Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 5, с. 291 – 296

Динамические топологические солитоны большого радиуса в одноосных ферромагнетиках

Д. В. Филин°, *Е. Г. Галкина**, *Б. А. Иванов*+∇[1)]

°*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", 03056 Киев, Украина*

**Институт физики НАНУ, 03028 Киев, Украина*

+*Институт магнетизма НАНУ, 03142 Киев, Украина*

∇*Киевский национальный университет им. Шевченко, 01033 Киев, Украина*

Поступила в редакцию 18 декабря 2012 г.

Для тонких пленок ферромагнетиков с перпендикулярной анизотропией существуют стабильные динамические топологические солитоны большого радиуса, которые стабилизируются вследствие сохранения орбитального момента поля намагниченности. Солитоны могут существовать и в том случае, когда проекция суммарного спинового момента магнетика на легкую ось не сохраняется, т.е. в отсутствии чисто одноосной симметрии модели. Даже в чисто одноосном случае распределение намагниченности в солитоне достаточно большого радиуса сильно отличается от центрально-симметричного.

DOI: 10.7868/S0370274X13050032

Солитонный подход является наиболее адекватным для описания нелинейной динамики в физике конденсированных сред, плазмы и теории поля. Среди различных моделей конденсированных сред, допускающих солитонные состояния, интерес к солитонам поля намагниченности ферромагнетиков (магнитным солитонам) не ослабевает в течение многих лет (см. [1–3]). Причин этому много. Среди них к теме данной работы относится существование стабильных неодномерных солитонов, как без топологического заряда, так и топологических солитонов. К последним относятся магнитные вихри (π_1-топология) и π_2-двумерные ($2D$) локализованные солитоны, а также трехмерные ($3D$) солитоны с ненулевым индексом Хопфа. В силу теоремы Хобарта–Деррика (см. [1–3]) существование стабильных солитонов является весьма нетривиальным свойством нелинейных полевых моделей.

Топологические солитоны играют роль нелинейных элементарных возбуждений в низкоразмерных магнетиках. В последнее десятилетие обнаружено, что магнитные вихри присутствуют в основном состоянии магнитомягких частиц субмикронного размера. Такие частицы и их массивы перспективны для применения в магнитной наноэлектронике [4]. Поэтому интерес к свойствам магнитных вихрей постоянно растет. Найдены новые эффекты в динамике вихрей, например динамический переворот поляризации вихря и рождение пар вихрь–антивихрь при быстром движении вихря [5]. Обнаружен неньютоновский характер быстрого движения вихря в магнитных наночастицах [6, 7]. Продемонстрирована возможность возбуждения прецессионной динамики вихрей спин-поляризованным током [8–11]. При этом ширина линии возбуждения достаточно мала, что открывает перспективы создания наногенераторов [12]. Здесь важны применение принципиально новых экспериментальных методов, таких, как магнитооптические методы в рентгеновском диапазоне с высоким пространственным и временным разрешением [13], а также огромный рост возможностей численного моделирования. Таким образом, в последние годы физика магнитных вихрей получила огромный толчок в своем развитии.

Прогресс в развитии физики магнитных солитонов не ограничивается исследованием вихрей. В недавних работах [14, 15] сообщается о возбуждении другого типа существенно нелинейных состояний для тонких магнитных пленок, в основном состоянии которых намагниченность перпендикулярна плоскости пленки, $\mathbf{m}||\hat{\mathbf{z}}$. Обнаружено, что при пропускании спин-поляризованного тока через наноконтакт диаметром 10–20 нм вблизи контакта формируется сильно возмущенное динамическое состояние с когерентной прецессией намагниченности. Авторы интерпретировали это состояние как диссипативный капельный солитон (*dissipative droplet soliton*) и отметили его сходство с неодномерным прецессион-

[1)]e-mail: bivanov@i.com.ua

ным солитоном (магнонной каплей, *magnon droplet*), найденным в рамках простой модели недиссипативного уравнения Ландау–Лифшица в $3D$- и $2D$-магнетиках (см. [16, 17]). Потери энергии на диссипацию компенсируются накачкой за счет спин-поляризованного тока. При этом как структура солитона, так и зависимость частоты прецессии от амплитуды оказывались практически такими же, что и в бездиссипативном случае. Радиус солитона R в работах [14, 15] был в несколько раз больше диаметра контакта и существенно превышал характерный размер задачи – обменную длину Δ (параметр Δ много больше постоянной решетки, но достаточно мал: например, для пермаллоя $\Delta \simeq 5$ нм). В центральной области ($r \leq R$) вектор $\mathbf{m} \simeq -\hat{\mathbf{z}}$. Эта область отделена от остальной части магнетика границей с шириной порядка Δ, в которой локализованы осцилляции намагниченности. Частоту колебаний можно было менять в широких пределах изменением тока или магнитного поля. Ширина линии возбуждения оказалась достаточно малой, что важно для применения такой системы как наногенератора СВЧ. Это наблюдение ставит вопрос о важности исследования локализованных магнитных солитонов различного типа со значением радиуса R, которое существенно превышает Δ.

В настоящее время подробно изучены прецессионные солитоны [16–19] (см. также [1–3]), в которых вектор намагниченности прецессирует вокруг легкой оси (оси z) с амплитудой, зависящей от расстояния до центра солитона. В угловых переменных для нормированной намагниченности $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}^2 = 1$, $m_z = \cos\theta$, $m_x + im_y = \sin\theta\exp(i\varphi)$, для такого солитона $\theta = \theta(r)$, $\varphi = \omega t$ и амплитуда максимальна в области границы $\theta \sim \pi/2$. Прецессия вводилась для стабилизации солитона относительно коллапса. При этом используется сохранение суммарной проекции намагниченности $M_z = \int m_z d^2x$ на легкую ось. Этот интеграл движения разрушается при учете анизотропии в базисной плоскости магнетика. Однако в работах [14, 15] солитонные состояния наблюдались и при понижении симметрии задачи, например в присутствии магнитного дипольного взаимодействия и при наклоне магнитного поля. В связи с этим важно найти стабильные магнитные солитоны большого радиуса без предположения о сохранении M_z.

Целью настоящей работы является аналитическое исследование двумерных солитонов большого радиуса в магнетиках, которые могут существовать и при отсутствии чисто одноосной симметрии задачи. Динамика ферромагнетика описывается лагранжианом $\mathcal{L}$, который удобно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{M_0}{\gamma}\int d^2x(1-\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial t} - W,$$
$$W = \int d^2x\left[\frac{A}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_i}\right)^2 + w\right], \tag{1}$$

где M_0 – магнитный момент единицы площади магнетика, $\gamma = 2\mu_\mathrm{B}/\hbar$ – гиромагнитное отношение, μ_B – магнетон Бора, $\hbar$ – постоянная Планка, $W = W\{\theta,\varphi\}$, или $W = W\{\mathbf{m}\}$, определяет функционал энергии системы, A – обменная константа, $w = w(\mathbf{m})$ – плотность энергии анизотропии. В чисто одноосном случае $w = w(m_z)$, или $w = w(\theta)$, угловая переменная φ является циклической и M_z сохраняется. Для стабилизации солитона при более низкой симметрии магнетика, когда $w = w(\theta,\varphi)$ и $m_z \neq \mathrm{const}$, возможно использование точной симметрии W относительно пространственных поворотов в плоскости $2D$-магнетика (xy) [20]. В полярных координатах r,χ ему соответствует преобразование вида $r \to \tilde{r}$, $\chi \to \tilde{\chi} = \chi + \chi_0$. Величину χ_0 можно рассматривать как некоторую коллективную координату, определяющую динамику намагниченности в солитоне. Лагранжиан, описывающий эту динамику, записывается в виде

$$\mathcal{L} = \hbar\frac{d\chi_0}{dt}L - W,\ L = \frac{M_0}{2\mu_\mathrm{B}}\int d^2x(1-\cos\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}, \tag{2}$$

где $\hbar L$ – обобщенный импульс, сопряженный χ_0. Величина L совпадает с суммарной проекцией орбитального момента поля намагниченности на ось z в единицах $\hbar$ и может трактоваться как число квазичастиц, связанных в солитоне [1–3]. Энергия солитона W, выраженная в терминах L, не зависит от χ_0 и играет роль функции Гамильтона, $W \to H(L)$. Пара канонически сопряженных переменных L и χ_0 определяет переменные действие–угол с универсальной динамикой, $\chi_0 = \omega t$, где $\omega = \partial H(L)/\partial L$. Солитону отвечает динамическое (но стационарное в системе координат, вращающейся с частотой ω) состояние вида $\theta = \theta(\tilde{x},\tilde{y}), \varphi = \psi(\tilde{x},\tilde{y})$, где $\tilde{x} = x\cos\omega t - y\sin\omega t$, $\tilde{y} = x\sin\omega t + y\cos\omega t$.

Структура ротационного солитона определяется варьированием $\mathcal{L}$, что приводит к стационарной системе уравнений в частных производных для функций $\theta(r,\chi)$ и $\psi(r,\chi)$. Аналитическое решение этой системы найти не удается. Однако можно использовать вариационный подход [20] на основе пробных функций вида

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{R}{r}\exp\left(\frac{R-r}{b}\right)(1 + C_1\cos 2\chi),$$
$$\varphi = \chi + C_2\sin 2\chi + \pi/2, \tag{3}$$

которые зависят от четырех пробных параметров: R, b, C_1, C_2. Величина R определяет характерный размер солитона. Солитонному состоянию отвечает стационарная точка эффективного лагранжиана (2). В работе [20] этот экстремум был найден численно для $R \le 5\Delta$. Появление существенно различных пространственных масштабов ($R \gg \Delta$ и $b \sim \Delta$) сильно осложняло исследование солитонов большого радиуса ($R \gg \Delta$).

В настоящей работе построено аналитическое выражение для эффективного лагранжиана (2) с учетом (3) в случае двухосного ферромагнетика с анизотропией вида $w = (K/2)\sin^2\theta(1 + \varepsilon\sin^2\varphi)$, где слагаемое с параметром ε разрушает одноосную симметрию задачи. Выражение для $\mathcal{L}$ удалось представить через достаточно громоздкие выражения, которые, однако, содержат только стандартные спецфункции и могут быть легко проанализированы. В интересующем нас случае солитонов большого радиуса, $R \gg \Delta$, когда численный алгоритм, использованный в [20], работает неустойчиво, удается найти общие закономерности формирования солитонов. В частности, в интересном случае $\varepsilon = 0$, который отвечает радиально-симметричным условиям работ [14, 15], аналитически доказана неустойчивость простого прецессионного солитона относительно нарушения радиальной симметрии.

Начнем с анализа устойчивости центрально-симметричного (ЦС) солитона для чисто одноосной модели с $\varepsilon = 0$. Для этого представим энергию и момент импульса солитона в виде разложения по малым величинам C_1 и C_2:

$$W = W_0(R,b) + \frac{1}{2}w_{ik}C_iC_k,\ L = L_0(R,b) - \frac{1}{2}l_{ik}C_iC_k, \tag{4}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам $i,k = 1,2$, а функции $W_0(R,b)$ и $L_0(R,b)$ такие же, как в исследованном ранее ЦС-солитоне. Знак "минус" перед слагаемым с l_{ik} выбран для удобства. Линейные по C_1 и C_2 слагаемые в W появляются только при $\varepsilon \neq 0$. Конкретные значения коэффициентов w_{ik} и l_{ik} легко представить в виде интегралов от функции $\theta_0(r)$, которая определяет структуру ЦС-солитона. Например, $w_{22} = \langle(1/r^2)\sin^2\theta_0\rangle$, $l_{11} = \langle\sin^2\theta_0\sin^2(\theta_0/2)\rangle$, $l_{12} = \langle\sin^2\theta_0\rangle/2$, $l_{22} = 0$, где обозначено $\langle...\rangle = \pi\int rdr(...)$. В рамках вариационного подхода энергия ЦС-солитона $E_{\rm cs}(L)$ как функция L может быть найдена путем исключения R из системы уравнений $E = W_0(R,b)$, $L = L_0(R,b)$ и минимизации энергии по параметру b. Анализ показал, что при $R \gg \Delta$ значение $b = (1.0-1.1)\Delta$ и практически не меняется при изменении размеров солитона. Роль этого параметра минимальна, и можно положить $b = \Delta$. Далее легко выразить энергию солитона при заданном значении L и $C_1, C_2 \ll 1$ только через известную функцию $E_{\rm cs}(L)$ в следующем виде: $E(L) = E_{\rm cs}(L) + e_{ik}C_iC_k/2$, где коэффициенты квадратичной формы $e_{ik} = w_{ik} + (dE_{\rm cs}/dL)l_{ik}$. Отметим, что функция $E_{\rm cs}(L)$ и условие устойчивости выражаются только через интегралы от ЦС-решения. Последнее может быть найдено методом "стрельбы" для любых параметров солитона или приближенно при больших R/Δ (см. [16, 18]). Для больших радиусов можно использовать приближение $E_{\rm cs}(L) = \hbar\omega_0\sqrt{2LL_*}$, $R = \Delta\sqrt{L/L_*}$. Здесь $L_* = 4\pi M_s\Delta^2 l/\gamma\hbar = 4\pi s\Delta^2 l/v_0 \gg 1$ – характерное значение L, s – спин атома, v_0 – объем, приходящийся на один спин, $\omega_0 = \gamma K/M_0$ – частота линейного магнитного резонанса в поле анизотропии $H_a = K/M_0$.

Центрально-симметричный солитон устойчив, если квадратичная форма $e_{ik}C_iC_k$ является положительно определенной, что имеет место при $R < \Delta$ [21]. Анализ показал, что главный вклад в условие устойчивости при $R > \Delta$ дают коэффициенты l_{11}, l_{12} и w_{22} и солитон неустойчив относительно эллиптической деформации, если $l_{12}^2(dE_{\rm cs}/dL) > l_{11}w_{22}$. С использованием стандартных методов оценки интегралов от θ_0 для больших R, которые дают $l_{12} \sim l_{11} \propto R$, $w_{22} \propto 1/R$ и $dE_{\rm cs}/dL \propto 1/R$, это неравенство принимает вид $R > R_c \sim 2\Delta$. Таким образом, радиально-симметричный солитон большого радиуса нестабилен и реализуются состояния, в которых характерная форма солитона (скажем, форма линии, на которой $\theta = \pi/2$) не круговая, а изменение $\mathbf{m}$ в "доменной стенке", ограничивающей солитон, не однородно при изменении χ (см. рис. 1).

Развитие указанной неустойчивости для солитона большого радиуса даже при $\varepsilon = 0$ приводит к появлению сильно анизотропного состояния, в котором величины C_1 и C_2 не малы. При этом $C_1 \to 1$, а $C_2 > 1$ и растет при росте R. Выражения для энергии и момента импульса при $R \gg \Delta$ можно упростить. В главном приближении по R/Δ энергия принимает вид

$$W = \hbar\omega_0 L_*\left(\frac{R}{\Delta} + \frac{2\Delta}{R\sqrt{1-C_1^2}} + \frac{\Delta}{R}C_2^2\right). \tag{5}$$

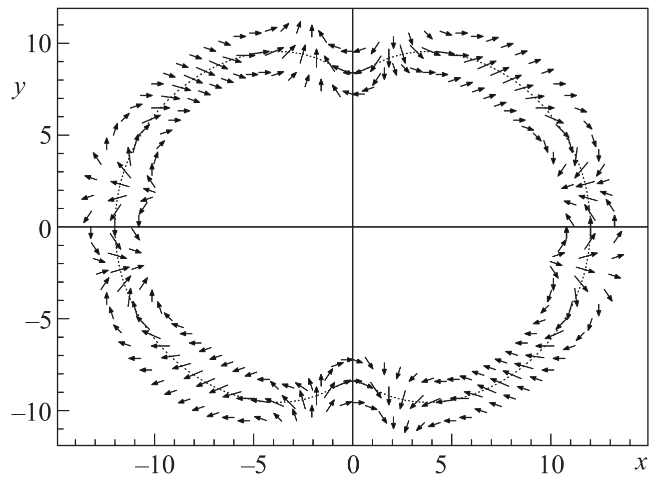

Рис. 1. Структура солитона при $R = 12\Delta$ и, соответственно, параметрах анизотропии $C_1 = 0.963$ и $C_2 = 4.34$. Координаты x и y представлены в единицах Δ. Планарная компонента намагниченности представлена стрелками на трех характерных линиях: центральной линии, определяющей положение доменной стенки, на которой $\theta = \pi/2$, а также линий с $\theta = \pi/4$ и $3\pi/4$ (внешняя и внутренняя линии)

Характер зависимости от C_1 определяется тем, что функция $\partial\theta/\partial\chi \propto (1 + C_1 \cos 2\chi)^{-1}$ и слагаемое $\left\langle (1/2r^2)(\partial\theta/\partial\chi)^2 \right\rangle$ в энергии расходится при $C_1 \to 1$ как $1/\sqrt{1 - C_1^2}$. Вклад C_2 возникает из-за слагаемого $\left\langle (1/2r^2) \sin^2\theta_0 (\partial\varphi/\partial\chi)^2 \right\rangle \propto C_2^2/R$, т.е. он содержит малый параметр Δ/R. Аналогично для момента импульса можно записать

$$L = L_* \left(\frac{R^2}{2\Delta^2} + \frac{2C_2 C_1}{1 + \sqrt{1 - C_1^2}} \frac{R}{\Delta} \right). \quad (6)$$

Далее анализ экстремума $\mathcal{L} = W - \hbar\omega L$ дает искомые выражения для параметров солитона в простом виде:

$$C_2 = a\frac{R}{\Delta} - c \ln \frac{R}{\Delta}, \; \frac{1}{1 - C_1^2} = C_2^2 \left[1 + \frac{\Delta}{R} \Phi\left(\frac{R}{\Delta}\right) \right],$$
$$\frac{\omega}{\omega_0} = a\frac{\Delta}{R}, \; a = \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \simeq 0.434,$$
$$c = \frac{a}{\sqrt{13}} \left[(4a + 1) \ln 2 - \frac{4a - 1}{2} \right] = 0.184, \quad (7)$$

где данные приведены с учетом существенных поправок по малым параметрам $1/\eta$ и $(\ln\eta)/\eta$, $\eta = R/\Delta$, опущенных для сокращения записи в (5), (6). Коэффициент C_1 оказался наиболее чувствительным к учету этих поправок, $\Phi(\eta) = 2.94 + 5.56 \ln\eta - 2\ln^2\eta - (1/\eta)(2.22 + 4.38 \ln\eta)(\ln\eta)^2$. Уравнения (7) хорошо описывают данные численного анализа полной системы уравнений для солитонов большого радиуса. Отклонения заметны только при $R/\Delta \leq 10$ (см. рис. 2).

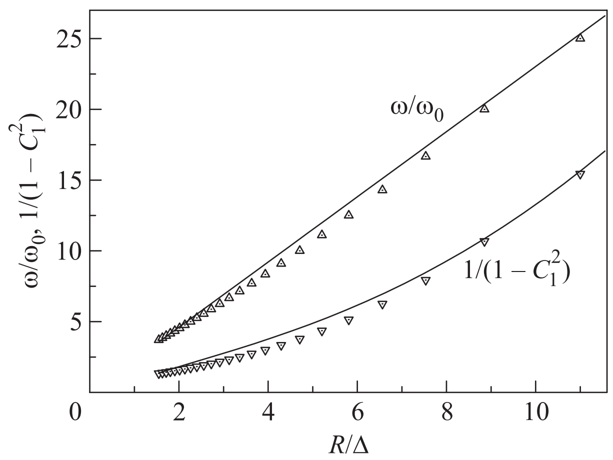

Рис. 2. Зависимость частоты и параметра C_1 для солитона в изотропном магнетике от радиуса солитона R. Сплошные линии – расчет по формуле (7), символы – результат численного анализа

Для исследования солитона в ферромагнетике с анизотропией в плоскости надо дополнительно учесть в энергии вклад слагаемого с $\Delta w = (K\varepsilon/2) \sin^2\theta \sin^2\varphi$. При $R \geq \Delta$ для него можно получить громоздкое выражение, содержащее ряд по функциям Бесселя вида $J_n(2C_2)$. С помощью программного пакета Wolfram *Mathematica* можно записать решение системы уравнений $\partial\mathcal{L}/\partial p_\alpha = 0$ для всех параметров $p_\alpha = C_1, C_2, R, b$. При этом можно с хорошей точностью считать, что $b = \Delta$, и исследовать зависимость лагранжиана только от трех пробных параметров, C_1, C_2 и R, а также от частоты ω. Уравнение $\partial\mathcal{L}/\partial R = 0$ приводит к уравнению $\hbar\omega = (\partial W/\partial R)/(\partial L/\partial R)$. Связь параметров солитона R, C_1, C_2 определяется парой уравнений $\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial C_i$, $i = 1, 2$, где $\tilde{\mathcal{L}} = W - L[(\partial W/\partial R)/(\partial L/\partial R)]$. Решив эту систему, можно выразить любые два пробных параметра решения через значение третьего. Удобно описывать параметры солитона (его частоту ω и анизотропию C_1 и C_2) при заданном значении размера солитона R.

Оказалось, что для достаточно малых ε различие решений с $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ несущественно. В частности, при $\varepsilon \leq 0.1$ зависимости $C_{1,2}(R)$ остаются монотонными и для каждого значения $R < 50\Delta$ есть только одно солитонное состояние. Однако при дальнейшем увеличении ε зависимость параметров солитона от R усложняется по сравнению с изотропным случаем. В частности, появляются участки "обратного хода" зависимостей $C_{1,2}(R)$, на которых $dC_2/dR < 0$, и зависимость $C_2(R)$ становится неоднозначной. Таким образом, в определенном интервале изменения R существует несколько различных солитонных состояний (см. пример с $\varepsilon = 0.2$ на рис. 3). При дальнейшем уве-

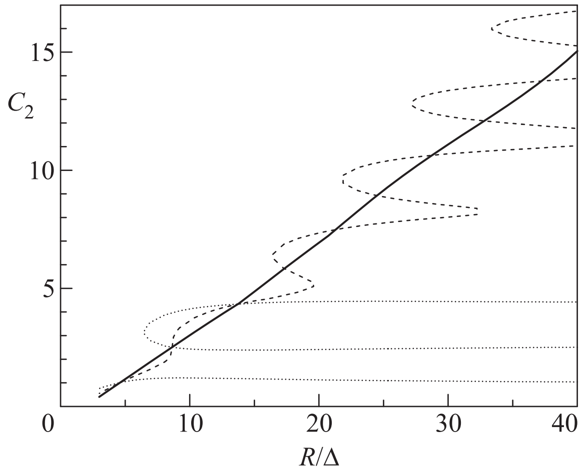

Рис. 3. Зависимость параметра C_2 от радиуса солитона R. Сплошная линия – изотропный магнетик ($\varepsilon = 0$), штриховой и пунктирной линиями представлены данные для умеренной ($\varepsilon = 0.2$) анизотропии в базисной плоскости магнетика и две нижние ветви зависимости для сильной ($\varepsilon = 1$) анизотропии

личении ε зависимость $C_2(R)$ расщепляется на большое количество ветвей, не связанных друг с другом, при изменении R в достаточно широких пределах. Две нижние ветви этой зависимости для значения $\varepsilon = 1$ представлены на рис. 3. Анализ устойчивости солитонов показал, что состояния с $dC_2/dR < 0$ неустойчивы. Солитонные же решения с $dC_2/dR > 0$ устойчивы для всех ветвей, т.е. при данном R может существовать несколько устойчивых солитонных состояний с различной структурой. В принципе это не противоречит никаким общим свойствам существенно нелинейных систем с солитонами. Однако возникает вопрос о том, какое из этих состояний образуется при заданном уровне накачки. Вывод о реализации одного из нескольких стабильных состояний может быть сделан с использованием критериев неравновесной термодинамики, базирующихся на оценке скорости производства энтропии. Однако детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной работы.

Таким образом, для ферромагнитной пленки с перпендикулярной анизотропией в плоскости пленки существуют солитонные решения с низкой пространственной симметрией. Солитон стабилизируется за счет сохранения орбитального момента поля намагниченности. Как при значительной анизотропии в плоскости пленки, так и в чисто одноосном случае ($\varepsilon = 0$) распределение намагниченности в солитоне достаточно большого радиуса сильно отличается от центрально-симметричного. В частности, форма границы солитона не круговая, а внутри границы имеет место существенная неоднородность распределения планарной компоненты **m** (см. рис. 1). Причина этого эффекта, который при $\varepsilon = 0$ можно рассматривать как спонтанное нарушение симметрии солитона, состоит в том, что солитону отвечает минимум энергии при заданном орбитальном моменте поля намагниченности и очевидный рост энергии при переходе к асимметричному состоянию компенсируется более быстрым увеличением орбитального момента. Такие низкосимметричные состояния наблюдались при численном моделировании процесса возбуждения солитонов спин-поляризованным током (см. рис. 1f работы [15]).

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев: Наукова думка, 1988.
2. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990); Physica D **3**, 363 (1981).
3. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, Екатеринбург: УроРАН, 2009.
4. R. Skomski, J. Phys.: Condens. Matter **15**, R841 (2003); *Advanced Magnetic Nanostructures* (ed. by D. J. Sellmyer and R. Skomski), Springer, Berlin, 2006.
5. Y. Liu, S. Gliga, R. Hertel, and C. M. Schneider, Appl. Phys. Lett. **91**, 112501 (2007); R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle, and C. M. Schneider, Phys. Rev. Lett. **98**, 117201 (2007).
6. Б. А. Иванов, Г. Г. Аванесян, А. В. Хвальковский и др., Письма в ЖЭТФ **91**, 190 (2010).
7. S. S. Cherepov, B. C. Koop, A. Yu. Galkin et al, Phys. Rev. Lett. **109**, 097204 (2012).
8. B. A. Ivanov and C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **99**, 247208 (2007).
9. V. S. Pribiag, I. N. Krivorotov, G. D. Fuchs et al., Nature Physics **3**, 498 (2007).
10. A. V. Khvalkovskiy, J. Grollier, A. Dussaux et al., Phys. Rev. B **80**, 140401 (R) (2009).
11. Y. S. Choi, K. S. Lee, and S. K. Kim, Phys. Rev. B **79**, 184424 (2009).
12. Q. Mistral, M. van Kampen, G. Hrkac et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 257201 (2008); A. Dussaux, B. Georges, J. Grollier et al., Nature Commun. **1**, 8 (2010); doi:10.1038/ncomms1006
13. T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf et al, Science **289**, 930 (2000); S. B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl et al, Science **304**, 420 (2004).

14. M. A. Hoefer, T. J. Silva, and M. W. Keller, Phys. Rev. B **82**, 054432 (2010).
15. M. A. Hoefer, M. Sommacal, and T. J. Silva, Phys. Rev. B **85**, 214433 (2012)
16. Б. А. Иванов, А. М. Косевич, Письма в ЖЭТФ **24**, 495 (1976); ЖЭТФ **72**, 2000 (1977).
17. А. С. Ковалев, А. М. Косевич, К. В. Маслов, Письма в ЖЭТФ **30**, 321 (1979).
18. В. П. Воронов, Б. А. Иванов, А. М. Косевич, ЖЭТФ **84**, 2235 (1983); Б. А. Иванов, В. А. Стефанович, ЖЭТФ **91**, 638 (1986).
19. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. Lett. **74**, 1859 (1995).
20. Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **56**, 118 (1992); А. А. Жмудский, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **65**, 899 (1997); ЖЭТФ **115**, 1511 (1999).
21. Д. В. Филин, Б. А. Иванов, ФНТ **37**, 916 (2011).