

# О модуляционной неустойчивости поверхностных волн на крупномасштабном сдвиговом течении

В. П. Рубан<sup>1)</sup>

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 декабря 2012 г.

Рассмотрена задача о модуляционной неустойчивости слабонелинейной квазимонохроматической волны на поверхности глубокой воды при наличии коллинеарного стационарного крупномасштабного неоднородного течения (например, типа струи). В некотором диапазоне (тупых) углов падения волны по направлению к течению крутизна преломленной волны значительно увеличивается, что способствует усилению нелинейных эффектов, в том числе образованию так называемых аномальных волн (*rogue waves*). Выведено соответствующее данной ситуации нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами, удобное для анализа модуляционной неустойчивости.

DOI: 10.7868/S0370274X1304005X

Аномальные волны (известные в океанографии как волны-убийцы, *rogue waves*, *freak waves*) в настоящее время являются объектом пристального внимания исследователей (см., например, [1–4] и имеющиеся там ссылки). Как правило, аномальная волна представляет собой результат развития так называемой модуляционной неустойчивости, проявляющейся в достаточно длинных и крутых волновых группах за счет самофокусирующего нелинейного взаимодействия [5–10]. Грубой количественной мерой вероятности появления большой индивидуальной волны в некотором состоянии морской поверхности служит произведение характерной волновой крутизны  $\varepsilon = \langle |\mathbf{k}| |A| \rangle$  и среднего числа  $N$  волн в группе (где  $A$  – амплитуда волны,  $\mathbf{k} = (k, m)$  – волновой вектор в горизонтальной плоскости  $(xy)$ ). Такое заключение следует из анализа простейшей модели – нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), – в которой учитываются дисперсия волн и их нелинейность (подробности см., например, в работах [11–13]). Для того чтобы в естественных условиях указанная величина  $I \sim \varepsilon N$  достигла значений порядка единицы, когда эффективно включается модуляционная неустойчивость, требуется воздействие некоторых специальных механизмов. Одним из них является взаимодействие волн с пространственно неоднородными течениями (см. [14–18] и ссылки на них). Как известно, во-первых, крупномасштабное стационарное течение  $\mathbf{U}(x, y) = (U, V)$ , модифицирует локальный закон дисперсии линейных поверхностных волн согласно формуле  $\omega = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) + \sqrt{g|\mathbf{k}|}$  (где  $\omega$  – циклическая частота,  $g$  – ускорение свободного падения).

В результате волна преломляется. Во-вторых, неоднородное течение изменяет амплитуду преломленной волны в соответствии с принципом сохранения волнового действия [19]. Это может приводить к локальной концентрации волновой энергии, особенно если имеет место образование каустик.

Следует отметить, что к настоящему времени проведены многочисленные расчеты локального усиления стационарных волн на различных неоднородных течениях, выполненные в рамках так называемой лучевой теории, которая, однако, не учитывает дисперсионных эффектов (см. [1, 14–17] и ссылки в них). В то же время задача о модуляционной неустойчивости квазимонохроматической волны при наличии неоднородного течения, требующая аккуратного учета дисперсии наряду с нелинейностью, остается в целом недостаточно изученной. Надежных теоретических результатов здесь мало, поскольку уже на начальном этапе исследований, т.е. при выводе коэффициентов соответствующего обобщенного НУШ, от которых зависит характер развития модуляционной неустойчивости, возникают трудности как технического, так и принципиального характера. В попытках различными способами преодолеть эти трудности разными авторами в разное время были получены существенно отличающиеся между собой уравнения для волновой огибающей (см. [20–23] и критические замечания в недавней работе [24]). В результате накопленного опыта стало понятно, что корректное вычисление коэффициентов НУШ в явном виде возможно лишь в тех случаях, когда удастся решить уравнение Гамильтона–

<sup>1)</sup>e-mail: ruban@itp.ac.ru

Якоби,  $\omega = (\mathbf{U} \cdot \nabla S) + \sqrt{g|\nabla S|}$ , для так называемого укороченного действия  $S(x, y)$ . В общей ситуации функция  $S$  не является однозначной во всей плоскости  $(xy)$ , т.е. имеются каустики. В таком случае глобальное описание волны в рамках НУШ оказывается вообще невозможным. Кроме того, коэффициенты НУШ зависят еще и от выбора эволюционной переменной. Если это время  $t$ , то наиболее изящно уравнение записывается в терминах огибающей  $\Psi(x, y, t)$  так называемого комплексного канонического поля  $\alpha(x, y, t) = (|\hat{\mathbf{k}}|/g)^{-1/4} A(x, y, t)$ , где  $|\hat{\mathbf{k}}|^{-1/4} = (-\partial_x^2 - \partial_y^2)^{-1/8} = (-\Delta)^{-1/8}$  – псевдодифференциальный оператор. Приближенное уравнение для  $\alpha$  в линейном пределе имеет следующий вид:

$$i\alpha_t + \frac{i}{2}[(\mathbf{U} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \mathbf{U})]\alpha - (g|\hat{\mathbf{k}}|)^{1/2}\alpha \approx 0. \quad (1)$$

Если вводится медленная огибающая волны по формуле  $\alpha = \Psi \exp[-i\omega t + iS(x, y)]$ , производится разложение

$$|\hat{\mathbf{k}}|^{1/2}[\Psi e^{iS}] = e^{iS}[\sqrt{|\nabla S|} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \dots]\Psi. \quad (2)$$

Здесь  $\hat{D}_1$  и  $\hat{D}_2$  – эрмитовы дифференциальные операторы, соответственно, первого и второго порядков с переменными коэффициентами, зависящими от функции  $S(x, y)$ , такие, что с точностью до вторых производных выполняется соотношение

$$-[\sqrt{|\nabla S|} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2]^4 \Psi \approx \Delta \Psi + 2i(\nabla S \cdot \nabla \Psi) + [i\Delta S - (\nabla S)^2]\Psi. \quad (3)$$

Приведем явный вид этих операторов:

$$\hat{D}_1 = -\frac{i}{2} \left[ \left( \frac{\mathbf{C}_{\text{gr}}}{\sqrt{g}} \cdot \nabla \right) + \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{C}_{\text{gr}}}{\sqrt{g}} \right) \right], \quad \frac{\mathbf{C}_{\text{gr}}}{\sqrt{g}} = \frac{\mathbf{k}}{2\sqrt{|\mathbf{k}|^3}}, \quad (4)$$

$$\hat{D}_2 = -\frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \frac{\delta_{ab}}{4\sqrt{|\mathbf{k}|^3}} - \frac{3}{8} \frac{k_a k_b}{\sqrt{|\mathbf{k}|^7}} \right] \frac{\partial}{\partial x_b}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{k}(x, y) = \nabla S(x, y)$ , буквами  $a$  и  $b$  обозначены тензорные двумерные индексы, по которым производится суммирование. С учетом нелинейного сдвига частоты  $\delta\omega \approx \sqrt{g|\mathbf{k}|}|\mathbf{k}|^2|A|^2/2$  приближенное уравнение движения для огибающей  $\Psi$  имеет вид

$$i\Psi_t + \frac{i}{2}[(\mathbf{U} + \mathbf{C}_{\text{gr}}) \cdot \nabla + \nabla \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{C}_{\text{gr}})]\Psi = \sqrt{g}\hat{D}_2\Psi + \frac{|\mathbf{k}|^3}{2}|\Psi|^2\Psi. \quad (6)$$

Очевидно, что при использовании уравнения (6) аналитическое исследование модуляционной неустойчивости затруднено необходимостью нахождения стационарного нетривиального решения

$\Psi_*(x, y) \exp(-i\omega_* t)$ , а также собственных функций, зависящих от  $x$  и  $y$ , по которым раскладывается решение НУШ, линеаризованного на фоне этого решения. Но если течение  $\mathbf{U}$  зависит только от одной координаты, то удобнее оказывается взять в качестве эволюционной переменной именно эту координату. Тогда НУШ будет иметь достаточно компактную структуру, а собственные функции будут представлять собой обычные плоские экспоненты от второй координаты и времени. В частности, в недавней работе [24] таким способом было рассмотрено взаимодействие волн с потенциальными течениями типа  $(U(x), 0)$ . Подобная модель приближенно описывает, например, отливные течения над неоднородным морским дном. В природе встречается, однако, и другой важный класс течений, где довольно часто возникают волны-убийцы. Это непотенциальные течения типа струи, которым в идеализированном случае соответствует формула  $\mathbf{U} = (U(y), 0)$ . Взаимодействию волн именно с такими неоднородными сдвигowymi течениями и посвящена данная работа.

Мы приведем здесь простой вывод НУШ для слабонелинейной квазимонохроматической волны на течении  $\mathbf{U} = (U(y), 0)$ , который не потребует от нас детального рассмотрения уравнений движения свободной поверхности. Наш вывод будет опираться только на локальный закон дисперсии и на принцип сохранения волнового действия [19].

Рассмотрим сначала линейную динамику волновой огибающей (нелинейную поправку учтем позже). Для этого заметим, что строго монохроматические решения линеаризованных уравнений движения для вертикального смещения свободной поверхности, соответствующие бегущей волне, из общих соображений обязаны иметь следующий вид:

$$\eta = \text{Re} \left\{ \tilde{C} B(\omega, k, y) \times \exp \left[ -i\omega t + ikx + i \int^y m(\omega, k, U) dy \right] \right\}, \quad (7)$$

где  $\tilde{C}$  – произвольная комплексная постоянная,  $k = \text{const}$  в силу однородности системы по координате  $x$  (для определенности примем  $k > 0$ ), а функция  $m(\omega, k, U)$  является решением уравнения  $\omega = kU + g^{1/2}(k^2 + m^2)^{1/4}$ . В явном виде имеем

$$m(\omega, k, U) = \sqrt{(\omega - kU)^4/g^2 - k^2}. \quad (8)$$

Из рис. 1 видно, как может сдвинуться вдоль оси  $m$  локальный пространственный спектр волны при изменении  $U$  в соответствии с формулой (8).

Комплексная амплитуда  $B(\omega, k, y)$  меняется в зависимости от  $y$  на тех же масштабах  $\Lambda \gg 2\pi/|\mathbf{k}|$ ,

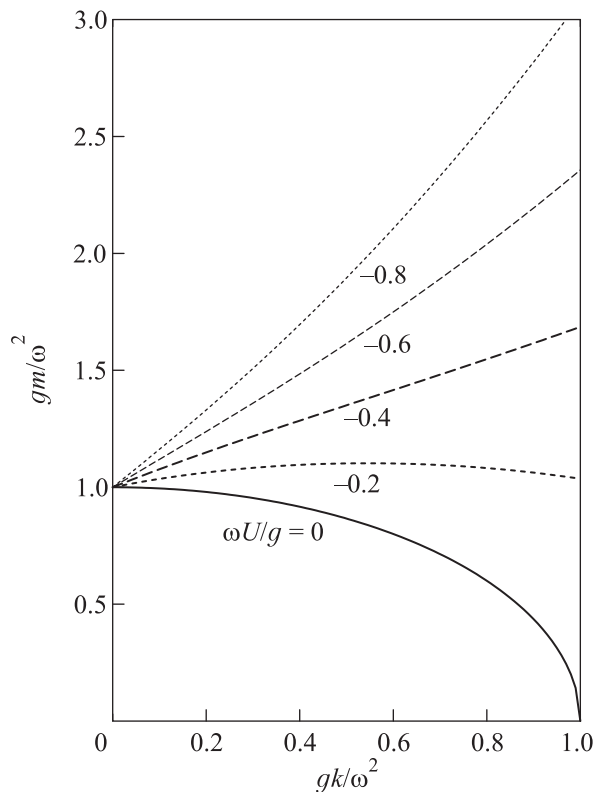


Рис. 1. Зависимость  $m$  от  $k$  при фиксированной  $\omega$  для нескольких отрицательных значений  $U$  согласно формуле (8)

что и функция  $U(y)$ . Фаза функции  $B$  нам далее не понадобится. Амплитуда же этой функции может быть приближенно определена из принципа сохранения волнового действия [19, 14]. Для стационарной линейной волны он записывается как  $\text{div}[(\partial\omega/\partial\mathbf{k})(g|B|^2/\sqrt{g|\mathbf{k}|})] \approx 0$ , то есть

$$\frac{m}{k^2 + m^2} |B(\omega, k, y)|^2 \approx \frac{g \sin \Phi_0}{\omega^2}, \quad (9)$$

где мы ввели угол  $\Phi_0 = \arctan(m_0/k)$  падения волны по отношению к оси  $x$  при  $U = 0$ . Из уравнений (8) и (9) следует важная формула для квадрата крутизны линейной монохроматической волны:

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} = \frac{[1 - (\omega U/g) \cos \Phi_0]^8 \sin \Phi_0}{\sqrt{[1 - (\omega U/g) \cos \Phi_0]^4 - \cos^2 \Phi_0}}. \quad (10)$$

Соответствующие зависимости для нескольких значений  $\Phi_0$  показаны на рис. 2. Нас интересуют здесь отрицательные  $U$ , когда волновой вектор и скорость течения образуют тупой угол. В отличие от острых углов падения, в этом случае волна практически не отражается и координата  $y$  оказывается хорошей эволюционной переменной. Начиная с критического уг-

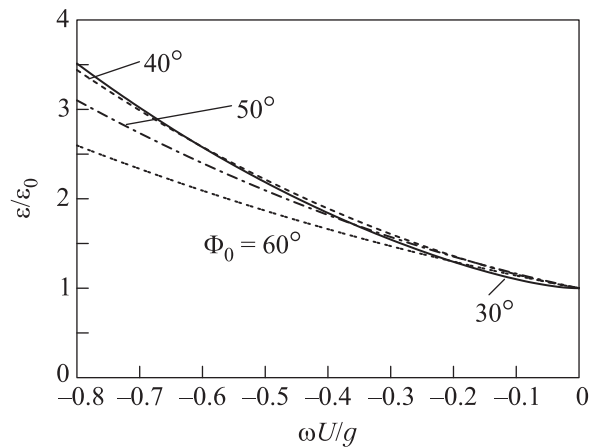


Рис. 2. Относительное изменение крутизны линейной волны на сдвиговом течении для различных углов падения согласно формуле (10)

ла  $\Phi_* = \pi/6$ , крутизна волны только увеличивается при увеличении абсолютного значения скорости течения, что способствует усилению модуляционной неустойчивости и формированию волн-убийц.

Представим теперь произвольную линейную квазимонохроматическую волну как интегральную суперпозицию монохроматических решений в узкой области параметров вблизи  $\omega$  и  $k$  (что соответствует достаточно резко локализованной спектральной функции  $C(\xi, \kappa)$ ):

$$\begin{aligned} \eta = \text{Re} \left\{ \int C(\xi, \kappa) B(\omega + \xi, k + \kappa, y) \times \right. \\ \times \exp \left[ -i(\omega + \xi)t + i(k + \kappa)x + \right. \\ \left. + i \int^y m(\omega + \xi, k + \kappa, U) dy \right] d\xi d\kappa \left. \right\} \approx \\ \approx \text{Re} \left\{ \Theta(t, x, y) B(\omega, k, y) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ -i\omega t + ikx + i \int^y m(\omega, k, U) dy \right] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где комплексная огибающая  $\Theta(t, x, y)$  определяется следующим интегралом:

$$\begin{aligned} \Theta(t, x, y) = \int C(\xi, \kappa) \exp \left\{ -i\xi t + i\kappa x + \right. \\ \left. + i \int^y [m(\omega + \xi, k + \kappa, U) - m(\omega, k, U)] dy \right\} d\xi d\kappa. \quad (12) \end{aligned}$$

Раскладывая разность  $m(\omega + \xi, k + \kappa, U) - m(\omega, k, U)$  по степеням малых  $\xi$  и  $\kappa$  до второго порядка и затем дифференцируя выражение (12) по обеим координатам и времени, мы получаем следующее уравнение в частных производных, которому приближенно удовлетворяет функция  $\Theta(t, x, y)$  в линейном пределе:

$$-i\Theta_y = im_\omega\Theta_t - im_k\Theta_x - \frac{1}{2}m_{\omega\omega}\Theta_{tt} - m_{\omega k}\Theta_{tx} - \frac{1}{2}m_{kk}\Theta_{xx}. \quad (13)$$

Коэффициентами этого уравнения являются соответствующие частные производные функции  $m(\omega, k, U)$ :

$$m_\omega = \frac{2(\omega - kU)^3/g^2}{\sqrt{(\omega - kU)^4/g^2 - k^2}}, \quad (14)$$

$$m_k = \frac{-2(\omega - kU)^3U/g^2 - k}{\sqrt{(\omega - kU)^4/g^2 - k^2}}, \quad (15)$$

$$m_{\omega\omega} = \frac{2[(\omega - kU)^4/g^2 - 3k^2](\omega - kU)^2/g^2}{\sqrt{[(\omega - kU)^4/g^2 - k^2]^3}}, \quad (16)$$

$$m_{\omega k} = \frac{2[2k^2U + k\omega - (\omega - kU)^4U/g^2]}{\sqrt{[(\omega - kU)^4/g^2 - k^2]^3}} \times (\omega - kU)^2/g^2, \quad (17)$$

$$m_{kk} = \frac{2(\omega - kU)^4U^2/g^2 - 3k^2U^2 - 2Uk\omega - \omega^2}{\sqrt{[(\omega - kU)^4/g^2 - k^2]^3}} \times (\omega - kU)^2/g^2. \quad (18)$$

Все они зависят от переменной  $y$  вместе со скоростью течения  $U$ . На рис. 3 показаны зависимости коэффициентов дисперсионной квадратичной формы от  $U$  для различных  $\Phi_0$ . Весьма важно, что диагональные компоненты могут менять знак при изменении  $U$ , а также что сама форма не является знакоопределенной при любых  $\Phi_0$  и  $U$  (детерминант ее матрицы всегда отрицателен, не показано).

Чтобы завершить вывод НУШ, нам осталось учесть нелинейный сдвиг частоты, который для квазимонохроматической квазиплоской волны является основным нелинейным эффектом. Как известно, при заданном  $\mathbf{k}$  этот сдвиг равен  $\delta\omega \approx \sqrt{g|\mathbf{k}||\mathbf{k}|^2}|A|^2/2$ . Для фиксированных  $\omega$  и  $k$  это соответствует нелинейному сдвигу  $\delta m \approx -m_\omega \sqrt{g|\mathbf{k}||\mathbf{k}|^2}|A|^2/2$ . С учетом соотношения  $|A| \approx |\Theta||B|$ , которое следует из уравнения (11), мы получаем требуемое нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\Theta_y + im_\omega\Theta_t - im_k\Theta_x - \frac{1}{2}m_{\omega\omega}\Theta_{tt} - m_{\omega k}\Theta_{tx} - \frac{1}{2}m_{kk}\Theta_{xx} - \frac{g \sin \Phi_0}{\omega^2} \frac{m_\omega \sqrt{g|\mathbf{k}||\mathbf{k}|^4}}{2m} |\Theta|^2 \Theta = 0. \quad (19)$$

Члены, пропорциональные  $\Theta_t$  и  $\Theta_x$ , можно убрать зависящими от  $y$  сдвигами переменных  $t$  и  $x$ :

$$t = \tau + \int^y m_\omega dy, \quad x = \eta - \int^y m_k dy. \quad (20)$$

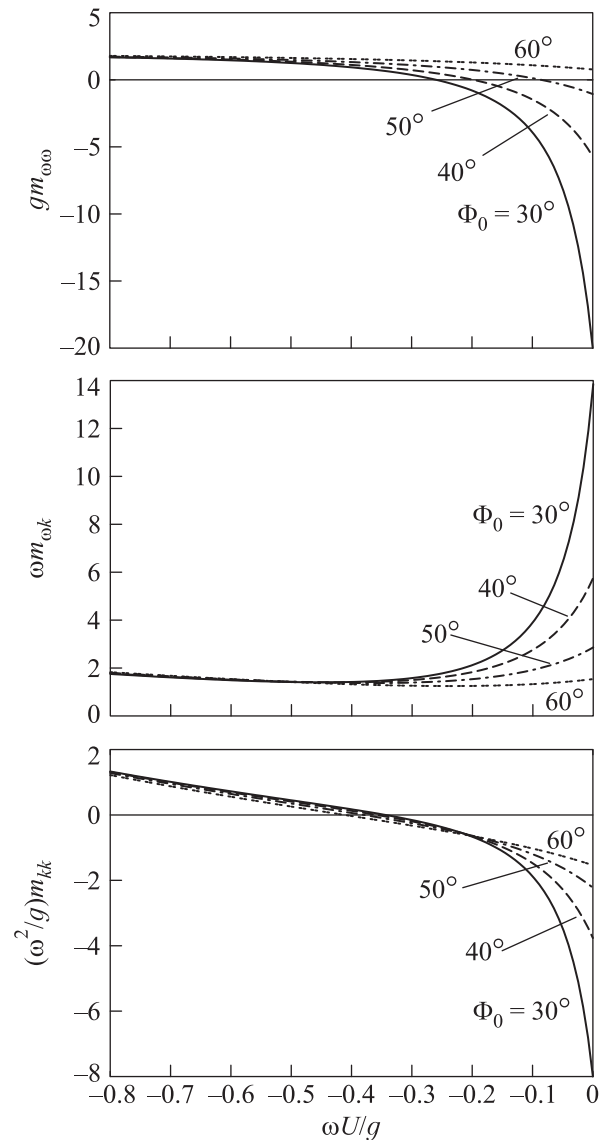


Рис. 3. Коэффициенты дисперсионной квадратичной формы

В результате НУШ принимает достаточно компактный вид:

$$i\Theta_y - \frac{1}{2}m_{\omega\omega}\Theta_{\tau\tau} - m_{\omega k}\Theta_{\tau\eta} - \frac{1}{2}m_{kk}\Theta_{\eta\eta} - \gamma|\Theta|^2\Theta = 0, \quad (21)$$

где мы ввели обозначение

$$\gamma = \frac{g \sin \Phi_0}{\omega^2} \frac{m_\omega \sqrt{g|\mathbf{k}||\mathbf{k}|^4}}{2m} \quad (22)$$

для нелинейного коэффициента. Выведенное уравнение чрезвычайно удобно для анализа линейной стадии модуляционной неустойчивости. Заметим, что у

уравнения (21) имеется невозмущенное стационарное решение:

$$\Theta_*(y) = a \exp \left[ -i|a|^2 \int^y \gamma(y) dy \right], \quad (23)$$

зависящее от произвольной комплексной константы  $a$ . Осуществим подстановку  $\Theta = [1 + q(\tau, \eta, y) + ip(\tau, \eta, y)]\Theta_*(y)$  и линеаризуем уравнение (21) относительно малых неизвестных действительных функций  $q$  и  $p$ . Полагая стандартным образом зависимость частных решений в виде

$$q = \text{Re}[Q(y, \Omega, K) \exp(-i\Omega\tau + iK\eta)],$$

$$p = \text{Re}[P(y, \Omega, K) \exp(-i\Omega\tau + iK\eta)],$$

получим простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Q_y = -DP, \quad -P_y = (2\gamma|a|^2 - D)Q, \quad (24)$$

где использовано обозначение

$$D(y, \Omega, K) = \frac{1}{2}m_{\omega\omega}\Omega^2 + m_{\omega k}\Omega K + \frac{1}{2}m_{kk}K^2 \quad (25)$$

для дисперсионной квадратичной формы. Модуляционной неустойчивости соответствуют действительные (локальные по  $y$ ) собственные значения системы (24), что дает нам условие

$$\Gamma^2(y, \Omega, K) = D(2\gamma|a|^2 - D) > 0. \quad (26)$$

Границы области неустойчивости в плоскости  $(\Omega K)$  представляют собой две ветви гиперболы и ее асимптоты. При этом их расположение нетривиальным образом зависит от координаты  $y$  через скорость  $U$  (не показано). В интересующем нас диапазоне углов падения  $\Phi_0$  при увеличении скорости течения максимальное значение инкремента  $\Gamma_{\max}(y) = \gamma(y)|a|^2$  увеличивается, как увеличивается и угол раствора гиперболы, т.е. в неустойчивую область попадают прежде устойчивые моды. Относительный рост возмущений с экспоненциальной точностью можно оценить по формуле

$$Q, P \sim \exp \left[ \text{Re} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{D(2\gamma|a|^2 - D)} dy \right] \quad (27)$$

при условии, что подынтегральное выражение изменяется с  $y$  не слишком быстро, а сам интеграл много больше единицы.

Для краткой иллюстрации того, насколько нетривиальной и богатой может быть нелинейная динамика волн в данной системе, рассмотрим простую редукцию уравнения (21), когда решение зависит от

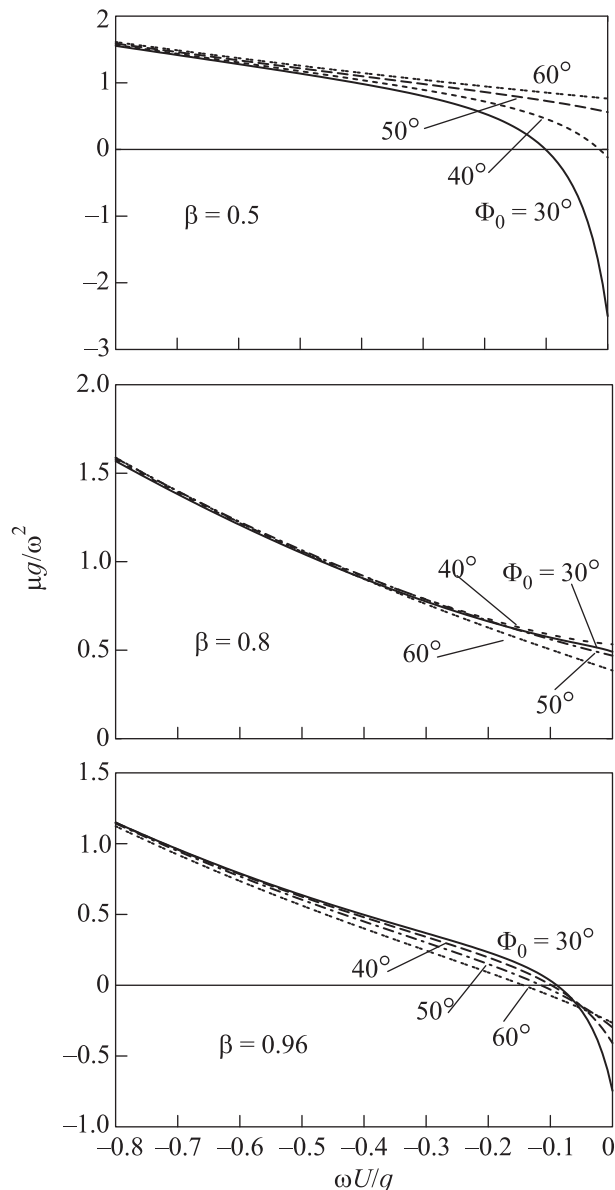


Рис. 4. Коэффициент  $\mu$  в зависимости от  $U$  для разных  $\Phi_0$  и  $\beta$

переменных  $\tau$  и  $\eta$  лишь через их линейную безразмерную комбинацию

$$\zeta = \tau\omega\sqrt{1 - \beta^2} + \eta(\omega^2/g)\beta \quad (28)$$

с действительным параметром  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Уравнение движения в таком случае принимает вид

$$i\Theta_y - \mu\Theta_{\zeta\zeta} - \gamma|\Theta|^2\Theta = 0, \quad (29)$$

где суммарный дисперсионный коэффициент  $\mu(U, \beta, \Phi_0)$  равен

$$\mu = \frac{(1 - \beta^2)\omega^2}{2}m_{\omega\omega} + \frac{\beta\sqrt{1 - \beta^2}\omega^3}{g}m_{\omega k} + \frac{\beta^2\omega^4}{2g^2}m_{kk}. \quad (30)$$

Как видно из рис. 4, коэффициент  $\mu$  при фиксированных  $\Phi_0$  и  $\beta$  может быть как положительным при всех  $U < 0$ , так и менять свой знак при некотором  $U_*(\Phi_0, \beta)$ . Смена знака  $\mu$  означает коренную перестройку в динамике, поскольку в этом случае дефокусирующее на малых скоростях течения (например, на краю струи) нелинейное взаимодействие сменяется фокусирующим при выходе волны на достаточно быстрое течение (ближе к центру струи).

В заключение следует сказать, что представляется перспективным подробное исследование численными методами нелинейной волновой динамики в рамках нередуцированного уравнения (21) для различных зависимостей  $U(y)$ . Это должно стать темой отдельной работы.

- 
1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
  2. E. Pelinovsky and C. Kharif, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 535 (2006).
  3. N. Akhmediev and E. Pelinovsky, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185**, 1 (2010).
  4. <http://www.nat-hazards-earth-syst-sci.net>.
  5. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
  6. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
  7. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
  8. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **81**, 255 (2005).
  9. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
  10. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).
  11. N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, *Theor. Math. Phys.* **72**, 809 (1987).
  12. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and M. Taki, *Phys. Lett. A* **373**, 675 (2009).
  13. M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 253901 (2011).
  14. D. H. Peregrine, *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9 (1976).
  15. B. S. White and B. Fornberg, *J. Fluid Mech.* **355**, 113 (1998).
  16. I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 574 (2006).
  17. T. T. Janssen and T. H. C. Herbers, *J. Phys. Oceanogr.* **39**, 1948 (2009).
  18. A. Toffoli, L. Cavaleri, A. V. Babanin et al., *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11**, 895 (2011).
  19. F. P. Bretherton and C. J. R. Garrett, *Proc. R. Soc. Lond. A* **302**, 529 (1968).
  20. F.-M. Turpin, C. Benmoussa, and C. C. Mei, *J. Fluid Mech.* **132**, 1 (1983).
  21. M. Gerber, *J. Fluid Mech.* **176**, 311 (1987).
  22. J. R. Stocker and D. H. Peregrine, *J. Fluid Mech.* **399**, 335 (1999).
  23. K. B. Hjeltnen and K. Trulsen, *J. Fluid Mech.* **637**, 267 (2009).
  24. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 550 (2012).