Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 3, с. 185 – 191 © 2013 г. 10 февраля

О топологии ферми-поверхности в плотной нейтронной материи

С. С. Панкратов+, М. В. Зверев+*1)

+Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

*Московский физико-технический институт, 147000 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 29 декабря 2012 г.
После переработки 9 января 2013 г.

Рассмотрена модель плотной нейтронной материи, в которой топологическая перестройка основного состояния системы квазичастиц Ландау, связанная с рождением второго листа ферми-поверхности, происходит по двум различным сценариям. Сценарий перестройки зависит от соотношения между величиной волнового вектора q_c критических спин-изоспиновых флуктуаций и ферми-импульсом $p_{\rm F}$. При $q_c < p_{\rm F}$ перестройка происходит непрерывным образом с обращением в нуль топологической жесткости, а при $q_c > p_{\rm F}$ в заполненной ферми-сфере скачком рождается полость радиусом $\simeq 0.5\, p_{\rm F}$.

DOI: 10.7868/S0370274X13030107

В последние годы в физике конденсированных систем широко используется понятие топологической среды – класса систем, характеризующихся некоторой нетривиальной топологией в импульсном пространстве, устойчивой к разного рода деформациям среды [1–3]. В это понятие входят также квантовые вакуумы в физике элементарных частиц (см., например, [4]). Топологические классы различаются по размерности $\mathcal{D}$ многообразия узлов одночастичного спектра системы $\varepsilon(\mathbf{p})$: от топологических изоляторов, спектры которых не имеют узлов, до систем с плоскими зонами, для которых размерность $\mathcal{D}$ совпадает с размерностью самой системы. К топологическим средам относятся и системы, свойства которых описываются теорией ферми-жидкости Ландау: жидкий ^{3}He, электронные системы в металлах и инверсионных слоях полевых транзисторов, нейтронная материя в нейтронных звездах. Многообразие узлов спектра в этих системах – ферми-поверхность – имеет размерность $\mathcal{D}$, на единицу меньшую размерности системы. Присущая этим системам нетривиальная топология, делающая их топологической средой, состоит в том, что ферми-поверхность имеет свойства вихря: гриновская функция меняет фазу на 2π при обходе вокруг нее по контуру в $(i\varepsilon, \mathbf{p})$-пространстве [3]. Будучи топологическим дефектом, ферми-поверхность оказывается устойчивой по отношению к умеренному усилению корреляций, что сохраняет применимость ферми-жидкостной квазичастичной картины к описанию этих систем.

При значительном усилении корреляций в системе ее ферми-поверхность может перестраиваться. В однородных и изотропных ферми-системах перестройка происходит тогда, когда нарушается условие устойчивости основного состояния с импульсным распределением квазичастиц $n_{\rm FL}(p) = \theta(p_{\rm F} - p)$, требующее положительного изменения энергии основного состояния E при любых допустимых принципом Паули изменениях $\delta n_{\rm FL}(\mathbf{p})$, удовлетворяющих условию сохранения числа частиц:

$$\int \delta n_{\rm FL}(\mathbf{p})\, d\upsilon = 0, \tag{1}$$

где $d\upsilon = d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3$. В теории Ландау энергия E есть функционал импульсного распределения квазичастиц. Ее изменение при малых вариациях распределения дается соотношением

$$\delta E = 2\int \varepsilon(\mathbf{p})\, \delta n_{\rm FL}(\mathbf{p})\, d\upsilon + \\ + \iint f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, \delta n_{\rm FL}(\mathbf{p})\, \delta n_{\rm FL}(\mathbf{p}')\, d\upsilon\, d\upsilon', \tag{2}$$

где $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ – функция взаимодействия квазичастиц.

Один из возможных сценариев перестройки ферми-поверхности заключается в ее деформации без изменения топологии. Напомним, что анализ такого сценария, восходящий к пионерской работе И.Я. Померанчука [5], предполагает линейность одночастичного спектра $\varepsilon(\mathbf{p}) = v_{\rm F}(p - p_{\rm F})$ вблизи ферми-поверхности и положительность групповой скорости $v_{\rm F} = (d\varepsilon/dp)_{p=p_{\rm F}}$. Рассматривается малое изменение формы ферми-поверхности $p_{\rm F} \to p_{\rm F}(1+\varphi)$, которое разлагается по сферическим

1)e-mail: zverev@mbslab.kiae.ru

гармоникам. Сохранение лишь квадратичных по φ членов сводит вариацию энергии к квадратичной форме, требование положительной определенности которой порождает условия устойчивости Померанчука: неравенство $F_L = f_L p_{\rm F}^2/v_{\rm F}\pi^2 > -(2L+1)$ для каждого $L \geq 0$. Нарушение этого условия для L-й гармоники приводит к тому, что при малых деформациях φ_L изменение энергии $\delta E = A_L\varphi_L^2$ (где $A_L = (p_{\rm F}^2 v_{\rm F}/2)[1 + F_L/(2L+1)]$ – жесткость системы относительно L-деформации) оказывается отрицательным и система теряет сферическую симметрию.

Равновесная деформация ферми-поверхности может быть определена из соотношения Ландау [6–9]:

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{M} + \int f(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\,dv', \tag{3}$$

рассматриваемого как уравнение для деформированного спектра $\varepsilon(\mathbf{p})$, в котором $n(\mathbf{p}) = \theta[-\varepsilon(\mathbf{p})]$. В случае малой равновесной деформации выражение (2) для вариации энергии принимает вид

$$\delta E = A_L\varphi_L^2 + B_L\varphi_L^3 + C_L\varphi_L^4 + \ldots \tag{4}$$

В соответствии с теорией фазовых переходов Ландау при $B_L > 0$, $C_L > 0$ L-деформация происходит при обращении в нуль жесткости A_L фазовым переходом второго рода. Если же в разложении (4) коэффициент B_L оказывается отрицательным, то ферми-поверхность может претерпевать L-деформацию фазовым переходом первого рода при $A_L > 0$, т.е. без нарушения условия Померанчука. Примером служит переход системы в ферромагнитное состояние, который может происходить как непрерывно с нарушением условия Померанчука в спиновом канале (стонеровский сценарий), так и скачком без нарушения этого условия (блоховский сценарий). Отметим, что деформированная ферми-поверхность сохраняет свою топологию. Поэтому система продолжает описываться теорией Ландау.

Другой возможный сценарий перестройки поверхности Ферми – изменение ее топологии без изменения симметрии. Изучение топологических переходов в конденсированных системах восходит к работе И.М. Лифшица [10]. В ней рассматривался топологический переход 5/2-рода в анизотропной электронной системе в кристаллической решетке, обусловленный "всплыванием" седловой точки на ферми-поверхность при изменении химического потенциала.

Для однородных и изотропных систем известны два типа топологической перестройки ферми-поверхности: 1) изменение числа ее связных областей [11–17], 2) изменение размерности $\mathcal{D}$ многообразия узлов спектра $\varepsilon(p)$ [18–20]. В качестве параметра, служащего количественной мерой топологической перестройки, обычно выступает относительный размер η перестроенной области импульсного пространства. В разложении энергии системы по этому параметру:

$$\delta E = A_T\eta^2 + B_T\eta^3 + C_T\eta^4 + \ldots, \tag{5}$$

коэффициент $A_T \propto (d^2E/d\eta^2)_{\eta=0}$ играет роль *топологической жесткости*. Само же это разложение позволяет анализировать род топологического перехода. Если коэффициент $B_L > 0$, то топологическая перестройка ферми-поверхности в однородных и изотропных системах происходит при обращении в нуль топологической жесткости A_T, т.е. переходом второго рода. Жесткость A_T становится равной нулю, если спектр $\varepsilon(p)$ и его производная $\varepsilon'(p)$ обращаются в нуль в одной и той же точке $p = p_b$. Это происходит, когда: а) в узловой точке спектра $p_b = p_{\rm F}$ его производная $\varepsilon'(p_{\rm F})$ зануляется, т.е. расходится эффективная масса $m^* = p_{\rm F}/\varepsilon'(p_{\rm F})$, или, другими словами, на ферми-поверхности возникает плоский перегиб спектра (рис. 1a), b) экстремальная точка $p_b \neq p_{\rm F}$ становится узловой (случай $p_b < p_{\rm F}$ показан на рис. 1b).

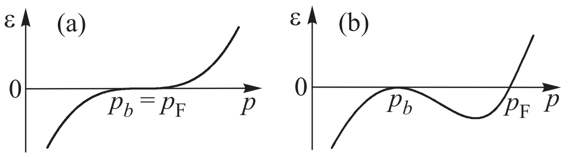

Рис. 1. Два сценария обращения в нуль топологической жесткости

Как показывает анализ, проведенный в работах [21–23], случай (а), возможно, реализуется в разреженном $2D$ электронном газе, а случай (б) может иметь место в плотной нейтронной материи.

Как и при деформации ферми-поверхности, изменение положительного знака коэффициента B_T в разложении (5) на отрицательный порождает возможность топологической перестройки при положительной топологической жесткости A_T, т.е. фазовым переходом первого рода. Топологические переходы первого рода в анизотропных системах широко обсуждаются в литературе [24–26]. Для однородных и изотропных систем нам известна лишь модель перехода первого рода с изменением размерности $\mathcal{D}$ многообразия узлов спектра (переход в состояние с плоской зоной), обусловленного учетом обратного влияния одночастичной топологической перестройки на

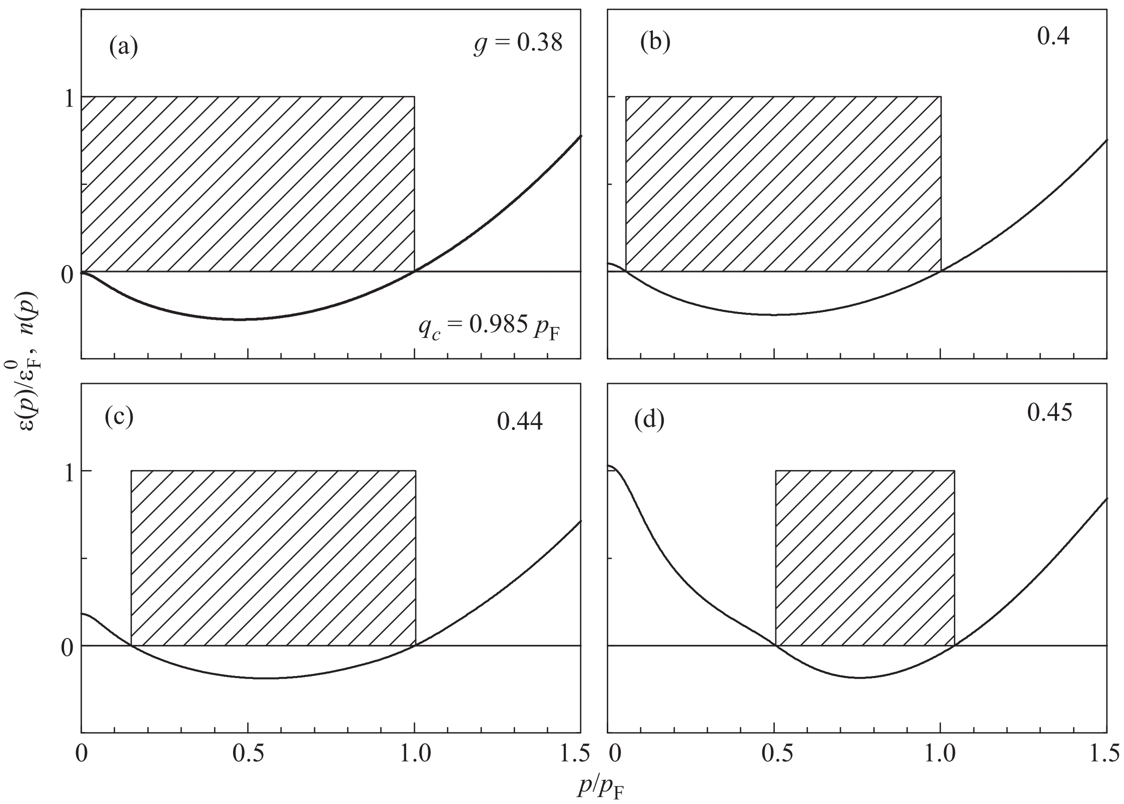

Рис. 2. Эволюция спектра и импульсного распределения основного состояния с увеличением константы связи: $g = 0.38$ (a), 0.4 (b), 0.44 (c), 0.45 (d), при $q_c = 0.985\, p_F$

коллективные степени свободы [27]. В работе [28] обсуждалась модель $2D$ электронного газа, в которой за точкой непрерывной топологической перестройки состояния Ландау может скачком происходить переход между топологически эквивалентными состояниями с тремя листами ферми-поверхности: электронным гало и дырочным карманом. В настоящей работе мы хотим показать возможность топологического перехода первого рода из состояния Ландау в состояние с новыми листами ферми-поверхности на примере модели плотной нейтронной материи.

В этой системе при увеличении плотности ρ до критического значения $\rho_{\pi^0} \lesssim 2\rho_0$ (где ρ_0 – равновесная ядерная плотность) происходит конденсация π^0-мезонов [29–32]. При плотностях, близких к ρ_{π^0}, в функции взаимодействия квазичастиц доминирует слагаемое, обусловленное обменом спин-изоспиновыми флуктуациями с квантовыми числами π^0-мезона. Это слагаемое имеет вид [30]

$$f(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}_\sigma \mathrm{Sp}_{\sigma'}\, f(\mathbf{p},\boldsymbol{\sigma},\mathbf{p}',\boldsymbol{\sigma}') =$$

$$= \frac{\pi^2}{mp_F}\frac{g}{[(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2/q_c^2-1]^2+\kappa^2}, \qquad (6)$$

где g, q_c и κ – параметры, зависящие от плотности системы. Соотношение (3) и условие нормировки

$$2\int n(\mathbf{p})\, dv = \rho \qquad (7)$$

образуют систему уравнений для самосогласованного вычисления одночастичного спектра $\varepsilon(\mathbf{p})$ и квазичастичного импульсного распределения $n(\mathbf{p})$, которая несложно решается численно посредством стандартных итерационными схем.

В данной работе, не претендуя на реалистическое описание эволюции нейтронной материи с ростом ее плотности, мы разберем модельную задачу о топологических переходах в этой системе при изменении константы связи g и фиксированных значениях параметров q_c и κ. Критическое значение параметра κ, при котором начинаются топологические переходы, оценивалось в работе [23] как $\kappa \simeq 0.14$. Это значение мы и будем здесь использовать. Про критический же волновой вектор известно, что $q_c \simeq p_F$. Мы выберем несколько его значений в окрестности p_F.

Начнем анализ со значения $q_c = 0.985\, p_F$. На рис. 2 изображена эволюция спектра и импульсного распределения основного состояния системы

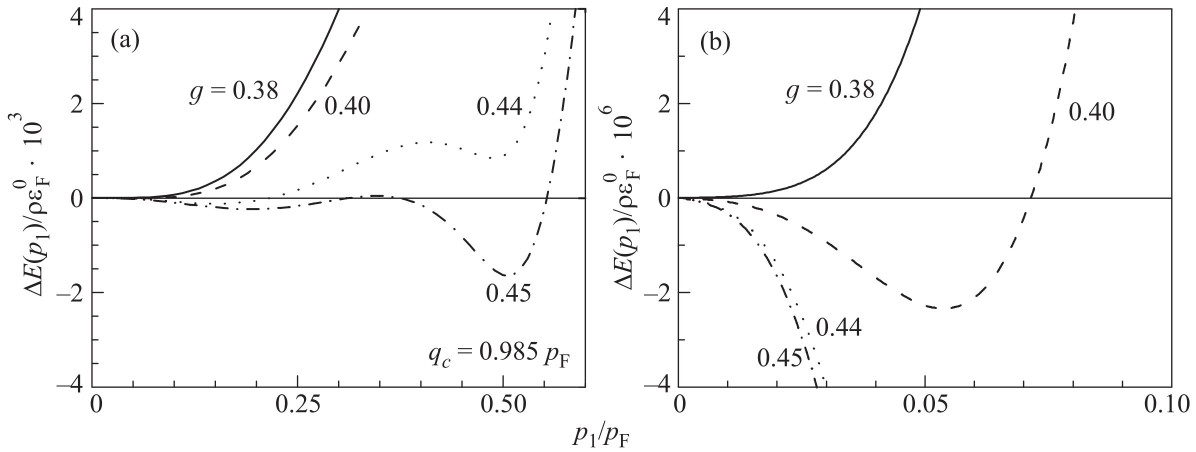

Рис. 3. Энергия состояний с пузырьком радиуса p_1 в импульсном распределении, отсчитанная от энергии ферми-жидкостного состояния, для значений g, соответствующих рис. 2. (a) – Общий вид. (b) – Увеличенная область начала координат

при увеличении константы связи g. При $g = 0.38$ спектр $\varepsilon(p)$ одновременно со своей производной $\varepsilon'(p)$ обращается в нуль в точке $p_b = 0$ (рис. 2a) и топологическая жесткость системы становится равной нулю. При дальнейшем росте константы g ферми-поверхность претерпевает топологическую перестройку непрерывным переходом второго рода: рождается ее второй сферический лист малого радиуса p_1, ограничивающий маленький *пузырек* в импульсном распределении квазичастиц $n_2(p) = \theta(p_2 - - p) - \theta(p_1 - p)$ (будем в дальнейшем называть состояние с пузырьком B-состоянием). Одночастичный спектр $\varepsilon(p)$ и распределение новорожденного переходом второго рода B_2^{II}-состояния с двумя листами ферми-поверхности (верхний индекс обозначает род перехода, в котором это состояние родилось, нижний – число листов ферми-поверхности) показаны рис. 2b. С ростом константы g радиус p_1 пузырька непрерывно растет (рис. 2c) но при $g \simeq 0.445$ меняется скачком от $0.17\,p_F$ до $0.50\,p_F$ (рис. 2c).

Чтобы понять характер происходящих топологических перестроек импульсного распределения квазичастиц, полезно рассмотреть поведение функционала энергии $E[n]$ при увеличении константы взаимодействия. Благодаря зависимости функции взаимодействия квазичастиц (6) от относительного импульса $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ явный вид этого функционала следует из выражения (3):

$$E[n]=2\int \frac{p^2}{2m}\,n(\mathbf{p})\,dv + \int f(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,n(\mathbf{p})\,n(\mathbf{p}')\,dv\,dv'. \tag{8}$$

На рис. 3 приведена разность ΔE энергий состояния B_2 и ферми-жидкостного состояния (FL). Поскольку радиус внешней ферми-сферы p_2 связан с радиусом полости p_1 условием нормировки $p_2^3 - p_1^3 = = p_F^3$, разность ΔE есть функция одной переменной p_1. Отношение $\eta = p_1/p_F$ представляет собой относительный размер перестроенной области импульсного пространства и служит упоминавшейся выше количественной мерой топологической перестройки. Как видно из рис. 3, топологическая жесткость $A_T \propto \propto \Delta E''(p_1 = 0)$ ферми-жидкостного состояния с импульсным распределением $n_{\rm FL}(p)$ равна нулю при $g = 0.38$ и отрицательна при $g > 0.38$. При $g = 0.4$ минимум функции $\Delta E(p_1)$ находится в точке $p_1 \simeq \simeq 0.05\,p_F$ и отвечает состоянию B_2^{II}, изображенному на рис. 2b. При дальнейшем увеличении константы связи на кривой $\Delta E(p_1)$ возникает второй минимум в точке $p_1 \simeq 0.5\,p_F$, отвечающий импульсному распределению с пузырем большого радиуса p_1 (B_2^{I}-состояние). При $g < 0.445$ это состояние метастабильно: его минимум мельче минимума, связанного с B_2^{II}-состоянием, которое показано на рис. 2c. Но при $g > 0.445$ энергия B_2^{I}-состояния опускается ниже энергии B_2^{II}-состояния и происходит скачкообразный переход между состояниями с одинаковой топологией: от импульсного распределения с маленьким пузырьком к распределению с большим пузырем (рис. 2d).

При значении волнового вектора $q_c = p_F$ топологическая перестройка происходит иначе (рис. 4 и 5). При $g \simeq 0.44$, когда топологическая жесткость $A_T > > 0$, у функции $\Delta E(p_1)$ (штриховая кривая на рис. 5) появляется минимум в точке $p_1 \simeq 0.5\,p_F$. Этот минимум отвечает метастабильному B_2^{I}-состоянию с большим пузырем в импульсном распределении. Основ-

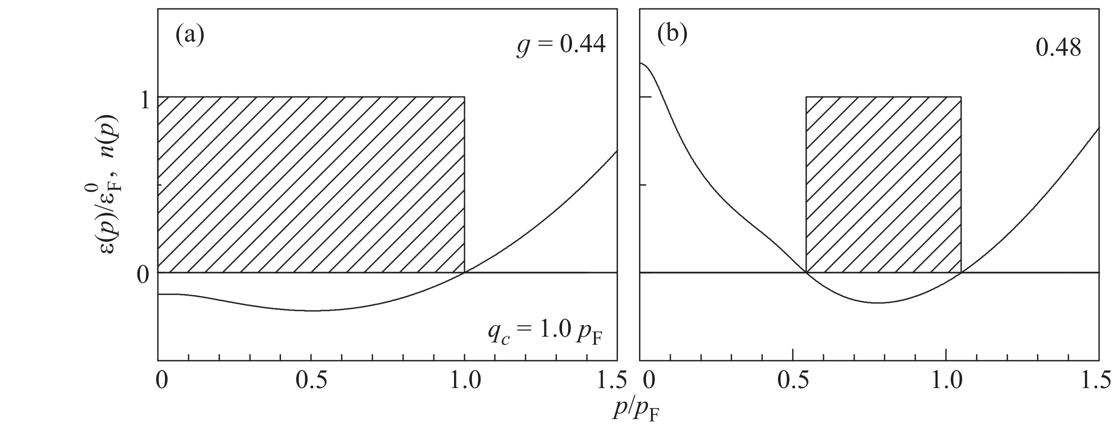

Рис. 4. То же, что на рис. 2, при $q_c = 1.0\,p_F$ и $g = 0.44$ (a), 0.48 (b)

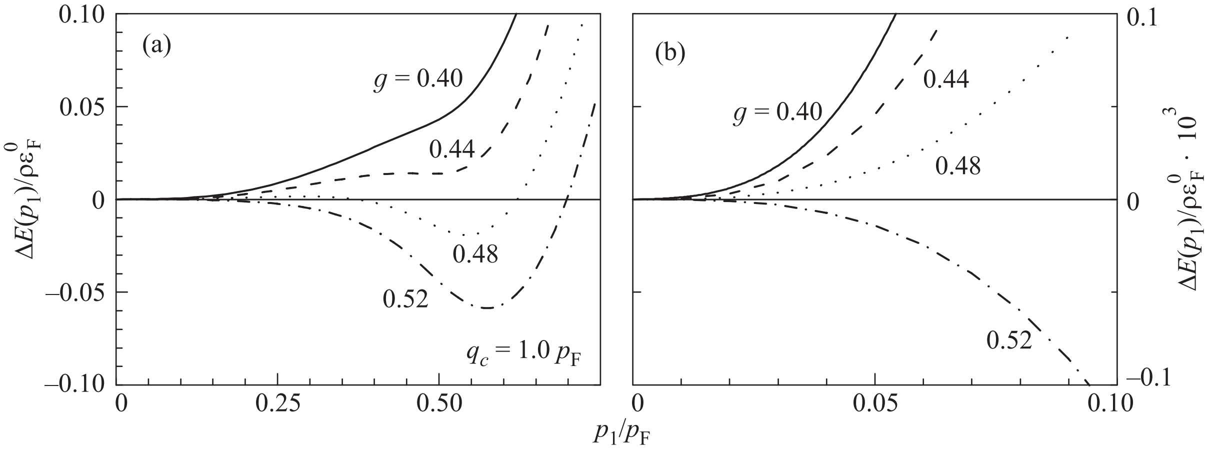

Рис. 5. То же, что на рис. 3, при $q_c = 1.0\,p_F$

ным же остается FL-состояние (рис. 4a). При $g \simeq 0.48$ топологическая жесткость A_T еще положительна, но $\mathrm{B}_2^{\mathrm{I}}$-минимум в точке $p_1 \sim 0.5\,p_F$ опускается ниже FL-минимума в точке $p_1 = 0$ (пунктирная кривая на рис. 5). Топологический переход из состояния FL в состояние $\mathrm{B}_2^{\mathrm{I}}$ с двумя листами ферми-поверхности происходит скачком. Спектр и импульсное распределение $\mathrm{B}_2^{\mathrm{I}}$-состояния при $g = 0.48$ показаны на рис. 4b.

При $q_c \geq 1.06\,p_F$ описанный выше сценарий топологического перехода первого рода несколько меняется. Метаморфозы, происходящие при $q_c = 1.09\,p_F$, иллюстрируются рис. 6 и 7. При $g \simeq 0.49$ над основным ферми-жидкостным состоянием (рис. 6a) рождается метастабильное состояние $\mathrm{B}_3^{\mathrm{I}}$ с тремя листами ферми-поверхности. Его спектр и импульсное распределение $n_3(p) = \theta(p_3-p)-\theta(p_2-p)+\theta(p_1-p)$ изображены на рис. 6b. При $g \simeq 0.5$ состояние $\mathrm{B}_3^{\mathrm{I}}$, оставаясь метастабильным, непрерывным переходом меняет топологию: маленькая внутренняя заполненная сфера исчезает и возникает состояние $\mathrm{B}_2^{\mathrm{I}}$ с большим пузырем. Спектр и импульсное распределение квазичастиц для этого состояния показаны на рис. 6d, а разность $\Delta E(p_1)$ при $g = 0.51$ изображена сплошной кривой на рис. 7. При этом значении g минимум функции $\Delta E(p_1)$, расположенный при $p_1 \simeq 0.6\,p_F$, лежит выше минимума в нуле, т.е. основным состоянием все еще является FL-состояние с $n(p) = n_{\mathrm{fl}}(p)$ (рис. 6c). При $g \simeq 0.54$ состояние $\mathrm{B}_2^{\mathrm{I}}$ опускается по энергии ниже FL-состояния и путем перехода первого рода становится основным.

На рис. 8 изображена (цвета см. в on line версии) фазовая диаграмма топологических состояний нейтронной материи в модели (6) при различных значениях параметров q_c, g. Три вертикально расположенные группы точек отвечают рассмотренным выше расчетам при значениях $q_c = 0.985\,p_F$, $1.0\,p_F$ и $1.09\,p_F$. Синяя сплошная линия отвечает непрерывным топологическим переходам между FL-состоянием и состоянием $\mathrm{B}_2^{\mathrm{II}}$. Зеленая линия соответствует переходам первого рода между состояниями

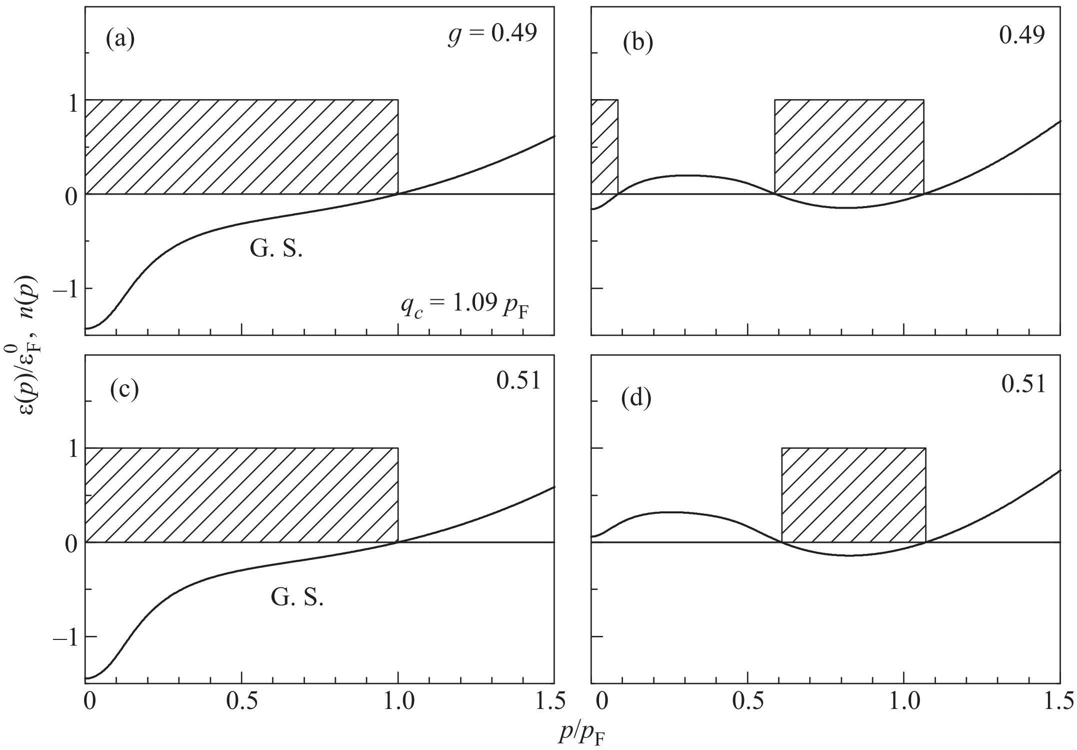

Рис. 6. То же, что на рис. 2, при $q_c = 1.09\,p_F$ и $g = 0.49$ (a, b), 0.51 (c, d). Левые панели отвечают основным состояниям, правые – метастабильным

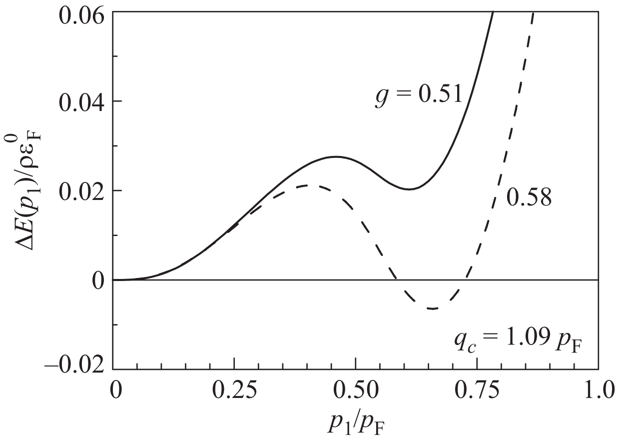

Рис. 7. То же, что на рис. 3, при $q_c = 1.09\,p_F$ и $g = 0.51$, 0.58

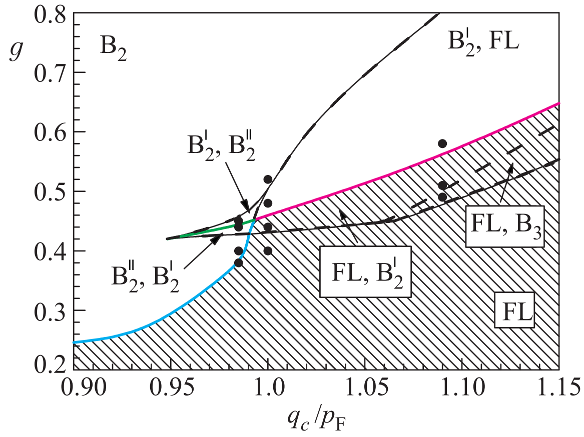

Рис. 8. Фазовая диаграмма топологических состояний нейтронного вещества. Тип основного состояния указан первым

B_2^{II} и B_2^{I}, имеющими тождественную топологию, но разную геометрию. Наконец, красная линия разделяет FL- и B_2^I-состояния с разной топологией (числом листов ферми-поверхности), переход между которыми происходит первым родом. Штриховые линии показывают границы областей существования метастабильных состояний и переходы между ними.

Итак, мы рассмотрели модель плотной нейтронной материи вблизи точки пионной конденсации, где в функции взаимодействия квазичастиц доминирует вклад обмена спин-изоспиновыми флуктуациями. Сильная импульсная зависимость этого вклада приводит к топологической перестройке импульсного распределения квазичастиц в состоянии Ландау. Сценарий перестройки определяется величиной волнового вектора q_c критических спин-изоспиновых флуктуаций. При $q_c < p_F$ перестройка происходит непрерывным образом при обращении в нуль топологической жесткости (переход второго рода). При $q_c > p_F$ топологический переход происходит скачком при положительной топологической жесткости (переход первого рода). За точкой топологической перестройки ферми-жидкостного состояния возможны также переходы первого рода между состояниями одинаковой топологии, но разной геометрии.

Авторы признательны М. Балдо, Э.Е. Саперштейну и В.А. Ходелю за постоянный интерес к работе и плодотворные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского министерства образования и науки (грант # НШ-215.2012.2).

1. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
2. P. Horava, Phys. Rev. Lett. **95**, 016405 (2005).
3. G. E. Volovik, Springer Lecture Notes in Physics **718**, 31 (2007).
4. M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **86**, 034505 (2012) and references therein.
5. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **8**, 361 (1959).
6. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **35**, 97 (1958).
8. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*. Ч 2, М.: Физматлит, 2001.
9. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М.: Физматгиз, 1962.
10. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **38**, 1569 (1960).
11. H. Fröhlich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).
12. M. de Llano and J. P. Vary, Phys. Rev. C **19**, 1083 (1979).
13. M. de Llano, A. Plastino, and J. G. Zabolitzky, Phys. Rev. C **20**, 2418 (1979).
14. V. C. Aguilera-Navarro, R. Belehrad, M. de Llano et al., Phys. Rev. C **22**, 1260 (1980).
15. М. В. Зверев, М. Балдо, ЖЭТФ **114**, 2078 (1998).
16. С. А. Артамонов, Ю. Г. Погорелов, В. Р. Шагинян, Письма в ЖЭТФ **68**, 897 (1998).
17. J. Quintanilla and A. J. Schofield, Phys. Rev. B **74**, 115126 (2006).
18. В. А. Ходель, В. Р. Шагинян, Письма в ЖЭТФ **51**, 488 (1990).
19. Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **53**, 208 (1991).
20. P. Nozières, J. Phys. I France **2**, 443 (1992).
21. В. В. Борисов, М. В. Зверев, Письма в ЖЭТФ **81**, 623 (2005).
22. D. N. Voskresensky, V. A. Khodel, M. V. Zverev, and J. W. Clark, Astrophys. J. **533**, L127 (2000).
23. V. A. Khodel, J. W. Clark, M. Takano, and M. V. Zverev, Phys. Rev. Lett. **93**, 151101 (2004).
24. Я. М. Блантер, И. М. Каганов, Д. В. Посвянский, УФН **165**, 213 (1995).
25. I. Khavkine, C. H. Chung, V. Oganesyan, and H. Y. Kee, Phys. Rev. B **70**, 155110 (2004).
26. H. Yamase, V. Oganesyan, W. Metzner, and Y. Kee, Phys. Rev. B **72**, 035114 (2005).
27. M. Baldo, V. V. Borisov, J. W. Clark et al., J. Phys.: Condens. Matter **16**, 6431 (2004).
28. С. С. Панкратов, М. В. Зверев, М. Балдо, Письма в ЖЭТФ **94**, 653 (2011).
29. A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. **50**, 107 (1978).
30. A. B. Migdal, E. E. Saperstein, M. A. Troitsky, and D. N. Voskresensky, Phys. Rep. **192**, 179 (1998).
31. R. B. Wiringa, V. Fiks, and A. Fabrocini, Phys. Rev. C **38**, 1010 (1988).
32. A. Akmal, V. R. Pandharipande, and D. G. Ravenhall, Phys. Rev. C **58**, 1804 (1998).