Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 4, с. 235 – 240 

# Флуктуационное поведение кубических ферромагнетиков с локализованными моментами в окрестности точки фрустрации

*А. Н. Игнатенко*[+1)], *А. А. Катанин*[+*], *В. Ю. Ирхин*[+]

[+]*Институт физики металлов УрО РАН, 620990 Екатеринбург, Россия*

[*]*Уральский федеральный университет, 620002 Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 5 декабря 2012 г.

После переработки 14 января 2013 г.

Исследованы термодинамические свойства кубических гейзенберговских ферромагнетиков с конкурирующими обменными взаимодействиями вблизи точки фрустрации, в которой коэффициент $D$ в спектре спиновых волн $E_{\mathbf{k}} \sim Dk^2$ обращается в нуль. С помощью формализма Дайсона–Малеева установлено, что при низких температурах тепловые флуктуации стабилизируют ферромагнетизм благодаря увеличению значения $D$. При не слишком сильной фрустрации это приводит к необычной "вогнутой" форме зависимости намагниченности от температуры в согласии с экспериментальными данными по халькогенидам европия. Методом численного моделирования Монте-Карло построена фазовая диаграмма. Обнаружено подавление намагниченности и температуры Кюри по сравнению с результатами спин-волновой теории. Эти эффекты объясняются появлением в спектре спиновых волн флуктуационных поправок, в низшем порядке представленных членом $\sim (T/S)^2 k^2 \ln k$.

DOI: 10.7868/S0370274X13040097

Последние тридцать лет физика квантовых магнетиков развивалась под сильным влиянием идеи квантового разупорядоченного основного состояния, предлагающей альтернативу стандартному магнитному порядку. Основные результаты в этом направлении были получены для антиферромагнетиков в одном и двух измерениях (см., например, [1]). Однако в последнее время было продемонстрировано существование квантового разупорядоченного основного состояния в *двумерных* магнетиках с доминирующими *ферромагнитными* взаимодействиями [2, 3]. Формирование соответствующего квантового состояния, называемого спиновым нематиком, связано с неустойчивостью относительно образования связанных состояний спиновых волн. Поскольку в ферромагнитном основном состоянии квантовые флуктуации полностью отсутствуют, физика таких "фрустрированных ферромагнетиков" значительно отличается от физики антиферромагнетиков с конкурирующими обменными взаимодействиями.

Магнитные фрустрации оказывают также существенное влияние на термодинамические свойства трехмерных систем, в частности на температурные зависимости параметров дальнего и ближнего порядка (см., например, [4] для антиферромагнетика на ГЦК-решетке). Аномальные зависимости намагниченности от температуры для ферромагнетиков действительно наблюдаются экспериментально, например в передопированных халькогенидах европия [5]. Обычно подобные аномалии объясняются путем введения в гамильтониан Гейзенберга взаимодействий высших порядков по спину [6]. В данной работе показывается, что такие аномалии могут быть получены в рамках стандартной гейзенберговской модели при последовательном учете фрустрации.

Мы исследуем температурные свойства трехмерных фрустрированных ферромагнетиков, используя модель Гейзенберга, где фрустрация задается посредством обменных взаимодействий в высших координационных сферах. Низкотемпературные свойства такой модели могут определяться не только обычными магнонами, но и связанными состояниями спиновых волн [7, 8]. Однако в работе [9] было показано, что в *трех* измерениях фрустрации не приводят к формированию связанных состояний двух спиновых волн в длинноволновой области. Следовательно, при низких температурах вклада от связанных состояний в термодинамику не возникает.

Спектр спиновых волн $E_0(\mathbf{k}) = S\,[J(0) - J(\mathbf{k})]$, известный точно для ферромагнетика при нулевой температуре, квадратичен по волновому вектору при: $\mathbf{k} \to 0$, $E_0(\mathbf{k}) \approx D_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta$, где $D_{\alpha\beta} = S\sum_{\mathbf{r}} J_r r_\alpha r_\beta/6$ – тензор спин-волновой жесткости. Здесь $J(\mathbf{k})$ – фурье-образ обменного

1)e-mail: ignatenko@imp.uran.ru

взаимодействия $J_r$, $r_\alpha$ – координаты узлов решетки. Если из-за фрустрации два или три собственных значения $D_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль, то в спин-волновом выражении для намагниченности

$$M_{\rm SWT} = S - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[E_0(\mathbf{k})/T\right] - 1} \tag{1}$$

второй член расходится при любых конечных температурах $T$. Точный характер расходимости определяется высшими членами разложения $E_0(\mathbf{k})$ по $\mathbf{k}$. Ясно, что когда все три собственных значения $D_{\alpha\beta}$ одновременно обращаются в нуль, расходимость сильнее. Этот случай легко реализовать для кубических кристаллов, для которых тензор $D_{\alpha\beta} = D_0\,\delta_{\alpha\beta}$ всегда диагонален. Ниже всюду будет предполагаться наличие кубической симметрии.

Поправки к спин-волновой теории могут быть вычислены систематически с помощью представления Дайсона–Малеева для спиновых операторов [7]. Соответствующий эффективный бозонный гамильтониан имеет вид $H_{\rm eff} = H_0 + H_{\rm int}$, где

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} E_0(\mathbf{k}) a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \tag{2}$$

есть гамильтониан невзаимодействующих магнонов,

$$H_{\rm int} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}'} \varphi\left(\mathbf{k},\mathbf{k}';\mathbf{q},\mathbf{q}'\right) a^\dagger_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}'} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',\mathbf{q}+\mathbf{q}'} \tag{3}$$

представляет взаимодействие, $\varphi\left(\mathbf{k},\mathbf{k}';\mathbf{q},\mathbf{q}'\right) = J(\mathbf{q}) + J(\mathbf{q}') - J(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - J(\mathbf{k}-\mathbf{q}')$, см. [10]. Спектр спиновых волн $E = E_0 + \mathrm{Re}\,\Sigma$ при конечных температурах определяется собственной энергией бозонов $\Sigma(\mathbf{k}, i\omega_n)$. На рис. 1 приведены фейнмановские диаграммы низших

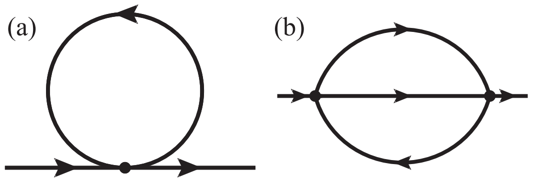


Рис. 1. Диаграммы собственной энергии бозонов в первом (a) и втором (b) порядке по взаимодействию

порядков для $\Sigma$.

Рассмотрим результат вычисления вклада диаграммы (a) в коэффициент спин-волновой жесткости $D(T)$ при конечной температуре. При низких температурах ($T \ll D_0$)

$$D(T) = D_0 - A\left(T/D_0\right)^{5/2}. \tag{4}$$

Заметим, что коэффициент $A$ может быть выражен через коэффициенты разложения затравочного спектра $E_0(\mathbf{k})$ по $\mathbf{k}$. Для кубических кристаллов имеется всего два инварианта четвертого порядка:

$$E_0(\mathbf{k}) \approx D_0 k^2 + \varkappa_1 k^4 + \varkappa_2 (k_x^4 + k_y^4 + k_z^4). \tag{5}$$

Тогда $A = -\zeta(5/2)(5\varkappa_1 + 3\varkappa_2)/8\pi^{3/2}S$. При обычных условиях, т.е. при отсутствии фрустрации, комбинация $5\varkappa_1 + 3\varkappa_2 = -S\sum_{\mathbf{r}} J_r r^4/6 < 0$. Следовательно, коэффициент $A > 0$ и с ростом температуры жесткость падает, а магнитный порядок разрушается. Однако в случае фрустрации ситуация может измениться [9, 11]. Ниже мы предполагаем, что ферромагнитное *основное состояние* остается устойчивым при сколь угодно малом $D_0$. Требование положительности (5) при $D_0 \to 0$ дает неравенства $\varkappa_1 + \varkappa_2 > 0$, $3\varkappa_1 + \varkappa_2 > 0$. Очевидно, что эти неравенства приводят к неравенству $A < 0$, справедливому при $D_0 \to 0$. При $D_0 = 0$ имеет место аналогичное (4) поведение, но с другим показателем:

$$D(T) = -bA\left(T/\varkappa\right)^{5/4}, \tag{6}$$

где $T \ll \varkappa$, $\varkappa = \max\{\varkappa_1, \varkappa_2\}$, $b > 0$ – функция $\varkappa_{1,2}$. Используя перегруппировку диаграммного ряда по числам заполнения бозонов [12], можно показать, что зависимости (4) и (6) не меняются в высших порядках. Таким образом, безотносительно к деталям обменных взаимодействий, в режиме фрустрации при низких температурах ферромагнитный порядок стабилизируется тепловыми флуктуациями.

Нелинейная спин-волновая теория, в которой учтена только диаграмма рис. 1a, справедлива в пределе $T \to 0$. Мы провели расчет в рамках самосогласованной спин-волновой теории (ССВТ), применявшейся ранее для двумерных и трехмерных систем [13]. В ней дополнительно учитываются диаграммы, полученные из диаграммы (a) всевозможными вставками этой же диаграммы во внутренние линии. Кроме того, для улучшения поведения уравнений ССВТ в области высоких температур нами добавлены вклады от псевдофермионов [10], а в парамагнитной фазе для выполнения соотношения $M = 0$ введен химический потенциал бозонов [14]. На рис. 2 приведен пример зависимостей $D(T)$, вычисленных в ССВТ для конкретной системы. Видно, что при низких температурах зависимость $D(T)$ согласуется с формулами (4) и (6).

Заметим, что в уравнение ССВТ для намагниченности (1) входит спектр $E(\mathbf{k})$ с учетом температурных поправок. В результате намагниченность перестает расходиться при $D_0 = 0$. Однако рост спин-

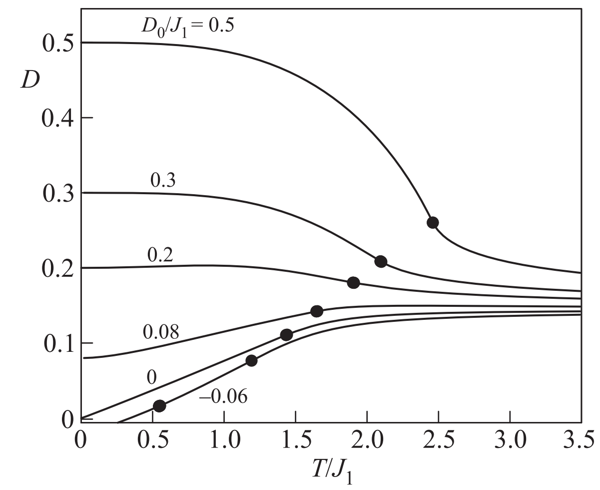


Рис. 2. Вычисленная в ССВТ температурная зависимость коэффициента спин-волновой жесткости для модели Гейзенберга с $S = 1/2$ на ГЦК-решетке с взаимодействием первых, вторых и третьих соседей. Значение $J_2 = -0.3J_1$, а $J_3 = (D_0/S - J_1 - J_2)/6$ выбиралось для ряда значений $D_0$, указанных на графике. Точки соответствуют температурам Кюри

волновой жесткости (6) при увеличении температуры приводит в этом случае к необычному поведению намагниченности: $M \simeq S - uT^{3/8}$. На рис. 3 приведена зависимость намагниченности от температуры для нескольких значений $D_0$. Видно, что при малых неотрицательных $D_0$ кривая намагниченности приобретает вогнутую форму в области низких температур. Подобные аномальные зависимости наблюдались экспериментально в передопированном EuO [5].

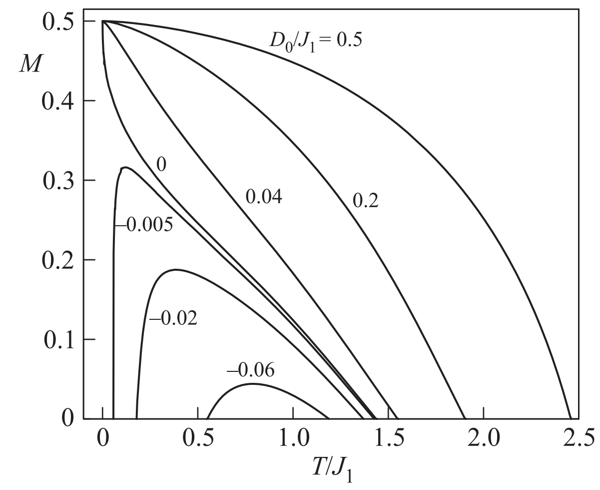


Рис. 3. Зависимость намагниченности от температуры в ССВТ. Параметры модели выбраны такими же как на рис. 2

На рис. 2 и 3 приведены результаты также и для отрицательных $D_0$, когда ферромагнитное основное состояние становиться неустойчивым. Температурные поправки в этом случае приводят к стабилизации ферромагнитно-упорядоченной фазы, начиная с некоторой “нижней” критической температуры. Ввиду этого зависимость температуры Кюри $T_C$ от $D_0$ становится двузначной при $D_0 < 0$ (см. рис. 4 для

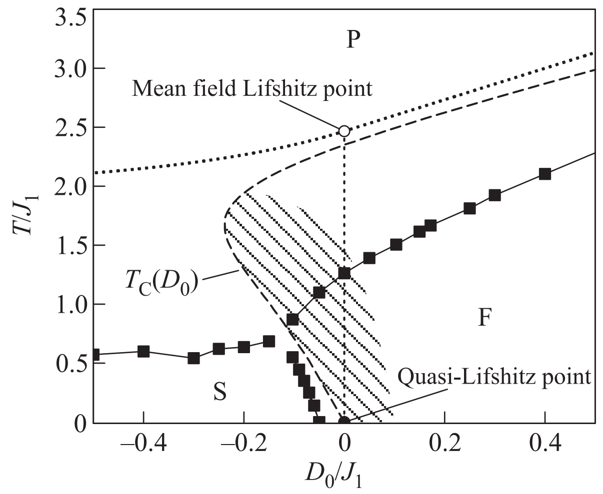


Рис. 4. Фазовая диаграмма классической модели Гейзенберга на ГЦК-решетке с взаимодействием первых, вторых и третьих соседей, $J_2 = -0.3J_1$, $J_3 = (D_0 - J_1 - J_2)/6$. Сплошная линия – результат моделирования Монте-Карло для системы размером $10 \times 10 \times 10$. Пунктирная – приближение среднего поля. Штриховая линия – зависимость температуры Кюри от $D_0$ в ССВТ. Заштрихованная область – участок ферромагнитной фазы, для которой $D(T) < 0.1J_1$ согласно ССВТ

классической системы). Заметим, что классические системы могут быть исследованы таким же образом, что и квантовые (для этого в уравнениях необходимо провести замену $J_{ij} \to J_{ij}/S^2$ и перейти к пределу $S \to \infty$). При этом все результаты, полученные для квантового случая, качественно не меняются (количественные различия проявляются, в частности, в изменении показателей $T$ в уравнениях (4) и (6)). Это связано со слабостью квантовых эффектов в ферромагнитном состоянии. Ниже мы воспользуемся этим обстоятельством для выявления границ применимости ССВТ, проводя сравнение ССВТ с результатами численного моделирования для классических систем.

В области, где ферромагнетизм неустойчив (т.е. при $D < 0$), в системе должно появиться неферромагнитное состояние, способное конкурировать с ферромагнитным. В принципе это состояние могло бы быть спиновой жидкостью. Однако наиболее вероятным кандидатом представляется спиральное состояние. Заметим, что при $D < 0$ спектр спиновых волн (5) будет иметь минимум при $\mathbf{k} = \mathbf{Q}_+ = (Q_+, Q_+, Q_+)$, где $Q_+ = (-D/2[3\varkappa_1 + \varkappa_2])^{1/2}$, в случае $\varkappa_2 > 0$ и при $\mathbf{k} = \mathbf{Q}_- = (Q_-, 0, 0)$, где $Q_- = (-D/2[\varkappa_1 + \varkappa_2])^{1/2}$, в случае $\varkappa_2 < 0$. Это могло бы означать формирование спирали с волновым вектором $\mathbf{Q}_+$ или $\mathbf{Q}_-$. Можно показать, что именно такая спираль возникает в приближении среднего поля. Обратим внимание на то, что ферромагнитное и парамагнитное состояния, предсказанные в ССВТ без учета спиралей (их учет затруднителен), могут быть метастабильными. Существенно, что непрерывный переход из ферромагнитного состояния в спиральное в ССВТ невозможен, поскольку он потребовал бы обращения $D(T)$ в нуль на границе между двумя фазами. Последнее невозможно ввиду расходимости в намагниченности (1) при $D(T) \to 0$ и $T > 0$.

Для полного исследования фазовой диаграммы и выяснения роли неспин-волновых вкладов мы провели численное моделирование классической модели Гейзенберга на конечной ГЦК-решетке размером $L \times L \times L$ методом Монте-Карло [15] для $L = 10, 14$. Полученная фазовая диаграмма, также изображенная на рис. 4, содержит ферромагнитную (F), спиральную (S) и парамагнитную (P) фазы. Благодаря дискретности квазиимпульса для конечных систем точка фрустрации $D_0 = D_F(L)$, определяющая границу между ферромагнитным и спиральным состояниями при $T = 0$, немного сдвигается в сторону отрицательных $D_0$. Мы получили, что при $D_0 < D_F$ и температурах ниже ферромагнитной фазы парамагнетизма не возникает. Вместо этого происходит переход первого рода (наблюдалась двугорбая структура вероятностного распределения намагниченности) в спиральную фазу. Это означает, что для рассматриваемой конечной системы кривая $T_\mathrm{C}(D_0, L)$ вблизи $T = 0$ лежит в области метастабильных состояний, ниже и левее линии фазовых переходов первого рода. В то же время в квантовом случае кривая $T_\mathrm{C}(D)$ вблизи $T = 0$ могла бы соответствовать переходу в квантовое разупорядоченное состояние.

Для сравнения на рис. 4 также представлена фазовая диаграмма в приближении среднего поля. Особенностью этой фазовой диаграммы является наличие мультикритической точки Лифшица [16], в которой заканчивается граница между ферромагнитной и парамагнитной фазами. В разложении Гинзбурга–Ландау для этой точки коэффициент $c \propto D(T)$ при $[\nabla M(x)]^2$ обращается в нуль, что могло бы привести к изменению критического поведения [16]. Однако учет флуктуационных поправок к теории среднего поля в рамках ССВТ делает невозможным существование точки Лифшица при конечных температурах из-за расходимости (1) при $D(T) \to 0$. На кривой $T_\mathrm{C}(D_0)$, описывающей границу между ферромагнитной и парамагнитной фазами в ССВТ, $D(T)$ всюду конечна и стремится к нулю только при $T \to 0$. В этом смысле можно сказать, что флуктуации приводят к сдвигу точки Лифшица в точку с координатами $T = +0$, $D_0 = -0$. Бесконечно малое отличие $T$ и $D_0$ от нуля существенно, поскольку строго при $T = 0$ даже в квантовом случае в системе имеется насыщенный ферромагнетизм при всех $D_0 \geq 0$. В связи с этим точку с координатами $T = +0$, $D_0 = -0$ мы называем *квазилифшицевской точкой*. В ССВТ при удалении от квазилифшицевской точки вдоль кривой $T_\mathrm{C}(D_0)$ размер соответствующей "критической" области температур (где намагниченность изменяется от своего максимального значения до нуля) увеличивается как $(-D_0)^{4/5}$ (см. также рис. 3). Поэтому, учитывая, что кривая $T_\mathrm{C}(D_0)$ в окрестности $T = 0$ попадает в область метастабильных состояний, сильных флуктуаций в области устойчивых состояний следует ожидать на достаточном удалении от квазилифшицевской точки вблизи кривой $T_\mathrm{C}(D_0)$. Квазилифшицевская точка также оказывает влияние на поведение намагниченности при слабо положительных $D_0$ (см. рис. 3).

Всюду, кроме достаточно больших $D_0 \approx J_1$, температура Кюри в ССВТ и приближении среднего поля переоценивается в 2–3 раза по сравнению с результатом численного моделирования (рис. 4; см. также [11]). На рис. 5 видно, что при $D_0 \approx J_1$ ССВТ дает хорошее описание температурной зависимости намагниченности даже в области высоких температур, за исключением узкой критической области вблизи $T_\mathrm{C}$. При наличии фрустрации, когда $D_F(L) < D_0 \ll J_1$ и ферромагнитный порядок еще устойчив при $T = 0$, ССВТ по-прежнему применима при низких температурах, но перестает быть применимой в области высоких температур. Последнее, в частности, проявляется в значительной переоценке температуры Кюри. При наличии сильной фрустрации, когда $D_0 < D_F(L)$, ферромагнетизм в моделировании Монте-Карло наблюдается только при промежуточных температурах, что качественно согласуется с ССВТ. Однако количественное различие теперь проявляется при всех температурах.

На вставке к рис. 5 изображена температурная зависимость параметра ближнего порядка $\gamma = \sqrt{\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j}$ (где $i$ и $j$ – ближайшие соседи). Как и следовало ожидать, при наличии фрустрации ближний порядок со-

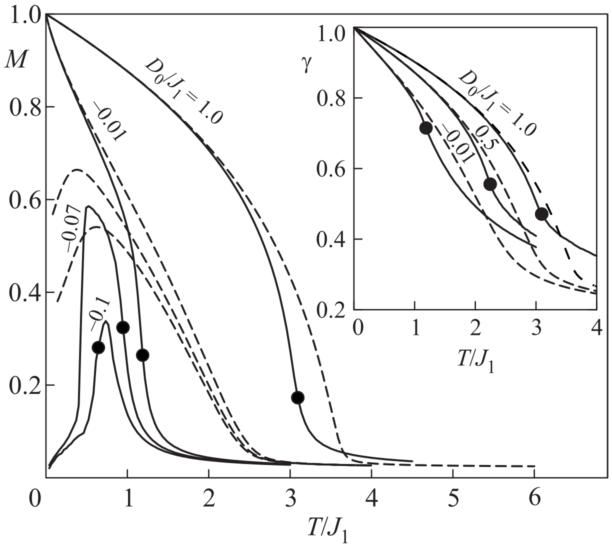


Рис. 5. Зависимость намагниченности от температуры для классической модели Гейзенберга на конечной ГЦК-решетке размером $14\times14\times14$. Параметры модели выбирались такими же, как на рис. 4. На вставке – температурная зависимость параметра ближнего порядка. Сплошные линии – результат моделирования Монте-Карло. Штриховые – результат ССВТ. Точки указывают температуры Кюри, определяемые по максимумам восприимчивости

храняется вплоть до $T_{\mathrm{C}}$ и выше. Замечательно, что даже при сильной фрустрации и высоких температурах ССВТ описывает ближний порядок гораздо лучше, чем дальний. Это означает, что основной дефект ССВТ в случае сильной фрустрации связан с недостаточным учетом длинноволновых флуктуаций. Существование ближнего порядка может иметь определяющее значение для энергетической выгодности той или иной фазы, что, в частности, представляет интерес для описания $\gamma$–$\alpha$-перехода в железе [4, 17].

Заметим, что когда система фрустрирована, т.е. при $D_0 \ll J_1$, согласно рис. 2 коэффициент спинволновой жесткости $D(T)$ остается малым и при конечных температурах, вплоть до температуры Кюри и выше. Это может объяснить неадекватность ССВТ при наличии сильной фрустрации. Если формально рассматривать коэффициент $D(T)$ как независимый параметр, то ряд теории возмущений по $1/S$ для различных физических величин будет содержать члены, расходящиеся при $D(T) \to 0$. Примером этого является уравнение (1) для намагниченности. В разложении собственной энергии также появляются особенности. Рассмотрим, например, двухпетлевую диаграмму (рис. 1b). При $D(T) \to 0$ она дает в спектре спиновых волн сингулярный член

$$E(\sqrt{D/\varkappa_1} \ll k \ll \Lambda) \sim \varkappa_1 k^4 + \frac{11T^2}{96\pi^2 S^2 \varkappa_1} k^2 \ln \frac{k}{\Lambda} \quad (7)$$

($\varkappa_2 = 0$, $\Lambda$ – параметр ультрафиолетового обрезания; условие применимости теории возмущений дает дополнительное неравенство для импульса: $k^2/\ln\Lambda/k \gg 0.012(T/S\varkappa_1)^2$). Заметим, что логарифмический член отрицателен. Подобные логарифмические вклады типичны для систем с сильными флуктуациями (см., например, [18, 13]).

Существенно, что сингулярные члены наподобие (7) могут приводить к значительному подавлению магнитного порядка даже при конечных, но малых $D(T)$. Подавление магнитного порядка должно быть особенно сильным вблизи нижней критической температуры (загиб кривой $T_{\mathrm{C}}(D_0)$ на рис. 4), поскольку в этом случае $D(T)$ меньше (см. рис. 2).

Выше было показано, что $D(T)$ не обращается в нуль при конечных температурах ввиду расходимости (1). Однако в связи с наличием сингулярных поправок к спектру (см. (7)) в принципе не исключен сценарий, при котором спектр приобретает неаналитический вид $E(\mathbf{k} \to 0) \sim k^a$, где $2 < a < 3$, при $D = 0$[2)]. Такой спектр не приводит к расходимости в намагниченности, что позволяет $D$ обращаться в нуль. В этом случае становятся возможными непрерывный переход между ферромагнитной и спиральной фазами, а также существование точки Лифшица при конечной температуре. Тем не менее в нашем численном моделировании мы не обнаружили какого-либо подтверждения этого сценария (также можно показать, что этот сценарий не реализуется и в сферической модели).

Аналогичные результаты по фрустрации ферромагнетизма могут быть получены для всех кубических решеток (простой, ОЦК и ГЦК) с различными видами конкуренции. Наличие на фазовой диаграмме низкотемпературных областей с сильными флуктуациями могло бы способствовать возникновению квантового разупорядоченного состояния в трехмерных фрустрированных ферромагнетиках. Для продвижения в этом направлении значительный интерес представляет учет квантовых эффектов в спиралях, возникающих вблизи границы ферромагнитной фазы. Разработанный совсем недавно метод квантового моделирования Монте-Карло с "ужирненными диаграммами" [19] мог бы дать необходимый для этого инструмент.

Авторы благодарят Ю.Н. Горностырева за полезные обсуждения. Работа частично поддержана фон-

[2)]Мы благодарны рецензенту за указание на возможность этого сценария.

дом “Династия”, программой фундаментальных исследований ОФН РАН “Сильно коррелированные электроны в твердых телах и структурах”, проект # 12-Т-2-1001 (УрО РАН), молодежным проектом президиума УрО РАН # М-9 и проектом президиума РАН “Квантовые мезоскопические и разупорядоченные структуры” # 12-П-2-1041. Для моделирования Монте-Карло был использован суперкомпьютер “Уран” ИММ УрО РАН.

1. *Quantum Magnetism* (ed. by U. Schollwöck, J. Richter, D. Farnell et al.), Springer, 2004.
2. N. Shannon, T. Momoi, and P. Sindzingre, Phys. Rev. Lett. **96**, 027213 (2006).
3. M. E. Zhitomirsky and H. Tsunetsugu, Europhys. Lett. **92**, 37001 (2010).
4. А. Н. Игнатенко, А. А. Катанин, В. Ю. Ирхин, Письма в ЖЭТФ **87**, 642 (2008).
5. T. Mairoser, A. Schmehl, A. Melville et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 257206 (2010).
6. Э. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, М.: Наука, 1988.
7. F. J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
8. M. Wortis, Phys. Rev. **132**, 85 (1963).
9. E. Rastelli, S. Sedazzari, and A. Tassi, J. Phys.: Cond. Matter **3**, 5861 (1991).
10. В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, *Функции Грина в теории магнетизма*, Киев, 1984.
11. M. T. Heinilä and A. S. Oja, Phys. Rev. B **48**, 16514 (1993).
12. G. Baym and A. M. Sessler, Phys. Rev. **131**, 2345 (1963).
13. В. Ю. Ирхин, А. А. Катанин, М. И. Кацнельсон, ФММ **79**(1), 65 (1995); V. Yu. Irkhin, A. A. Katanin, and M. I. Katsnelson, J. Phys.: Cond. Mat. **4**, 5227 (1992); Phys. Rev. B **60**, 1082 (1999); А. А. Катанин, В. Ю. Ирхин, УФН **177**, 639 (2007).
14. M. Takahashi, Phys. Rev. B **40**, 2494 (1989).
15. B. Bauer, L. D. Carr, H. G. Evertz et al., J. Stat. Mech.: Theor. Exp. **2011**, P05001 (2011).
16. R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **35**, 1678 (1975).
17. S. V. Okatov, A. R. Kuznetsov, Y. N. Gornostyrev et al., Phys. Rev. B **79**, 094111 (2009).
18. Ю. А. Косевич, А. В. Чубуков, ЖЭТФ **91**, 1105 (1986).
19. S. A. Kulagin, N. Prokof’ev, O. A. Starykh et al., arXiv:1211.3631v1.