Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 7, с. 491 – 495 © 2013 г. 10 апреля

О классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле в двумерии с дополнительным квадратичным интегралом движения

В. Г. Марихин[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 2013 г.

Рассмотрена проблема коммутирующих в смысле стандартной скобки Пуассона квадратичных гамильтонианов с электромагнитным полем. Показано, что, как и в квантовом случае, любая такая пара может быть приведена к канонической форме, которая позволяет построить полную классификацию решений в классе мероморфных решений для основной функции от одной переменной. Переход к канонической форме осуществляется заменой переменных, приводящей к переменным типа Ковалевской, аналогичной возникающей в теории интегрируемых волчков. Данный переход рассмотрен для гамильтониана заряженной частицы в двумерии, обладающего дополнительным квадратичным интегралом движения.

DOI: 10.7868/S0370274X13070102

1. Пары коммутирующих квадратичных гамильтонианов. В работе [1] мы рассмотрели задачу об уравнении Шредингера с дополнительным квадратичным интегралом движения. Конечно, принцип соответствия при $\hbar \to 0$ работает. Однако в работе [1] не была получена полная классификация решений. Мы рассмотрим классический случай отдельно.

В данной работе мы рассмотрим задачу о парах функций (гамильтонианов), квадратичных по импульсам в двумерном случае, коммутирующих в смысле стандартной скобки Пуассона. Данная задача решалась в работе [2]. В ней была получена почти полная классификация таких пар (см. также, например, [3]). Здесь мы ограничимся подклассом, когда один из гамильтонианов является гамильтонианом классической заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого случая будет построена полная классификация таких пар в классе мероморфных решений для основной функции $g(t)$ (см. ниже). Последнее эквивалентно тесту Пенлеве, который является одним из главных необходимых критериев интегрируемости задачи в теории интегрируемых систем.

Для простоты пары, которые коммутируют в смысле стандартной скобки Пуассона, $\{p_i, q_i\} = \delta_{i,j}$, мы будем называть просто коммутирующими.

Задача о классическом движении заряженной частицы в электромагнитном поле с дополнительным интегралом движения рассматривалась, например, в [4] (см. также цитированные там работы и [5]). В ней был получен ряд интересных вариантов таких уравнений. Однако использованный подход едва ли может претендовать на полную классификацию этих систем. Мы используем переход к переменным типа Ковалевской и получим каноническую форму квадратичных коммутирующих операторов. Будет проведена полная классификация коммутирующих гамильтонианов в смысле Пенлеве (см. выше). Обратный переход к гамильтониану заряженной частицы и к дополнительному интегралу осуществляется возвратом к оригинальным переменным.

Рассмотрим задачу о коммутирующих парах гамильтонианов, квадратичных по импульсам $\{H, K\} = 0$. В наиболее общем случае такие пары имеют вид

$$H = a_1(q_1, q_2)p_1^2 + 2b_1(q_1, q_2)p_1p_2 + c_1(q_1, q_2)p_2^2+ \quad (1)$$

$$+d_1(q_1, q_2)p_1 + e_1(q_1, q_2)p_2 + f_1(q_1, q_2),$$

$$K = a_2(q_1, q_2)p_1^2 + 2b_2(q_1, q_2)p_1p_2 + c_2(q_1, q_2)p_2^2+$$

$$+d_2(q_1, q_2)p_1 + e_2(q_1, q_2)p_2 + f_2(q_1, q_2),$$

где $\{p_i, q_i\} = \delta_{i,j}$, $\{p_i, p_i\} = 0$, $\{q_i, q_i\} = 0$, $i, j = 1, 2$.

Далее мы будем в основном следовать схеме работы [1]. Диагонализуем одновременно пару H и K, т.е. оператор $K - sH$, где s – параметр [2, 6]. Очевидно, что для этого должно быть выполнено уравнение на s:

$$\Phi(q_1, q_2, s) \equiv (b_2 - s\, b_1)^2 - (a_2 - s\, a_1)(c_2 - s\, c_1) = 0. \quad (2)$$

[1)]e-mail: mvg@itp.ac.ru

Решая квадратное уравнение (2), получаем в общем случае два корня, $s_1(q_1,q_2)$ и $s_2(q_1,q_2)$. Будем называть систему (1) невырожденной, если якобиан $D(s_1,s_2)/D(q_1,q_2) \neq 0$. Любая невырожденная система вида (1) заменой переменных $(q_1,q_2) \to (s_1,s_2)$ и каноническим преобразованием $p_1 \to p_1 + \frac{\partial}{\partial q_1}F(q_1,q_2)$, $p_2 \to p_2 + \frac{\partial}{\partial q_2}F(q_1,q_2)$ может быть приведена к каноническому виду (для упрощения мы делаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$). Итак, преобразованный гамильтониан H и дополнительный интеграл K имеют вид (здесь мы не рассматриваем несимметричный случай, что соответствует постановке задачи)

$$H = \pi_1^2 \frac{S(x)}{x-y} - \pi_2^2 \frac{S(y)}{x-y} + \frac{U_1 - U_2}{x-y}, \tag{3}$$

$$K = \pi_1^2 \frac{y\,S(x)}{x-y} - \pi_2^2 \frac{x\,S(y)}{x-y}\pi_2 - \tag{4}$$

$$-2\,S(x)A_1\pi_1 - 2\,S(y)A_2\pi_2 -$$

$$-S(x)A_1^2 - S(y)A_2^2 + \frac{y\,U_1 - x\,U_2}{x-y},$$

где

$$\pi_1 = P_1 - A_1,\ \pi_2 = P_2 - A_2,$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S(y)}}{\sqrt{S(x)}}\frac{Z_y}{x-y},\ A_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{S(x)}}{\sqrt{S(y)}}\frac{Z_x}{x-y}, \tag{5}$$

$Z = Z(x,y)$ – функция двух переменных,

$$U_1 = \frac{1}{2}\sqrt{S(x)}\partial_x \left[\sqrt{S(x)}\frac{Z_x^2}{x-y}\right] + f(x), \tag{6}$$

$$U_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{S(y)}\partial_y \left[\sqrt{S(y)}\frac{Z_y^2}{x-y}\right] + f(y),$$

$$Q = \frac{U_1 - U_2}{x-y}. \tag{7}$$

В таком случае пара (3), (4) коммутирует тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$Z_{x,y} = \frac{Z_x - Z_y}{2(y-x)}, \tag{8}$$

$$Z_x Q_y - Z_y Q_x = 0. \tag{9}$$

Доказательство этого утверждения состоит в прямом вычислении. Для начала заметим, что переменные преобразуются следующим образом:

$$(q_1,q_2) \to (s_1,s_2), \tag{10}$$

$$p_1 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_1}}{\Phi^1_{s_1}}P_1 + \frac{\Phi^2_{q_1}}{\Phi^2_{s_2}}P_2\right),\ p_2 = -\left(\frac{\Phi^1_{q_2}}{\Phi^1_{s_1}}P_1 + \frac{\Phi^2_{q_2}}{\Phi^2_{s_2}}P_2\right), \tag{11}$$

где $\Phi^i = \Phi(s_i,q_1,q_2)$. Скобки Пуассона $\{P_i,s_j\} = \delta_{i,j}$, $\{s_i,s_j\} = 0$, $\{P_i,P_j\} = 0$.

Нетрудно убедится в том, что при таком преобразовании перекрестных членов вида P_1P_2 в преобразованных гамильтонианах H и K нет. Главные (квадратичные) члены будут иметь такой же вид, как и в (3). Функцию S можно вычислить по формуле (в которой переменные q_i нужно выразить через s_i)

$$S(s_i) = \frac{1}{(\Phi^i_{s_i})^2}[(a_1 s_i - a_2)(\Phi^i_{q_1})^2 + \tag{12}$$

$$+2(b_1 s_i - b_2)\Phi^i_{q_1}\Phi^i_{q_2} + (c_1 s_i - c_2)(\Phi^i_{q_2})^2],$$

где для простоты мы обозначили $\Phi^i = \Phi(q_1,q_2,s_i)$.

Линейные по производным члены можно привести к виду (3) выбором калибровки. Остальные члены фиксируются, так же как и уравнения на функции $S(x)$, $Z(x,y)$, $f(x)$. Снова делаем замену $s_1 = x$, $s_2 = y$, – утверждение доказано. Конечно, функции $Z(x,y)$, $f(x)$ можно выразить через коэффициенты начальной пары H, K (1). Однако получающиеся выражения слишком громоздки и малопригодны для явных вычислений, т.е. целесообразно проводить их отдельно в каждом конкретном случае. Вместе с тем сформулированное утверждение гарантирует возможность преобразования любой невырожденной пары к каноническому виду (3), (4). В дальнейшем мы будем исследовать именно пары вида (3), (4).

2. Классификация и примеры. В работе [2] было отмечено, что решение уравнения Эйлера–Дарбу (8) можно искать в виде

$$Z = \delta(x+y) + (x-y)^2 \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n)}\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]\frac{(x-y)^{2n}}{2^{2n}n!(n+1)!}. \tag{13}$$

Заметим, что общее решение уравнения Эйлера–Дарбу содержит еще и член с особенностью $\log(x-y)$, но этот член не совместен с (9). Обрывая ряд для $Z(x,y)$ (как правило, достаточно оборвать его при $n = 6$ или 7), вычисляем Q по формуле (7) и подставляем Z, Q в уравнение (9). Полученное выражение разлагаем по степеням $x - y$, получая при $x = y$ несколько обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $g(x)$, $f(x)$, $S(x)$. Заметим, что, как следует из [1], $S(x)$ – полином второй степени для случая, когда гамильтониан в начальных переменных имеет вид, соответствующий движению заряженной частицы в электромагнитном поле с дополнительным квадратичным интегралом движения (подробнее см. ниже).

Находя функцию $f(x)$ из первого вышеупомянутого обыкновенного дифференциального уравнения и подставляя ее в следующие уравнения, получаем

$$\hat{A}_2\hat{B}[g(x)S(x)] = 0,\ \hat{A}_3\hat{B}[g(x)S(x)] = 0,\ \hat{B} = \partial_x^4, \tag{14}$$

где $\hat{A}_2$ и $\hat{A}_3$ –дифференциальные операторы по производным по x второй и третьей степени соответственно, которые не зависят от $S(x)$ (!), а зависят только от g и ее производных вплоть до $g^{(VI)}$, а также от параметра δ. Мы не приводим явные выражения для этих операторов ввиду их громоздкости.

Возможны два варианта:

1) $\hat{B}[g(x)S(x)] = 0 \Rightarrow g(x) = P_3(x)/S(x)$, где $P_3(x)$ – произвольный полином третьей степени;

2) $\hat{B}[g(x)S(x)] = \psi(x) \Rightarrow \hat{A}_2\psi = 0,\ \hat{A}_3\psi = 0$.

В этом случае последовательно найдем из последних двух уравнений ψ_{xxx}, ψ_{xx}, ψ_x. Рассмотрим тождество $\partial_x\psi_x = \psi_{xx}$. Подставив сюда производные ψ, получим в качестве условия совместности уравнение вида

$$g^{(6)} = F(g^{(5)}, g^{(4)}, g^{(3)}, g^{(2)}, g',\ g, \delta), \tag{15}$$

где F – рациональная функция от всех аргументов.

Применим к этому уравнению тест Пенлеве, т.е. будем искать регулярные особенности функции $g(x)$. Как оказывается, уравнение (15) допускает только два изолированных решения:

$$g(t) = -\frac{\delta}{8(t-\mu)} \tag{16}$$

и

$$g(t) = -\frac{\delta}{4(t-\mu)}. \tag{17}$$

Подставляя полученные решения в уравнение (9), видим, что оно выполняется, т.е. все интегрируемые случаи в смысле Пенлеве найдены.

Для восстановления точной функции (а не ряда) $Z(x,y)$ заметим, что если $g(x)$ – полином, то ряд (13) обрывается и $Z(x,y)$ – полином от x и y. Например, $g(x) = 1 \Rightarrow Z(x,y) = (x-y)^2$, $g(x) = x \Rightarrow Z(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x-y)^2$ и

$$g(x) = \frac{-q}{8(x-\mu)} \Rightarrow \tag{18}$$

$$\Rightarrow Z(x,y) = \left(\delta - \frac{1}{2}q\right)(x+y) + q\sqrt{x-\mu}\sqrt{y-\mu}.$$

Для данной заметки этого достаточно. Укажем, однако, что если g – полюс старшего порядка, то для восстановления Z нужно дифференцировать $Z(x,y)$ из (18) по параметру μ необходимое число раз. Таким образом, для любой рациональной функции $g(x)$ точная функция $Z(x,y)$ легко восстанавливается.

Без потери общности выберем полином второй степени S в виде $S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2)$.

Итак, первый случай, когда $g(x) = P_3(x)/S(x)$, разрешается и мы имеем (с точностью до сдвига) *общий случай*:

$$\begin{gathered} Z(x,y) = \\ = \left[\delta - \tfrac{1}{2}(q_1+q_2)\right](x+y) + q_m(x-y)^2(x+y) + \\ + q_1\sqrt{x-x_1}\sqrt{y-x_1} + q_2\sqrt{x-x_2}\sqrt{y-x_2}, \\ S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2), \\ f(x) = -\frac{x_1-x_2}{4}\left(\frac{q_1^2}{x-x_1} - \frac{q_2^2}{x-x_2}\right) - \\ -4q_m^2x^2S(x) + 4q_mx^2(q_1+q_2-2\delta). \end{gathered} \tag{19}$$

Во втором случае изолированных решений (16) и (17) имеем $Z = \delta\left[\frac{1}{2}(x+y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right]$ и $2\delta\sqrt{x}\sqrt{y}$. Формально при соответствующем выборе констант два последних случая являются подслучаями общего решения (19). Однако функции $f(x)$ не являются пределами общего случая (19) и должны быть рассмотрены отдельно.

Случай Стеклова:

$$\begin{gathered} Z(x,y) = \delta\left[\frac{1}{2}(x+y) + \sqrt{x}\sqrt{y}\right], \\ S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2), \end{gathered} \tag{20}$$

$$f(x) = f_q\sqrt{x} + x_1\frac{\delta^2}{4x},\ x_2 = 0.$$

Корневой случай:

$$Z(x,y) = 2\delta(\sqrt{x}\sqrt{y}),\ S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2), \tag{21}$$

$$f(x) = \frac{f_m}{x} - 2x_1x_2\frac{\delta^2}{x^2}.$$

Ниже мы покажем, почему в данной физической задаче $S(x)$ – полином второй степени, опишем переход к физическим координатам и приведем ряд примеров.

3. Переход к физическим координатам. Примеры. Перепишем гамильтониан H движения заряженной частицы в электромагнитном поле в более привычной форме:

$$H = \tilde{\pi}_1^2 + \tilde{\pi}_2^2 + u(q_1,q_2), \tag{22}$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = p_1 - \mathcal{A}_1(q_1,q_2), \quad \tilde{\pi}_2 = p_2 - \mathcal{A}_2(q_1,q_2),$$

а значит, в (1) $a_1(q_1,q_2) = 1$, $b_1(q_1,q_2) = 0$, $c_1(q_1,q_2) = 1$.

Можно выбрать дополнительный интеграл, коммутирующий с H, в виде

$$K = a_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1^2 + 2b_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}_2 + c_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_2^2 + \\ + w_1(q_1,q_2)\tilde{\pi}_1 + w_2(q_1,q_2)\tilde{\pi}_2 + U(q_1,q_2). \tag{23}$$

Тогда условие $\{H,K\}=0$ для старших по импульсам членов приводит (с точностью до сдвига переменных q_1,q_2 и умножения K на число) к следующим выражениям для старших коэффициентов дополнительного интеграла K (ср. с [1]):

$$a_2(q_1,q_2) = q_2^2 + \mu^2, \quad b_2(q_1,q_2) = -q_1q_2 + \kappa, \tag{24}$$

$$c_2(q_1,q_2) = q_1^2 + \nu^2.$$

Эта параметризация несколько отличается от параметризации из [1] тем, что здесь исключен лишний параметр k, наличие которого эквивалентно замене $K \to k\,K$. Поскольку коэффициенты a_i,b_i,c_i известны, вычислим функцию $S(s)$ по формуле (14):

$$S(x) = 4(x-x_1)(x-x_2),\ x_1 = \mu^2+\lambda^2,\ x_2 = \nu^2-\lambda^2, \tag{25}$$

где параметр λ определяется условием

$$\kappa^2 = \lambda^2(\mu^2-\nu^2+\lambda^2).$$

Таким образом, функция S во всех случаях является полиномом второй степени. Более того, корни этого полинома параметризованы целым образом.

Дальнейшая процедура состоит в следующем.

1. Вычисляем функции $s_1(q_1,q_2)$ и $s_2(q_1,q_2)$ из уравнения (2).

2. Выбираем какой-либо набор функций $Z(x,y)$, $S(x)$, $f(x)$ из (19), (20) или (21).

3. Вычисляем все коэффициенты в выражениях (3) и (4) для H и K, соответственно, с помощью формул (5) и (6).

4. Обращаем формулу (11), получая

$$P_1 = -\Phi^1_{s_1}\frac{\Phi^2_{q_2}p_1 - \Phi^2_{q_1}p_2}{\Phi^1_{q_1}\Phi^2_{q_2} - \Phi^1_{q_2}\Phi^2_{q_1}}, \tag{26}$$

$$P_2 = \Phi^2_{s_2}\frac{\Phi^1_{q_2}p_1 - \Phi^1_{q_1}p_2}{\Phi^1_{q_1}\Phi^2_{q_2} - \Phi^1_{q_2}\Phi^2_{q_1}}.$$

5. Подставляем выражения для импульсов P_1, P_2 в вычисленные H и K. Делаем замены

$$s_1 \to s_1(q_1,q_2), \quad s_2 \to s_2(q_1,q_2),$$

$$x \to s_1(q_1,q_2), \quad y \to s_2(q_1,q_2),$$

получая коммутирующую пару $H(p_1,p_2,q_1,q_2)$, $K(p_1,p_2,q_1,q_2)$, которую можно привести к физическому виду (22), (23).

Хотя описанная выше процедура является прямой, она представляет довольно нетривиальную алгебраическую задачу преобразования выражений, содержащих корни от полиномов (и даже корни от полиномов плюс корни от других полиномов), к рациональному виду (как правило). Однако в каждом конкретном случае задача может быть доведена до конца. При этом коэффициенты $F_i(q_1,q_2)$ при различных степенях импульсов представляют собой очень громоздкие выражения, в чем можно убедиться, подсчитав число параметров. Действительно, общий случай (19) содержит 4 параметра, переход к физическим переменным – еще 3 параметра плюс сами независимые переменные q_1, q_2, т.е. коэффициенты $F_i(q_1,q_2)$ на самом деле зависят от 9 переменных.

Приведем некоторые примеры. Начнем с изолированных решений (21) и (20). Случай (21) был подробно рассмотрен в работе [1] (необходимо лишь положить $\hbar=0$). Напомним, что в этом случае магнитное поле ведет себя как $B\sim 1/r^3$, а потенциал $u\sim 1/r^2$ при $r\to\infty$.

Выражения становятся менее громоздкими при редукции $\lambda=\nu \Rightarrow \kappa=\mu\nu$, $x_2=0$, $x_1=\mu^2+\nu^2$.

Так, случай Стеклова (20) при этой редукции оказывается тривиальным, $H = p_1^2+p_2^2+ + 1/\sqrt{(x-\mu)^2+(y+\nu)^2}$, и при сдвиге координат легко интегрируется в полярных координатах.

Рассмотрим такие подслучай общего случая (19): $q_1=0$, $q_2=0$. В этом примере $i\,q_m\to q_m$, $i\delta\to\delta$,

$$\mathcal{A}_1(q_1,q_2) = \frac{q_m}{2}(3y\mu^2 - 2\mu\nu x + 3y^3 + 3x^2y + \nu^2y),$$

$$\mathcal{A}_2(q_1,q_2) = \frac{q_m}{2}(x\mu^2 - 2\mu\nu y + 3xy^2 + 3x\nu^2 + 3x^3),$$

$$u = -2q_m^2[(x-\mu)^2+(y-\nu)^2](x^2+y^2+\mu^2+\nu^2)\times \\ \times[(x+\mu)^2+(y+\nu)^2] + 4q_m\delta(\mu^2+\nu^2-x^2-y^2).$$

Магнитное поле $B = 2q_m[3(x^2+y^2)+\mu^2+\nu^2]$, а дополнительный интеграл можно восстановить.

Итак, в настоящей работе мы получили полную классификацию квазиштеккелевых гамильтонианов (т.е. функций H,K вида (3), (4)) в случае, когда функция $S(x)$ – полином второй степени. Было бы любопытно получить и полную классификацию. Однако только вариант квадратичных полиномов S приводит к физически интересному случаю, когда один из гамильтонианов, а именно (22), описывает движение заряженной частицы в электромагнитном поле.

Полученные системы являются интегрируемыми по теореме Лиувилля: имеются два коммутирующих интеграла движения при двух степенях свободы. Для квазиштеккелевых гамильтонианов (3), (4) известно только частичное разделение переменных [7]. Явные решения пока не известны.

Автор признателен В.В. Соколову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 10-01-00088).

1. В. Г. Марихин, Письма в ЖЭТФ **94** (3), 262 (2011).
2. В. Г. Марихин, В. В. Соколов, ТМФ **149** (2), 147 (2006).
3. H. M. Yehia, J. Phys. A **25**, 197 (1992).
4. B. Dorizzi, B. Grammatios, A. Ramani, and P. Winternitz, J. Math. Phys. **26**, 3070 (1985).
5. E. V. Ferapontov and A. P. Fordy, Rep. Math. Phys. **44**(1/2), 71 (1999).
6. L. P. Eisenhart, Ann. Math. **35**, 284 (1934).
7. V. G. Marikhin and V. V. Sokolov, Reg. and Chaot. Dynamics **10**(1), 59 (2005).