Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 6, с. 359 – 365

Экспериментальное обнаружение блокирования переноса вихрей и волн Россби при МГД-возбуждении квазидвумерных течений во вращающемся цилиндрическом сосуде

А. Е. Гледзер[+], *Е. Б. Гледзер*[+], *А. А. Хапаев*[+], *О. Г. Чхетиани*[+*1)]

[+]*Институт физики атмосферы им. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия*

[*]*Институт космических исследований РАН, 117810 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 декабря 2012 г.

После переработки 14 февраля 2013 г.

Проведены эксперименты по возбуждению встречных зональных течений МГД-методом во вращающемся цилиндрическом сосуде с коническим дном. Течения возникают в слое проводящей жидкости, находящейся в поле кольцевых магнитов, при действии радиального электрического тока. Поля скорости восстанавливаются методом PIV (Particle Image Velocimetry). В режимах быстрого вращения с тонким слоем жидкости, когда масштаб Россби–Обухова не превышает характерных размеров сосуда, возникает система возмущений с почти неподвижными блокированными антициклонами во внешней части течения и быстро перемещающимися циклонами в основном потоке. Построена диаграмма режимов в переменных относительных угловых скоростей усредненного зонального потока и переноса вихрей вокруг оси вращения системы. Основное внимание уделено результатам для областей диаграммы с медленным относительно вращающейся системы координат движением вихрей вблизи параметров для стационарных волн Россби (блокирование циркуляции). Результаты сравниваются с полученными ранее в аналогичных экспериментах с использованием метода источников–стоков.

DOI: 10.7868/S0370274X13060064

Для лабораторного исследования волн Россби и связанных с ними возмущений широко используются эксперименты с потоками однородной жидкости во вращающихся кольцевых каналах и цилиндрических сосудах, имитирующие процессы в атмосферах вращающихся планет. Волны Россби, взаимодействие и динамика которых, возможно, генерируют атмосферные образования, блокирующие западный перенос воздушных масс в средних широтах, возникают в атмосфере из-за того, что в проекции на местную вертикаль вектор угловой скорости глобального вращения изменяется с широтой (так называемый бета-эффект). В лабораторных экспериментах бета-эффект, как правило, моделируется радиальным изменением толщины слоя жидкости, например при наличии наклонного дна, а также формой дна, близкой к параболоидальной [1]. Это следует, например, из уравнения сохранения потенциального вихря Обухова–Чарни, которое в простейшей форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi - L_0^{-2}\psi)+[\psi,\Delta\psi] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0,\ \beta = -\frac{2\Omega_0}{h_0}\frac{dh_b}{dr}, \quad (1)$$

где ψ – функция тока бездивергентного двумерного поля скорости, Δ, и $[\ldots,\ldots]$ – оператор Лапласа и якобиан в полярных координатах, $L_0 = \sqrt{gh_0}/2\Omega_0$ – масштаб Обухова–Россби. В параметр β, кроме угловой скорости общего вращения Ω_0 и средней глубины слоя h_0, входит радиальное изменение высоты дна (осесимметричного) $h_b(r)$.

Имеется несколько типов подобных экспериментов. Методы генерации потоков в них варьируются от использования термической конвекции с возбуждением бароклинных волн Россби (ранние наиболее известные работы этого направления [2, 3]) до применения как дифференциального вращения дисков, возбуждающих баротропные сдвиговые течения [1, 4–7], так и метода источников–стоков, результаты для которого приведены в большом числе работ (см. [8–17]). При этом проводятся эксперименты как с твердой плоской крышкой, так и со свободной поверхностью. Параболическая форма свободной поверхности (увеличение толщины жидкости к внешнему краю сосуда из-за действия центробежной силы) также дает вклад в бета-эффект, как и коническое дно (при твердой крышке бета-эффект возможен только при наличии дна с изменяемой геометрией). Число возникающих вихревых структур и ско-

1)e-mail: lgg@ifaran.ru

рость их движения задают области на диаграммах режимов течений при различных внешних параметрах, которыми являются числа Рейнольдса, Тейлора и Россби, связанные с угловой скоростью общего вращения, диаметром сосуда, высотой слоя жидкости, вязкостью, объемной скоростью прокачки жидкости при использовании метода источников–стоков. В последние годы развитие PIV-методов (Particle Image Velocimetry) получения горизонтальной скорости и вертикальной завихренности позволяет вычислить соответствующие моменты полей скорости и завихренности [12].

Эксперименты во вращающемся цилиндрическом сосуде при параметрах, отличных от рассматриваемых здесь, были недавно проведены в работе [18]. При этом вычислялись среднее значение зональной скорости, зависящей от формы профиля зонального течения, определяемого распределением источников–стоков и общим вращением, а также скорость переноса вихревых структур. Встречные зональные потоки в экспериментах [18] возбуждались притоками (оттоками) массы на внешней границе сосуда и в его центральной части и стоком (источником) по окружности в его середине при действии силы Кориолиса и придонного трения. Это может соответствовать атмосферной циркуляции с восточными полярным и экваториальным переносами и западным средним течением в умеренных широтах. Однако для экспериментов с повышенной скоростью вращения сосуда (с периодами менее примерно 3 с) такая схема генерации потоков не реализуется из-за превалирующего действия центробежной силы, которая усиливает течение от центра на поверхность слоя жидкости в сосуде. Связано это с тем, что реальная циркуляция в сосуде является существенно трехмерной и стоки и источники жидкости на дне при быстром вращении установки не могут полностью контролировать течения на поверхности слоя. Фактически в этом случае реализуются режимы источника по одной окружности на дне (например, у внешней границы) и стока по другой окружности внутри сосуда, создающие только течения одного направления.

В данной работе для генерации встречных потоков, находящихся под действием бета-эффекта, использован МГД-метод, оказавшийся эффективным и при существенно более быстром вращении системы, чем это имело место в работе [18]. Кроме того, толщина слоя (проводящей) жидкости в сосуде почти на порядок меньше, чем для течений в экспериментах с источниками–стоками, что значительно уменьшает эффекты трехмерной циркуляции в слое. Режим быстрого вращения (угловая скорость $\Omega_0 = 2\pi/T$, $T \sim (2{-}3)$ с) с тонким слоем жидкости (средняя глубина слоя жидкости $h_0 \sim (1{-}1.5)$ см) дает возможность значительно уменьшить (до 8–10 см) по сравнению с экспериментами с использованием источников–стоков масштаб Россби–Обухова, который характеризует типичный размер вихрей в быстровращающихся слоях жидкости [6]. Эксперименты с встречными течениями в системе без вращения с МГД-генерацией радиально направленным током были выполнены еще в конце 70-х годов прошлого века (см. [19, 20]). Относительно недавно данный метод использовался в работе [21] для моделирования отдельных двумерных вихревых образований (полярный вихрь).

Представляемые далее результаты получены для вращающегося цилиндрического сосуда со свободной поверхностью (см. рис. 1). Общее вращение с угловой

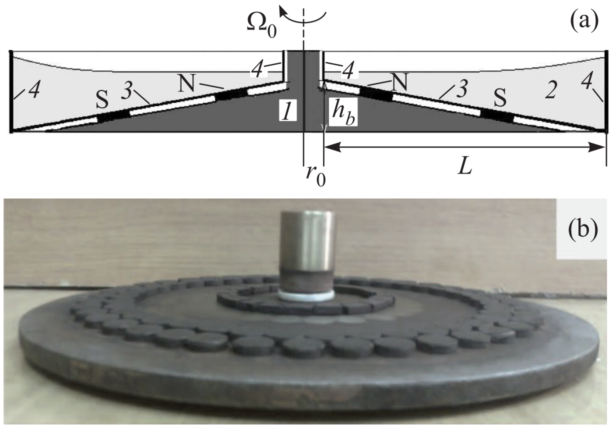

Рис. 1. (a) – Схема вращающегося сосуда с магнитной системой: *1* –коническая основа с постоянными магнитами S и N, *2* – электропроводящая жидкость, *3* – коническое дно, *4* – цилиндрические электроды. (b) – Коническая основа с постоянными магнитами

скоростью $\Omega_0 = 2\pi/T$ вплоть до $\Omega_0 \approx 3$ с$^{-1}$ соответствовало вращению Земли в южном полушарии. Сосуд с внутренним и внешним радиусами $r_0 = 1.5$ см и $L = 14.5$ см имеет пластиковое дно *3* конической формы с высотой h_b и наклоном $s = h_b/(L - r_0) = 0.038$. Слой жидкости в состоянии покоя имеет глубину h от 0.7 до 1.0 см у внутренней границы, что обеспечивает заполнение жидкостью при всех используемых угловых скоростях общего вращения. Пластиковое дно конусной формы закрывает железную коническую основу *1*, на которой находятся магниты круглой, квадратной или прямоугольной формы с поперечными размерами от 0.5 до 1.5 см. Магниты образуют два соосных кольца с разными полюсами в верхней части (N и S на рис. 1). На эти кольца и опирается пластиковое дно. Движение электропроводящей жидкости (10-процентный раствор медного купороса, $CuSO_4$) происходит над пластиковым дном. Из-за разной полюсности магнитных колец образуются два встречных потока, скорость которых зависит от величины электрического тока (100–900 мА), подаваемого на цилиндрические электроды *4* с радиусами r_0 и L. (Жидкость, которая попадает между пластиковым дном *3*, основой *1* и магнитами из-за того, что пространство между *1* и *3* не герметично, не влияет на основное движение над дном.) Подобные составные магнитные системы с успехом использовались для моделирования квазидвумерной турбулентности [22, 23].

Видеокамера, неподвижная относительно сосуда, установлена над ним по оси вращения. Она снимает картину, образуемую движением пробных частиц на поверхности жидкости. Методика PIV, разработанная в ИФА им. А.М. Обухова РАН, использовалась на сетке 75×75, покрывающей изображение сосуда на кадре. Движение частиц прослеживалось с интервалами $2/25$ и $4/25\,с^{-1}$. Так как скорости частиц в эксперименте не были большими (менее $1\,см{\cdot}с^{-1}$), то проблем с "потерей" частиц при вычислении скорости не возникало. Следует также отметить, что основными величинами, получаемыми из экспериментов, являются компоненты скорости, усредненные по времени и азимутальному углу. Это снижает возможную величину локальных ошибок при использовании методики. Кроме того, скорость переноса вихревых возмущений, полученная с помощью PIV-методики, контролировалась непосредственно по видеокадрам, поскольку положение крупных вихрей на них хорошо определяется. В любом случае точность определения величин, о которых будет идти речь, оценивается в 10–15%. Заметим, что в некоторых экспериментальных работах (см., например, [12]) PIV-методика проверялась с помощью непосредственного измерения скорости в одной-двух точках потока (*hot-film probes*).

Меняя направление тока между электродами, можно получать встречные потоки в сосуде с различной амплитудой поля скорости в зависимости от величины тока и диаметров окружностей, вдоль которых устанавливаются магниты (рис. 1b). Это приводит к образованию системы вихрей с циклоническим и антициклоническим внутренним вращением. На рис. 2 показано движение пробных частиц в последовательные моменты времени в течение периода T в одном из экспериментов, в котором зональные течения вблизи внутренней ("приполярное") и внешней ("умеренные широты") границ сосуда имеют, соответственно, антициклонический и циклонический характер. В левой нижней части рисунка вблизи внешней границы видны вихри с антициклонической направленностью вращения. Направления вращения в вихрях определяются при построении векторов скорости.

Рис. 2. Пример движения пробных частиц при усреднении за период T вращения сосуда в эксперименте

На рис. 3a показаны векторы скорости, полученные с помощью PIV-методики из видеоизображений для двух моментов времени этого же эксперимента, разделенных интервалом $2T/3$. Более быстрому зо-

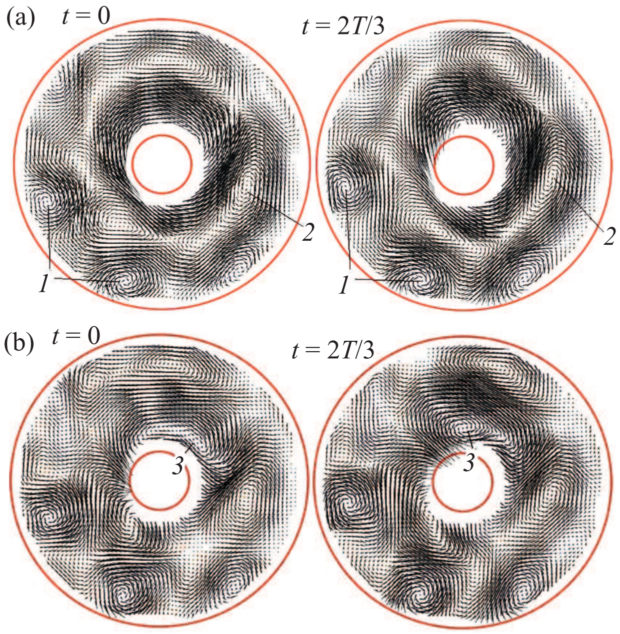

Рис. 3. Поле скорости $\mathbf{u}$ (a) и возмущений скорости $\mathbf{u}'$ (b) для эксперимента на рис. 2

нальному течению центральной области соответствует "сгущение" линий векторов скорости. Цифрой *1* отмечены антициклоны (вращение в них происходит против часовой стрелки, но мы по условиям эксперимента находимся в "южном" полушарии). За время $2T/3$ эти антициклоны сместились по часовой стрелке на сравнительно небольшой азимутальный угол. Цифрой *2* отмечен циклон вблизи среднего радиуса сосуда, смещающийся в противоположном направлении с большей скоростью. На рис. 4 приведен при-

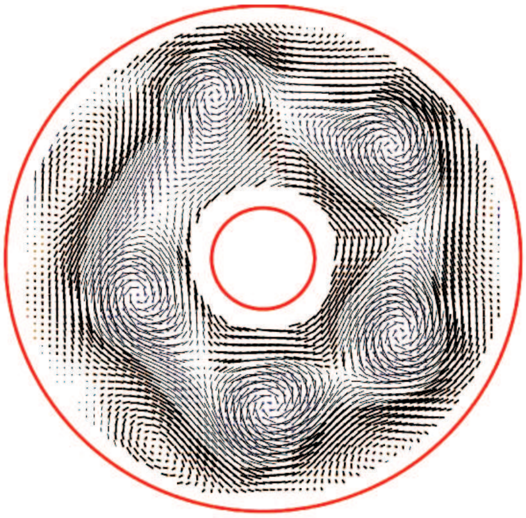

Рис. 4. Поле скорости **u** для системы из пяти антициклонических вихрей

мер поля скорости в режиме с пятью антициклонами, центры которых движутся против часовой стрелки на среднем радиусе сосуда.

На основе данных для поля скорости в узлах сетки путем усреднения по времени проведения эксперимента и по угловой переменной φ определяется средняя азимутальная скорость $u_\varphi(r)$. В работе [9] эта скорость находилась из расчета положений пробных частиц на фотографиях, что фактически делается и в PIV-методике. На рис. 5 показана средняя относительная угловая скорость $\omega(r) = u_\varphi(r)/(|\Omega_0|r)$ в зависимости от радиуса сосуда для нескольких экспериментов (с циклонической *1* и антициклонической *2* средними циркуляциями в центральной части канала). Усреднение по радиусу для каждого эксперимента определяет среднюю по радиусу сосуда относительную угловую скорость $\omega = \langle\omega(r)\rangle_r$. Она является одним из двух определяющих циркуляцию параметров, используемых ниже.

Для экспериментов, в которых зональная скорость у внутренней границы значительно превышает внешнюю зональную скорость (рис. 5, жирные линии), внутренняя вихревая структура течений плохо

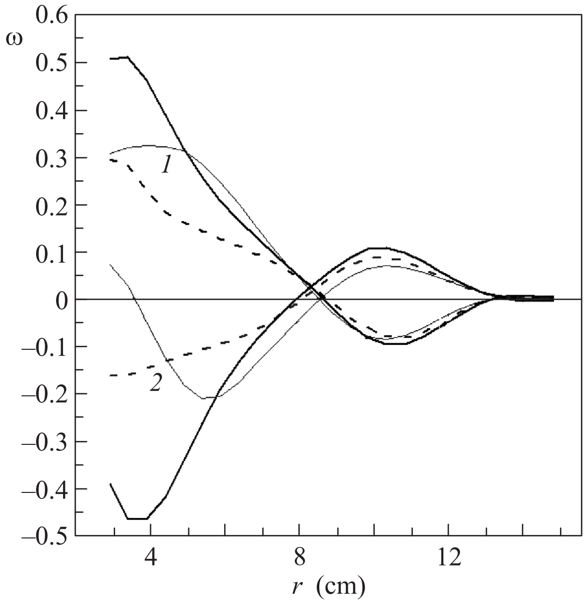

Рис. 5. Средняя относительная угловая скорость $\omega(r)$ для экспериментов с циклонической (*1*) и антициклонической (*2*) средними циркуляциями в центральной части канала

различима. Ее можно проявить путем построения поля возмущений скорости. Для этого из поля скорости **u**, получаемого PIV-методикой из видеоизображений (см., например, рис. 3a), необходимо вычесть среднюю азимутальную скорость $u_\varphi(r)$: $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - u_\varphi \mathbf{i}_\varphi$. На рис. 3b показаны поля скорости возмущенного движения для того же эксперимента, что и на рис. 3a, в те же моменты времени. После вычитания внутреннего струйного течения в поле возмущений проявились скрытые циклоны вблизи центральной области сосуда (цифры *3* на рис. 3b).

Для определения в каждый момент времени угловой скорости ω_v переноса вихревых возмущений находились координаты их центров как точек, для которых в окружающих их узлах вертикальные и горизонтальные компоненты скорости **u** меняют знак (при этом определяются также и седловые точки). На рис. 6 показаны значения угловых (азимутальных) координат (в смысле главного значения, т.е. $-\pi/2 < \varphi \le \pi/2$) этих центров для циклонического (верхние линии C на рисунках) и антициклонического (нижние линии A) вращений в вихрях. Цена деления по горизонтальным осям соответствует одному периоду T вращения сосуда. Рис. 6a дает временную картину для эксперимента, маркеры и векторы скорости для которого показаны на рис. 2 и 3. Рис. 6b построен для эксперимента, вихревая картина движения для которого продемонстрирована на

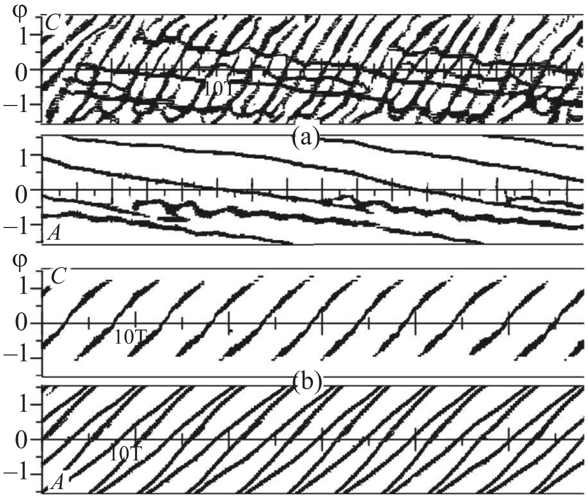

Рис. 6. Изменение во времени угловых координат φ центров циклонов (C) и антициклонов (A) для экспериментов с полем скорости на рис. 3a и на рис. 4b

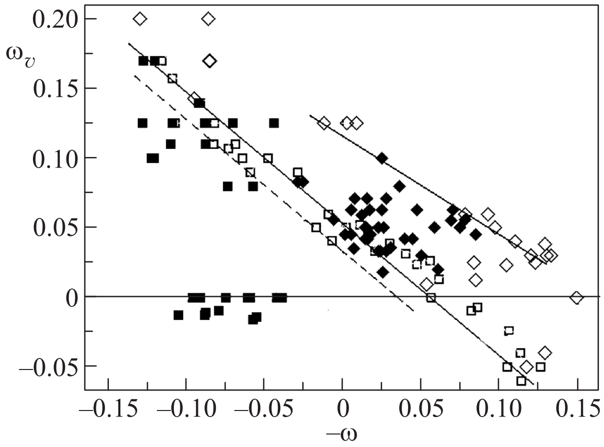

Рис. 7. Значения параметров ω и ω_v для экспериментов с МГД-генерацией (сплошные значки) и с источниками–стоками [17] (открытые значки). Квадраты и нижняя сплошная линия – для экспериментов с зональными скоростями типа *1* на рис. 5. Ромбы и верхняя сплошная линия – для экспериментов с зональными скоростями типа *2* на рис. 5. Штриховая линия проведена согласно (3) для параметров МГД-экспериментов с зональными скоростями типа *1* на рис. 5

рис. 4. Линии антициклонов на рис. 6b показывают временную динамику пяти антициклонов, которые видны на рис. 4. Имеются также два циклона у внешней границы сосуда, которые перемещаются в том же направлении (против часовой стрелки). Линии антициклонов на рис. 6a показывают их медленное перемещение по часовой стрелке (φ уменьшаются). Это антициклоны с цифрами *1* на рис. 3a. Для циклонов *2* на рис. 3a проявляется движение против часовой стрелки, как и быстрое перемещение циклонов *3* рис. 3b в поле возмущений $\mathbf{u}'$. Это крутые линии на рис. 6a, для которых φ увеличиваются. На рис. 6a проявляется медленное перемещение седловых точек между антициклонами с циклонической циркуляцией в их окрестности. Поскольку расположение антициклонов у внешней границы сосуда (рис. 2) не является строго равномерным по углу φ (они находятся в нижней части рис. 2), прохождение циклонов в области среднего радиуса сосуда в этой части замедляется из-за взаимодействия с антициклонами. Это отражают изгибы на крутых линиях C вблизи $\varphi = -\pi/2$ на рис. 6a.

Искомая величина ω_v определяется по диаграммам рис. 6 как средний наклон показанных на нем линий.

На рис. 7 сплошными квадратами и ромбами отмечены результаты вычисления величин ω и ω_v для экспериментов при токах от 400 до 900 мА (по горизонтальной оси отложена величина $-\omega$, так как "западный" перенос – чаще встречающийся термин, хотя в полярных координатах ему соответствуют отрицательные значения ω). Квадраты относятся к экспериментам, в которых средняя угловая скорость $\omega(r)$ положительна при r вблизи центральной области сосуда (как кривые *1* на рис. 5). Ромбы относятся к экспериментам с $\omega(r)$, аналогичным кривым *2* на рис. 5. Открытые квадраты и ромбы на рис. 7 относятся к соответствующим экспериментам из [18] с методом источников–стоков. Вдоль сплошных прямых линий на рис. 7 группируются результаты экспериментов с источниками–стоками из работы [18].

Теоретически линейную зависимость скорости переноса ω_v от средней зональной угловой скорости ω можно получить из простейших формул для волн Россби с зональным волновым числом k для баротропного течения на β-плоскости при наличии зонального потока с постоянной скоростью U_0, которые следуют из уравнения (1) (см. [6]). Фазовая скорость c волны имеет вид

$$c = U_0 - \frac{\beta + U_0 L_0^{-2}}{k^2 + L_0^{-2}}. \qquad (2)$$

Перейдем в этой формуле к относительным величинам $\omega_v = \frac{c}{|\Omega_0| R_v}$, $\omega = -\frac{U_0}{|\Omega_0| R_v}$, где R_v – радиус окружности, вдоль которой вращаются вихри (например, циклоны на рис. 2). Согласно (1) при наличии конического дна параметр β выражается через введенные выше параметры экспериментальной установки: $\beta = s\dfrac{2|\Omega_0|}{h_0}$ [9, 6], где $s \approx h_b/L$ – наклон конического дна. Определяя $k = 2\pi/L_v$, где L_v – длина волны возмущений вдоль азимута, без учета членов с масштабом Россби–Обухова L_0 (для указанных ниже масштабов $k^2 \approx 0.18\,\text{см}^{-2}$, $L_0^{-2} \approx 0.03\,\text{см}^{-2}$, $\beta \approx \approx 0.15\,\text{см}{\cdot}\text{с}^{-1}$, $U_0L_0^{-2} \approx 0.03\,\text{см}{\cdot}\text{с}^{-1}$ при $U_0 \approx 1\,\text{см}{\cdot}\text{с}^{-1}$) получаем выражение, которое не зависит от скорости внешнего вращения:

$$\omega_v = -\omega - \frac{1}{2\pi^2}\frac{h_b}{L}\frac{L_v^2}{h_0R_v}. \qquad (3)$$

Принимая для оценок $R_v = 7\,\text{см}$, $L_v = 14\,\text{см}$, $h_0 = = 1.5\,\text{см}$ и $h_b = 0.5\,\text{см}$ (3 циклона и 3 антициклона вдоль окружности с радиусом R_v), получаем линию, пересекающую горизонтальную ось в точке $-\omega = 0.033$ (штриховая линия на рис. 7).

Отметим (см. рис. 7), что часть значений ω и ω_v для МГД-экспериментов близка к результатам для экспериментов с источниками–стоками, несмотря на существенные отличия в размерах и способе генерации зональных течений. Однако в МГД-случае появился аномальный (с точки зрения предыдущего метода) режим, отмеченный сплошными квадратами вблизи $\omega_v = 0$ в отрицательной области горизонтальной оси на рис. 7. Этот режим появляется для течений с зональными потоками, для которых средняя угловая скорость $\omega(r)$ положительна при r вблизи центральной области сосуда (кривые *1* на рис. 5), так что сдвиговое течение встречных потоков задает в этой области циклоническую среднюю циркуляцию. При этом значения $\omega_v \approx 0$ имеют антициклоны (*1* на рис. 3а) на периферии течения вблизи внешней границы сосуда. Их перемещение по азимуту является очень слабым (линии A на рис. 6а). В некоторых экспериментах эти вихри становятся стационарными (блокированными) (сплошные квадраты при $\omega_v = 0$ на рис. 7).

Перечисленные отличия от экспериментов с источниками-стоками связаны с тем, что в рассматриваемой МГД-генерации вихрей их размеры и азимутальная скорость перемещения зависят от расстояния от оси вращения системы. В экспериментах же с источниками–стоками азимутальное движение вихрей происходит практически с одинаковой скоростью. Временные диаграммы на рис. 6а показывают, что при почти неподвижных (блокированных) антициклонах вблизи внешней границы сосуда движение циклонов на среднем радиусе сосуда и у его внутренней границы происходит с большой угловой скоростью.

Таким образом, МГД-метод, наряду с методом источников–стоков и использованием вращающихся дисков на дне или стенках сосуда, может быть эффективен при генерации встречных течений и связанных с ними вихревых структур во вращающихся системах с тонкими слоями жидкости. При этом различное расположение магнитных колец и изменение величин магнитного поля и тока дает возможность менять геометрию встречных течений, что приводит к появлению вихрей с отличающимися скоростями движения. В режимах быстрого вращения с циклонической циркуляцией среднего течения возникает система возмущений с почти неподвижными антициклонами во внешней части потока и быстро перемещающимися циклонами на среднем радиусе сосуда. При этом антициклонические вихри, блокированные на периферии, не препятствуют движению циклонов в основной части, хотя и уменьшают их скорость. События "обходов" циклонами блокирующего антициклона встречаются в реальной атмосферной циркуляции в умеренных широтах. Как видно из рис. 7, блокировка антициклонов в экспериментах имеет место для значительного интервала средней относительной угловой скорости зонального течения ($-0.11 < -\omega < -0.03$). Это свидетельствует о возможности реализации таких режимов при различных величинах внешних параметров.

Выражаем благодарность ведущему конструктору Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН В.С. Москалеву за помощь в создании экспериментальных установок, Г.С. Голицыну и Ю.Л. Черноусько за постоянное внимание к работе и консультации, анонимному рецензенту за конструктивные замечания. Работа поддержана РФФИ (гранты # 10-05-00457 и 11-05-01206) и программой президиума РАН # 19 "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках".

1. М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры*, М.: Наука, 1990.
2. R. Hide and P. Y. Mason, Adv. Phys **21**, 47 (1975).
3. P. L. Read and R. Hide, Nature **308**, 45 (1984).
4. R. Hide and C. W. Titman, J. Fluid Mech. **29**, 39 (1967).
5. H. Niino and N. Misawa, J. Atmos. Sci. **41**, 1992 (1984).
6. Ф. В. Должанский, *Основы геофизической гидродинамики*, М.: Физматлит, 2011.
7. В. В.Алексеев, С. В. Киселева, С. С. Лаппо, *Лабораторные модели физических процессов*, М.: Наука, 2005.
8. R. Hide, J. Fluid Mech. **32**, 737 (1968).
9. J. Sommeria, S. D. Meyers, and H. L. Swinney, Nature **331**, 689 (1988).
10. J. Sommeria, S. D. Meyers, and H. L. Swinney, Nature **337**, 58 (1989).

11. Y. Tian, E. R. Weeks, K. Ide et al., J. Fluid Mech. **438**, 129 (2001).
12. C. N. Baroud, B. B. Plapp, and H. L. Swinney, Phys. Fluids **15**, 2091 (2003).
13. J. R. Holton, Geophys. Fluid Dyn. **2**, 323(1971).
14. Ю. Л. Черноусько, Изв. АН СССР. ФАО **15**, 1084 (1979).
15. Ю. Л. Черноусько, Изв. АН СССР. ФАО **16**, 423 (1980).
16. Д. Ю. Манин, Ю. Л. Черноусько, Изв. АН СССР. ФАО **26**, 483 (1990).
17. И. А. Сазонов, Ю. Л. Черноусько, Изв. АН. ФАО **34**, 25 (1998).
18. А. Е. Гледзер, Е. Б. Гледзер, А. А. Хапаев, Ю. Л. Черноусько, ДАН **444**, 309 (2012).
19. В. А. Довженко, Ю. В. Новиков, А. М. Обухов, Изв. АН СССР. ФАО **15**, 1199 (1979).
20. Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, М.:Наука,1981.
21. Ya. D. Afanasyev and J. Wells, Geophys. and Astrophys.Fluid Dyn. **99**, 1 (2005).
22. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**,125101 (2009).
23. А. Е. Гледзер, Е. Б. Гледзер, А. А. Хапаев, О. Г. Чхетиани, ЖЭТФ **140**, 590 (2011).