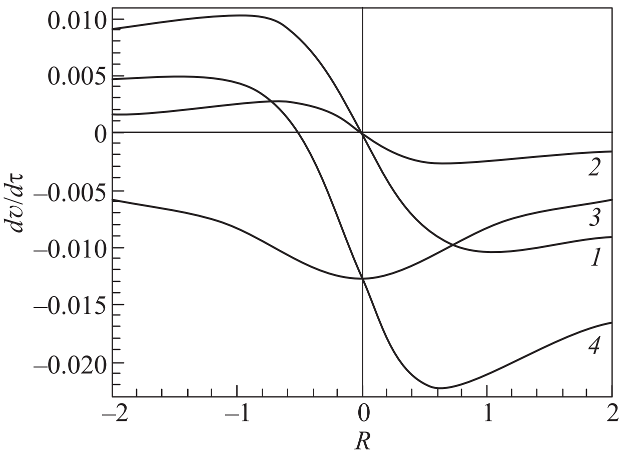

Рис. 3. Изменение скоростей солитона и антисолитона вблизи точки взаимодействия $R = 0$ в режиме рассеяния без аннигиляции: *1* – вклад вырождения по энергии основного состояния элементарной ячейки, *2* – вклад потерь энергии на анизотропное трение, *3* – вклад потерь энергии на обычное молекулярное трение, *4* – результирующая кривая. Здесь $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$

Качественная картина изменения скорости со временем может быть получена из решения первого уравнения системы (10) в предположении $v = v_m$, где v_m – средняя скорость, с которой возбуждение преодолевает точку $R = 0$. Чем больше скорость v_m, тем более плавными являются зависимости $dv(R)/d\tau$. Как видно из рис. 3, при приближении солитона и антисолитона друг к другу ($R < 0$) их скорости возрастают, что соответствует состоянию бризерного дефекта на рис. 1b. При их взаимном удалении после столкновения ($R > 0$) их скорости уменьшаются, т.е. имеет место притяжение. В реальной системе это соответствует образованию дипольной пары классических дефектов по пространственной границе бризера (см. рис. 1a), для чего системе необходимо дополнительное время τ_r (см. выражение (8)). Результирующая функция $dv(R)/d\tau$ не является симметричной относительно точки $R = 0$. Для величин ΔE и σ_{10}, существенно меньших по сравнению с σ_2, результирующая функция $dv(R)/d\tau$ может целиком лежать в отрицательной области. Тогда перед столкновением солитон и антисолитон отталкиваются, что соответствует гашению скорости, а после столкновения – притягиваются. Комбинация же параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 > \sigma_2$ и $\sigma_{10} < 0$ приводит к отталкиванию солитона и антисолитона после столкновения.

В заключение необходимо еще раз подчеркнуть, что наблюдаемая асимметрия поведения при сочетании параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$, по всей видимости, является внутренним свойством электроконвективной твист-структуры нематика.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 12-02-97039).

1. P.G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford, 1994.
2. M. Kleman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley & Sons, Chichester, 1983.
3. *Defects in Liquid Crystals: Computer Simulations, Theory and Experiments* (ed. by O.D. Lavrentovich, P. Pasini, C. Zannoni, and S. Zumer), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2001.
4. M.B. Курик, О.Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
5. П.В. Долганов, В.М. Жилин, В.К. Долганов, Е.И. Кац, Письма в ЖЭТФ **89**, 181 (2009).
6. О.А. Скалдин, Ю.И. Тимиров, Письма в ЖЭТФ **90**, 699 (2009).
7. С.А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, М.: Наука, 1981.
8. *Pattern Formation in Liquid Crystals* (ed. by A. Buka and L. Kramer), Springer-Verlag, N.Y., 1996.
9. A. Weber, E. Bodenschatz, and L. Kramer, Adv. Mater. **3**, 191 (1991).
10. S. Nasuno, O. Sasaki, and S. Kai, Phys. Rev. A. **46**, 4954 (1992).
11. N. Oikawa, Yo. Hidaka, and Sh. Kai, Phys. Rev. E. **70**, 066204-1 (2004).
12. H. Yamazaki, S. Kai, and K. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 1 (1987).
13. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3541 (1989).
14. S. Nasuno, S. Takeuchi, and Y. Sawada, Phys. Rev. A **40**, 3457 (1989).
15. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, Phys. Rev. A **42**, 5998 (1990).
16. V.A. Delev, P. Toth, and A.P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **351**, 179 (2000).
17. S. Tatsumi, M. Sano, and A.G. Rossberg, Phys. Rev. E **73**, 011704-1 (2006).
18. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, Physica D **32**, 135 (1988).
19. L. Kramer, E. Bodenschatz, W. Pesch et al., Liq. Cryst. **5**, 699 (1989).
20. L. Kramer, E. Bodenschatz, and W. Pesch, Phys. Rev. Lett. **64**, 2588 (1990).
21. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, J. Stat. Phys. **64**, 1007 (1991).
22. P. Bak, Rep. Prog. Phys. **45**, 587 (1982).
23. Т.А. Конторова, Я.И. Френкель, ЖЭТФ **8**(89), 1340 (1938).
24. F.C. Frank and J.H. van der Merwe, Proc. R. Soc. London A **198**, 205 (1949).
25. M. Lowe and J.P. Gollub, Phys. Rev. A **31**, 3893 (1985).
26. О.А. Скалдин, В.А. Делев, Е.С. Шиховцева и др., Письма в ЖЭТФ **93**, 431 (2011).
27. E.S. Shikhovtseva, Physica A **303**, 133 (2002).
28. А.Н. Чувыров, О.А. Скалдин, В.А. Делев и др., ЖЭТФ **130**, 1072 (2006).
29. Л.М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, М.: Наука, 1978.
30. R.H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **67**, 155 (1975).
31. A. Hertrich, A.P. Krekhov, and O.A. Scaldin, J. Phys. II France **4**, 239 (1994).
32. Е.С. Шиховцова, О.А. Пономарев, Письма в ЖЭТФ **64**, 467 (1996).
33. E.S. Shikhovtseva, Phys. Low-Dim. Struct. **11/12**, 77 (1999).
34. D.W. McLauglin and A.C. Scott, Phys. Rev. A **18**, 1652 (1978).