Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 7, с. 469 – 472 © 2013 г. 10 апреля

Плазменные колебания краевых дираковских фермионов

В. А. Волков[1]), *И. В. Загороднев*

Институт радиотехники и электроники им. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 февраля 2013 г.

Вычислен закон дисперсии одномерных (1D) плазмонов в квазиодномерной системе безмассовых дираковских фермионов (ДФ). Рассмотрены две модельные 2D-системы, на краю которых возникают зоны краевых состояний, заполненные такими ДФ. Краевые состояния в первой системе, топологическом изоляторе, обусловлены топологическими причинами. Во второй же системе, системе массивных ДФ, они имеют таммовское происхождение. Показано, что законы дисперсии плазмонов в обеих системах в длинноволновом пределе отличаются только определением параметров (скоростью и глубиной локализации ДФ). Частота плазмонов формально имеет квантовый характер ($\omega \propto \hbar^{-1/2}$) и в случае кулоновского взаимодействия между электронами слабо зависит от уровня Ферми $E_{\rm F}$. В случае точечного взаимодействия зависимость от $E_{\rm F}$ усиливается. Квантовые особенности колебаний безмассовых 1D ДФ устраняются введением массы ДФ на уровне Ферми и их концентрации. Выявлено соответствие закону дисперсии классических 1D плазменных колебаний в узкой полосе "шредингеровских" электронов.

DOI: 10.7868/S0370274X13070060

1. Введение. Плазмоны в низкоразмерных электронных системах интересны своим бесщелевым законом дисперсии, зависящим от геометрии структуры, и возможностью непрерывной перестройки частоты с помощью напряжения на затворе. Остановимся на некоторых свойствах классических 1D-плазмонов. Такие колебания удобно измерять в узкой полоске с вырожденным 2D-газом обычных (шредингеровских) электронов со спектром $E = \hbar^2 k^2/2m$. Закон дисперсии плазменных колебаний в такой структуре в длинноволновом и низкочастотном пределах в пренебрежении запаздыванием имеет вид

$$\omega_{\rm 1D}(q_y) = |q_y| \sqrt{\frac{2e^2 n}{\epsilon_s m} \ln \frac{1}{|q_y| l}}, \qquad (1)$$

где ϵ_s – фоновая диэлектрическая проницаемость, l – характерная ширина полосы, q_y – волновой вектор плазмона вдоль нее, m – эффективная масса электронов. Проинтегрированная по поперечным координатам концентрация электронов n в (1) зависит от положения уровня Ферми $E_{\rm F}$. Детальные расчеты дисперсии 1D-плазмонов в приближении хаотических фаз (ПХФ) проведены в [1]. Экспериментальные доказательства закона (1) получены в [2, 3].

Выражение (1) имеет классический характер. Следует ожидать, что оно будет применимо и в системах с непараболическим спектром (например с релятивистским). Фермионы с релятивистским спектром часто называют дираковскими (ДФ). Особого внимания заслуживает система безмассовых ДФ, обладающих ультрарелятивистским спектром, $E = \pm c\hbar|k|$. Закон дисперсии плазменных колебаний безмассовых ДФ произвольной размерности был вычислен в рамках ПХФ в работе [4]. Оказалось, что в 1D-случае частота плазмонов не зависит от концентрации электронов, но содержит постоянную Планка $\hbar$. Объяснение этого удивительного результата основано на утверждении авторов [4] о принципиальной неклассичности плазмы безмассовых ДФ. Одна из целей настоящей работы – проверить эти выводы в двух разных моделях безмассовых квази-1D ДФ.

В последние годы развиваются исследования 3D топологических изоляторов (ТИ) в кристаллах типа халькогенидов висмута [5]. В рамках непрерывного подхода они описываются модифицированным уравнением Дирака с диспергирующим массовым членом. По топологическим соображениям на поверхности этих систем образуется 2D-зона безмассовых ДФ. Аналогичные краевые состояния (КС) могут существовать на краю полубесконечного 2D ТИ [6]. Так, зона квази-1D ДФ обнаружена в 2D топологическом изоляторе на основе квантовых ям HgTe/(Hg,Cd)Te [7]. Эта полупроводниковая структура имеет частично заполненный 1D проводящий канал КС. Краевые состояния защищены от рассеяния назад благодаря жесткой связи спина и импульса. Тем не менее, в дальнейшем мы будем пренебрегать вкладом спиновых колебаний в плазменные ко-

1)e-mail: VoVA@cplire.ru

лебания. Для 3D ТИ это справедливо в отсутствие сильных межчастичных корреляций [8, 9].

Безмассовые ДФ наблюдаются не только в ТИ. Так, поверхностные состояния с коническим спектром могут существовать на границе раздела узкощелевых полупроводников (типа халькогенидов свинца), зонная структура которых описывается уравнением Дирака, с вакуумом [10], а также на плавном (на атомных масштабах) гетеропереходе из таких полупроводников [11].

В настоящей работе в рамках ПХФ вычислен закон дисперсии плазмонов, обусловленных колебаниями квази-1D безмассовых ДФ, заполняющих зону КС в 2D-системах двух типов: ТИ и системе массивных ДФ.

2. Плазменные колебания краевых фермионов в 2D ТИ. Считается, что в квантовых ямах HgTe/(Hg,Cd)Te при определенных условиях (толщине и составе квантовой ямы) возникает фаза 2D ТИ [5, 6], которая и будет рассматриваться ниже. Электронный спектр такого состояния описывается эффективным гамильтонианом

$$H_{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} H(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & H^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} M - B_+k^2 & A(k_x - ik_y) \\ A(k_x + ik_y) & -M + B_-k^2 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $\hbar\mathbf{k} = \hbar(k_x, k_y, 0)$ – 2D-импульс, $M < 0$ – энергетический параметр, определяющий ширину запрещенной зоны, $A/\hbar$ – эффективная скорость света ($A > 0$). Параметры $B_\pm = B \pm D < 0$ отвечают за дисперсию массы и приводят к модификации дираковского спектра. Величина параметров $B_\pm$ имеет существенное значение для появления фазы ТИ [5, 12].

На краю системы гамильтониан (2) следует дополнить граничными условиями (ГУ). В ТИ обычно используют так называемые открытые ГУ, зануляющие на границе все четыре компоненты эффективной волновой функции [5, 13]. Используя эти ГУ и решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (2) на полуплоскости $x > 0$, получим энергетический спектр электронов как функцию импульса вдоль границы $\hbar k_y$. Среди решений будут как объемные, энергии E которых лежат в области $|E - Dk_y^2| > \sqrt{(M - Bk_y^2)^2 + Ak_y^2}$, так и краевые со спектром

$$E_s(k_y) = E_0 + s\hbar v k_y, \qquad (4)$$

$$E_0 = -\frac{MD}{B},\ v = \frac{\sqrt{B_+B_-}}{\hbar B}A. \qquad (5)$$

Здесь $s = \pm 1$ – киральность, различающая две ветви КС, v – скорость КС. Выражение (4) является точным (ср. с [13]).

В силу киральности КС их волновые функции содержат только две ненулевые компоненты. Опишем состояния с $s = +1$.

Выражение для двух верхних компонент собственной функции гамильтониана (2) имеет вид

$$\psi_{+,k_y} \approx \sqrt{\frac{\kappa_2 B_-}{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{B_+}{B_-}} \end{pmatrix} \left(e^{-\kappa_1 x} - e^{-\kappa_2 x}\right) e^{ik_y y}, \qquad (6)$$

где $k_x = i\kappa_{1,2}$, $\kappa_{1,2} > 0$. Здесь использовано условие $\kappa_2 \ll \kappa_1$, что в рассматриваемых квантовых ямах HgTe/(Hg,Cd)Te хорошо выполняется для КС, лежащих внутри объемной щели, т.е. при

$$\frac{M}{A}\sqrt{\frac{B_-}{B_+}} < k_y < -\frac{M}{A}\sqrt{\frac{B_+}{B_-}}. \qquad (7)$$

В этой же щели

$$\kappa_1 \approx \frac{A}{\sqrt{B_+B_-}},\ \kappa_2 \approx \frac{M\sqrt{B_+B_-}}{AB} + \frac{D}{B}k_y. \qquad (8)$$

Если уровень Ферми E_{F} расположен в объемной щели, то имеется частично заполненная зона КС, в которой могут возникать плазменные колебания. Определим обратную глубину локализации КС на уровне Ферми как значение κ_2 на этом уровне:

$$\kappa_{\mathrm{F}} = \frac{MB}{A\sqrt{B_+B_-}} + \frac{DE_{\mathrm{F}}}{A\sqrt{B_+B_-}}. \qquad (9)$$

Для характерных значений B и D [5] в случае, когда E_{F} лежит достаточно близко к дираковской точке E_0, вторым членом в (9) можно пренебречь. Тогда характерная “толщина” 1D-системы κ_{F}^{-1} не будет зависеть от положения уровня Ферми.

Используем длинноволновый ($|q_y| \ll \kappa_{\mathrm{F}}$) и низкочастотный ($\hbar\omega \ll |E_b(k_{\mathrm{F}} - q_y) - E_{\mathrm{F}}|$) пределы ($E_b$ – граница объемного спектра), когда можно считать систему КС квазиодномерной, а вкладом объемных состояний в поляризацию пренебречь. Тогда в ПХФ диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{yy}(q_y, \omega)$, фурье-компонента потенциала межэлектронного взаимодействия $V(q_y)$ и поляризационный оператор $\Pi(q_y, \omega)$ имеют вид

$$\epsilon_{yy}(q_y, \omega) = 1 - V(q_y)\Pi(q_y, \omega), \qquad (10)$$

$$V(q_y) = \frac{2e^2}{\epsilon_s}\int |\psi_{k_{\mathrm{F}}}(x)\psi_{k_{\mathrm{F}}}(x')|^2 K_0[|q_y(x - x')|]dxdx',$$

$$\Pi(q_y, \omega) = \sum_{k_y, s} \frac{f_0[E_s(k_y - q_y)] - f_0[E_s(k_y)]}{E_s(k_y - q_y) - E_s(k_y) + \hbar\omega + i0}, \qquad (11)$$

где $K_0(x)$ – функция Макдональда, имеющая логарифмическую асимптотику на малых аргументах, $\psi_{k_{\mathrm{F}}}$ – волновая функция КС на уровне Ферми с любым индексом "s" (т.к. $|\psi_{s,sk_{\mathrm{F}}}|^2$ не зависит от s), $f_0(E)$ – функция распределения Ферми–Дирака при нулевой температуре.

Нули диэлектрической проницаемости (10) обычным образом определяют закон дисперсии 1D-плазмонов в зоне КС, заполненной ДФ:

$$\omega(q_y) = |q_y|\sqrt{\frac{2e^2|v|}{\epsilon_s \pi\hbar}\ln\left(\frac{4\kappa_{\mathrm{F}}}{|q_y|}\right) + v^2}. \qquad (12)$$

Особенностями полученного закона дисперсии являются наличие квантовой скорости $e^2/\hbar$ и отсутствие зависимости от заполнения зоны КС при энергиях Ферми, лежащих достаточно близко к дираковской точке, что согласуется с [4]. Проясним физический смысл этих необычных результатов. Используем тот факт, что плотность состояний безмассовых ДФ в 1D-случае не зависит от энергии. Введем концентрацию n_{F} и массу m_{F} на уровне Ферми следующим образом:

$$n_{\mathrm{F}} = \frac{|E_{\mathrm{F}} - E_0|}{\pi\hbar|v|}, \quad m_{\mathrm{F}}v^2 = |E_{\mathrm{F}} - E_0|. \qquad (13)$$

Вторым членом под корнем в (12) обычно пренебрегают. Используя (13), квантовую формулу (12) можно записать в виде (1), если принять, что ширина полосы в (1) равна $(4\kappa_{\mathrm{F}})^{-1}$. В результате дисперсии 1D-плазмонов в системах безмассовых дираковских и шредингеровских электронов совпадают.

На квантовом языке это можно объяснить следующим образом. В пределе $|q_y| \ll \kappa_{\mathrm{F}}$ вид волновых функций, по которым усредняется кулоновское взаимодействие, непринципиален. Он влияет только на выражение под логарифмом в (12), а поляризационные операторы без учета спина в обоих случаях совпадают после линеаризации нерелятивистского электронного спектра вблизи уровня Ферми.

Другая особенность закона дисперсии (12) связана с отсутствием затухания Ландау, т.к. в поляризационном операторе (11) $\omega > |vq_y|$ и распад плазмона на пары электрон–дырка невозможен.

Наконец, отметим, что обсуждаемые плазменные колебания соответствуют зарядовым возбуждениям в 1D-жидкости Латтинжера (см. дискуссию в [14]).

Выше считалось, что плазменные колебания обусловлены дальнодействующим кулоновским взаимодействием между электронами. Рассмотрим теперь случай короткодействующего взаимодействия. Его можно реализовать с помощью экранирующего металлического электрода (затвора). Давно известно [15], что затвор сильно смягчает закон дисперсии 2D-плазмонов. Этот вывод справедлив, если расстояние до затвора d мало, в частности при $|q_y|d \ll 1$. Тогда уравнение Пуассона для потенциала плазмона φ сводится к уравнению $\delta\rho = \epsilon_s\varphi/(2\pi d)$ (приближение локальной емкости), где $\delta\rho$ – флуктуация плотности заряда КС. В этом приближении получим закон дисперсии экранированного 1D-плазмона в 2D ТИ:

$$\omega_{\mathrm{gat}}(q_y) = |q_y|\sqrt{\frac{4|v|e^2\kappa_{\mathrm{F}}d}{\epsilon_s\hbar} + v^2}. \qquad (14)$$

Дисперсия стала строго линейной по q_y, а вместо логарифмической появилась степенная зависимость от глубины локализации κ_{F}^{-1}, которая, вообще говоря, зависит от E_{F} (см. (9)).

3. Плазменные колебания краевых фермионов в 2D-системе массивных ДФ. При $B, D = 0$ гамильтониан (2) с помощью унитарного оператора

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_z & \sigma_0 - \sigma_z \\ i\sigma_y + \sigma_x & i\sigma_y - \sigma_x \end{pmatrix} \qquad (15)$$

сводится к обычному гамильтониану Дирака в представлении, обычно используемом в теории узкощелевых полупроводников:

$$c^*\begin{pmatrix} mc^*\sigma_0 & \hbar\sigma\mathbf{k} \\ \hbar\sigma\mathbf{k} & -mc^*\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi_v \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi_v \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где c^* – эффективная скорость света, $m(c^*)^2$ – полуширина запрещенной зоны, $\hbar\mathbf{k} = \hbar(k_x, k_y, 0)$ – 2D-импульс, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – вектор матриц Паули в стандартном представлении, σ_0 – единичная матрица 2×2.

В данном представлении оператор инверсии времени для 2D ТИ совпадает с оператором инверсии времени для ДФ:

$$T = \begin{pmatrix} i\sigma_y K_0 & 0 \\ 0 & i\sigma_y K_0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где K_0 – оператор комплексного сопряжения. Краевые состояния в этих системах отличаются спиновой структурой. Однако если последняя неважна, то в низкоэнергетическом приближении обе системы ДФ ведут себя похожим образом.

Уравнение (16) должно быть дополнено ГУ для эффективных волновых функций, которые являются огибающими настоящей волновой функции. В отличие от 2D ТИ здесь уже нельзя выбрать все четыре компоненты волновой функции нулевыми на краю, хотя бы потому что это приведет к исчезновению волновых функций во всем пространстве. Допустимый класс ГУ можно получить из условия эрмитовости гамильтониана и инвариантности проблемы к операции обращения времени, описываемой с помощью оператора (17). Для гамильтониана Дирака ГУ имеет следующий вид [10]:

$$(\psi_v - ia_0\sigma\mathbf{n}\psi_c)|_{x=0} = 0, \tag{18}$$

где $a_0 \in (-\infty, \infty)$ – вещественный феноменологический параметр, определяемый как объемными параметрами материала, так и микроскопической структурой границы, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к границе, которая расположена при $x = 0$.

Решая уравнение (16) с ГУ (18) для полуплоскости $x > 0$, нетрудно убедиться в том, что при любых a_0 существуют КС таммовского типа, волновая функция которых, $\psi_{\tau,k_y}(x, y) \propto \exp[ik_y y - \kappa_\tau(k_y)x]$, экспоненциально спадает от границы, а спектр имеет вид

$$E_\tau(k_y) = E_0 + \tau\hbar v k_y, \tag{19}$$

$$E_0 = m(c^*)^2\frac{1-a_0^2}{1+a_0^2},\ v = c^*\frac{2a_0}{1+a_0^2}. \tag{20}$$

Условие их существования записывается как

$$\kappa_\tau(k_y) = \tau k_y\frac{1-a_0^2}{1+a_0^2} - \frac{mc^*}{\hbar}\frac{2a_0}{1+a_0^2} > 0. \tag{21}$$

Здесь k_y – волновой вектор вдоль края, $\tau = \pm 1$ – квантовое число, нумерующее две киральные ветви краевых состояний, v – скорость КС, κ_τ – обратная глубина их локализации. Как и прежде, обозначим обратную глубину локализации КС на уровне Ферми через κ_F. Отметим, что при малых a_0 или a_0^{-1} она зависит от положения уровня Ферми.

Краевые состояния таммовского типа существуют для любых значений граничного параметра a_0, но лишь при $a_0 < 0$ попадают в объемную щель. Если и E_F расположен в этой щели, то имеется частично заполненная зона КС, аналогичная зоне КС в 2D ТИ. Рассматривая плазменные колебания ДФ в зоне КС в рамках ПХФ аналогично п. 2, получаем при $|q_y| \ll \kappa_\mathrm{F}$ в точности тот же закон дисперсии (12), что и для 2D ТИ, только теперь одночастичная скорость v не связана однозначно с объемными параметрами, а зависит и от свойств границы. Частота (14) может зависеть от E_F, если точка Дирака E_0 близка к краю щели (при этом $|a_0| \ll 1$ или $|a_0| \gg 1$).

4. Заключение. Итак, нами рассмотрена плазма безмассовых дираковских фермионов в 1D-зоне краевых состояний, которые могут возникать по разным причинам на краях 2D-систем двух типов. Законы дисперсии плазмонов в этих системах в длинноволновом пределе очень похожи и имеют формально квантовый вид. Введя массу на уровне Ферми, можно свести эти "квантовые законы" к дисперсии классических плазмонов в системе шредингеровских электронов. Показано, что роль характерной ширины 1D-системы играет четверть глубины локализации ДФ на уровне Ферми.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты # 11-02-01290 и 11-02-12143). И.В.З. выражает благодарность фонду "Династия".

1. S. Das Sarma and W. Y. Lai, Phys. Rev. B **32**, 1401 (1985).
2. A. R. Goni, A. Pinczuk, J. S. Weiner et al., Phys. Rev. Lett. **67**, 3298 (1991).
3. В. А. Ковальский, И. В. Кукушкин, М. Н. Ханнанов и др., Письма в ЖЭТФ **84**, 656 (2006) [JETP Lett. **84**, 560 (2007)].
4. S. Das Sarma and E. H. Hwang, Phys. Rev. Lett. **102**, 206412 (2009).
5. X. L. Qi, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
6. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S. C. Zhang et al., Science **314**, 1757 (2006).
7. M. Konig, S. Wiedmann, C. Brune et al., Science **318**, 766 (2007).
8. S. Raghu, S. B. Chung, X. L. Qi, and S. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **104**, 116401 (2010).
9. D. K. Efimkin, Yu. E. Lozovik, and A. A. Sokolik, Nanoscale Res. Lett. **7**, 163 (2012).
10. В. А. Волков, Т. Н. Пинскер, ФТТ **23**, 1756 (1981) [Sov. Phys. Solid State **23**, 1022 (1981)].
11. Б. А. Волков, О. А. Панкратов, Письма в ЖЭТФ **42**, 145 (1985) [JETP Lett. **42**, 178 (1985)].
12. S. Q. Shen, W. Y. Shan, and H. Z. Lu, SPIN **1**, 33 (2011).
13. B. Zhou, H. Z. Lu, R. L. Chu et al., Phys. Rev. Lett. **101**, 246807 (2008).
14. Q. P. Li, S. Das Sarma, and R. Joynt, Phys. Rev. B **45**, 13713 (1992).
15. А. В. Чаплик, ЖЭТФ **62**, 746 (1972) [JETP **35**, 395 (1972)].