Письма в ЖЭТФ, том 97, вып. 9, с. 642 – 648

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проект РФФИ # 10-02-00312а

Квантовые корреляции и томографическое представление

О. В. Манько[1], *В. Н. Чернега*[1]

Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 2013 г.

Дан обзор вероятностного представления квантовой механики, в рамках которого состояния описываются распределением вероятности вместо волновой функции и матрицы плотности. Получены соотношения неопределенностей, записанные в виде интегральных неравенств, содержащих измеряемые оптические томограммы квантовых состояний. Выведены формулы для вероятностей переходов и параметра чистоты через томографические распределения вероятности. Получены неравенства для энтропий Шеннона и Реньи, ассоциированных с квантовыми томограммами. Разработана схема звездочного произведения томограмм.

DOI: 10.7868/S0370274X13090129

1. Введение. Цель настоящей работы – привести некоторые новые результаты, полученные при выполнении гранта РФФИ # 10-02-00312. Ключевым моментом работы является использование и развитие новой формулировки квантовой механики [1, 2], в которой состояние системы описывается стандартной функцией распределения вероятностей. В классической статистической механике состояние частицы задается неотрицательной функцией распределения вероятности на фазовой плоскости $f(q,p,t)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля. В квантовой механике чистое состояние частицы задается комплексной волновой функцией $\psi(x,t)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера, а смешанные состояния – комплексной эрмитовой матрицей плотности $\rho(x,x',t)$, удовлетворяющей уравнению фон Неймана [3, 4]. Классические и квантовые состояния в таком описании определяются по-разному. Попытки сблизить их описания привели к введению действительной функции Вигнера $W(q,p,t)$ [5], связанной с матрицей плотности обратимым преобразованием Фурье и удовлетворяющей уравнению Вигнера–Мойала [5, 6]. Функция Вигнера по некоторым свойствам похожа на классическую функцию распределения $f(q,p,t)$. Однако она не является распределением вероятности, поскольку может принимать отрицательные значения. Недавно удалось построить новое представление квантовых и классических состояний, описывая их одинаково функцией распределения вероятностей. Это распределение, называемое также томографическим распределением или томограммой, связано с матрицей плотности системы [3, 4] обратимым интегральным преобразованием. Функция Вигнера [5] состояния системы связана с томограммой преобразованием Радона [7]. С волновой функцией томограмма связана дробным преобразованием Фурье [8]. Томографическое вероятностное представление спиновых состояний было найдено в [9, 10]. Как было показано в [11], томографическое представление может рассматриваться как новый вариант формулировки квантовой механики с использованием схемы квантования, основанной на формализме звездочного произведения функций. Этот формализм для функций на фазовом пространстве, как и формализм квазираспределений, задающих спиновое состояние, был рассмотрен в [12]. Формализм функции Вигнера, задающей состояние систем, а также наблюдаемых – символов Вейля эрмитовых операторов [13], использующихся в квантовой механике, позволяет вместо гильбертова пространства использовать алгебру функций на фазовом пространстве с нелокальным правилом их умножения, задаваемого интегральным ядром Грюневальда [14] или правилом Мойала [6]. Как было выяснено [15],

[1]e-mails: omanko@sci.lebedev.ru; vchernega@gmail.com

в вероятностном представлении квантовой механики реализуется другая схема звездочного произведения томографических символов операторов. При этом существует несколько томографических способов описания квантового состояния вероятностями, в частности симплектическая томография [1], томография счета фотонов [16–18], томография центра масс [19]. Все томографические схемы связаны как между собой, так и со схемой Мойала–Вейля–Вигнера интегральными преобразованиями, часть из которых была найдена в ходе выполнения проекта. В качестве приложения полученных результатов в томографическом представлении были изучены различные физические системы, такие, как квантовый колебательный контур, система двух связанных квантовых колебательных контуров и джозефсоновский контакт [20, 21]. Как было отмечено в работе [22], в данных системах можно наблюдать аналог динамического эффекта Казимира [23]. Сила Казимира – это сила притяжения между двумя незаряженными плоскостями в вакууме. Она возникает из-за зависимости свойств вакуума электромагнитного поля от геометрии системы. Энергия вакуума зависит от геометрических параметров системы. В случае зависящих от времени параметров возникает динамический эффект Казимира. Энергия внешнего механического источника, изменяющего параметры системы, преобразуется в энергию электромагнитного излучения [23]. В работах [24, 25] было предложено использовать параметрический джозефсоновский контакт для получения аналога динамического эффекта Казимира. Благодаря этому эффекту появляется возможность создания в нем колебаний тока без подключения к внешним источникам тока только при изменении его емкости или критического тока. Прикладывая к переходу внешнее воздействие, меняющее его параметры, получаем электрические колебания, т.е. имеем квантовый генератор тока [24, 25]. В научной литературе подобные эффекты называются квантовой электродинамикой контуров (см., например, [26, 27]). В работах [28, 29] в томографическом представлении квантовой механики рассматривались процесс вынужденного комбинационного рассеяния и рассеяние Мандельштама–Бриллюэна. Были найдены томограммы состояний фотон-фононной моды, появляющихся в результате взаимодействия лазерного излучения со средой. Обсуждались различные случаи начальных состояний среды. Исследовалось явление перепутанности фотон-фононной моды в зависимости от начального состояния среды. В [30] исследовались статистики фотонов и явление перепутанности мод электромагнитного поля в различных квантовых состояниях. Как развитие работ [30, 31] было рассмотрено двухмодовое гауссово состояние электромагнитного поля в схеме томографии счета фотонов [32].

В настоящей статье внимание сфокусировано на части результатов, полученных в работе над проектом. Мы приведем формулы, позволяющие найти характеристики квантовых свойств исходя из вероятностей, задающих состояния, например параметр чистоты или вероятность перехода между разными состояниями (фиделити). Параметр чистоты и фиделити в схеме томографии счета фотонов исследовались в работе [33]. Фиделити в томографии центра масс обсуждалось в работе [34]. В томографическом представлении были рассмотрены состояния классических систем [35], исследованы их свойства, получены ядра звездочного произведения классических и квантовых томограмм, исследованы классы допустимых томограмм состояний классических систем и допустимых томограмм состояний квантовых систем.

В настоящей работе, следуя [36–39], мы изучаем известные и новые соотношения неопределенностей в томографическом представлении и возможность их экспериментальной проверки.

2. Состояние в томографическом представлении. В работе [1] была введена схема симплектической томографии. Рассмотрим оператор ($\hbar = 1$)

$$\widehat{X} = \mu\hat{q} + \nu\hat{p}, \tag{1}$$

где $\hat{q}$ и $\hat{p}$ – координата и импульс соответственно. Распределение вероятности (симплектическая томограмма) $w\,(X,\,\mu,\,\nu)$ непрерывной наблюдаемой X нормировано по отношению к переменной X и зависит от двух действительных параметров, μ и ν. Томограмма $w\,(X,\,\mu,\,\nu)$ связана с функцией Вигнера $W(q,\,p)$, описывающей квантовое состояние системы, преобразованием Радона:

$$w\,(X,\,\mu,\,\nu) = = \int \exp\left[-ik(X-\mu q-\nu p)\right] W(q,\,p)\,\frac{dk\,dq\,dp}{(2\pi)^2}. \tag{2}$$

Физический смысл параметров μ и ν состоит в том, что они описывают ансамбль систем отсчета в фазовом пространстве, подвергнутых преобразованиям поворота и изменения масштаба осей координат, в которых измеряется наблюдаемая величина X. Обратное преобразование определяет функцию Вигнера:

$$W(q,\,p) = = \frac{1}{2\pi}\int w\,(X,\,\mu,\,\nu)\exp[-i(\mu q+\nu p - X)]\,d\mu\,d\nu\,dX. \tag{3}$$

Томограмма для чистого состояния выражается через волновую функцию [40]:

$$w(X,\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi|\nu|}\left|\int\psi(y)\exp\left[\frac{i\mu y^2}{2\nu}-\frac{iXy}{\nu}\right]dy\right|^2.$$

Функция Вигнера и волновая функция задают квантовое состояние. С другой стороны, функция Вигнера может быть восстановлена при помощи преобразования (3) по симплектической томограмме. Следовательно, квантовое состояние задано, если известна функция распределения вероятности $w\,(X,\,\mu,\,\nu)$. Если $\mu=\cos\theta$ и $\nu=\sin\theta$, где θ – угол поворота системы отсчета в фазовом пространстве, то симплектическая томограмма превращается в оптическую томограмму $w_0(X,\theta)$ [41], измеряемую экспериментально [42] и определяющую функцию Вигнера. Квантовое состояние можно задать и при помощи другой томограммы, которая называется томограммой счета фотонов. Томография счета фотонов [16–18] – это метод реконструкции оператора плотности квантового состояния по измеряемой функции распределения по числу фотонов. Томограмма счета фотонов определяется при помощи формулы

$$\omega(n,\alpha)=\langle n\mid\hat D(\alpha)\hat\rho\hat D^{-1}(\alpha)\mid n\rangle \tag{4}$$

и является функцией числа фотонов n и комплексного числа $\alpha=\mathrm{Re}\,\alpha+i\,\mathrm{Im}\,\alpha$. В формуле (4) $\hat\rho$ – оператор плотности квантового состояния, а $\hat D(\alpha)$ – оператор сдвига Вейля: $\hat D(\alpha)=\exp\left(\alpha\hat a^\dagger-\alpha^*\hat a\right)$, где $\hat a$, $\hat a^\dagger$ – операторы рождения и уничтожения фотонов. Следуя [31, 32], рассмотрим связь между томограммами счета фотонов, оптическими и симплектическими томограммами. Томограмма счета фотонов связана с симплектической томограммой интегральным преобразованием

$$\omega(n,\alpha)=\int w(X,\mu,\nu)K(X,\mu,\nu,n,\alpha)\,dX\,d\mu\,d\nu. \tag{5}$$

Ядро интегрального преобразования (5) имеет вид

$$\begin{aligned}K(X,\mu,\nu,n,\alpha)=\\=\frac{1}{2\pi}\exp\left[iX+\frac{\nu-i\mu}{\sqrt2}\alpha^*-\frac{\nu+i\mu}{\sqrt2}\alpha\right]\times\\\times L_n\left(\frac{\nu^2+\mu^2}{2}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

где $L_n\,(x)$ – полиномы Лаггера. Томограмма счета фотонов может быть выражена также и через оптическую томограмму $w_0(X,\theta)=w(X,\cos\theta,\sin\theta)$ [31, 32]:

$$\begin{aligned}w(n,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\times\\\times\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty k\exp\Big\{ik[X-\sqrt2(\mathrm{Re}\alpha\cos\theta+\\+\mathrm{Im}\alpha\sin\theta)]-\frac{k^2}{4}\Big\}\times\\\times L_n\left(\frac{k^2}{2}\right)w_0(X,\theta)\,d\theta\,dk\,dX.\end{aligned}$$

3. Квантование с помощью звездочного произведения. В квантовой механике наблюдаемые величины описываются операторами, действующими в гильбертовом пространстве состояний системы. Следуя [11, 15], рассмотрим оператор $\hat A$ и предположим, что существует множество операторов $\hat{\mathcal U}(\mathbf x)$, где $\mathbf x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Введем числовую функцию $f_{\hat A}(\mathbf x)$ при помощи соотношения

$$f_{\hat A}(\mathbf x)=\mathrm{Tr}\left[\hat A\hat{\mathcal U}(\mathbf x)\right]. \tag{7}$$

Предположим, что существует такое множество операторов $\hat{\mathcal D}(\mathbf x)$, что выполняется равенство

$$\hat A=\int f_{\hat A}(\mathbf x)\hat{\mathcal D}(\mathbf x)\;d\mathbf x. \tag{8}$$

В этом случае оператор $\hat{\mathcal U}(\mathbf x)$ называется деквантайзером, функция $f_{\hat A}(\mathbf x)$ – символом оператора $\hat A$, а оператор $\hat{\mathcal D}(\mathbf x)$ – квантайзером [15]. Равенства (7) и (8) совместны, если квантайзер и деквантайзер удовлетворяют условию

$$\int f_A(\mathbf x')\mathrm{Tr}\left[\hat{\mathcal U}(\mathbf x)\hat{\mathcal D}(\mathbf x')\right]d\mathbf x'=f_A(\mathbf x). \tag{9}$$

Введем звездочное произведение двух функций, $f_{\hat A}(\mathbf x)$ и $f_{\hat B}(\mathbf x)$:

$$f_{\hat A}(\mathbf x)*f_{\hat B}(\mathbf x)=\int f_{\hat A}(\mathbf x'')f_{\hat B}(\mathbf x')K(\mathbf x'',\mathbf x',\mathbf x)\,d\mathbf x'\,d\mathbf x''. \tag{10}$$

Если ядро в интеграле выражается через след от произведения базовых операторов, то есть

$$K(\mathbf x'',\mathbf x',\mathbf x)=\mathrm{Tr}\left[\hat{\mathcal D}(\mathbf x'')\hat{\mathcal D}(\mathbf x')\hat{\mathcal U}(\mathbf x)\right], \tag{11}$$

то произведение (10) ассоциативно.

Аналогично справедливы равенства

$$f^{(d)}_{\hat A}(\mathbf x)=\mathrm{Tr}\left[\hat A\hat{\mathcal D}(\mathbf x)\right], \tag{12}$$

$$\hat A=\int f^{(d)}_{\hat A}(\mathbf x)\hat{\mathcal U}(\mathbf x)\,d\mathbf x. \tag{13}$$

Символ (12) называется дуальным символом оператора [15] по отношению к (7). Звездочное произведение дуальных символов $f_{\hat{A}}^{(d)}(\mathbf{x})$ и $f_{\hat{B}}^{(d)}(\mathbf{x})$ двух операторов, $\hat{A}$ и $\hat{B}$, задается дуальным ядром

$$K^{(d)}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x}) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{x}'')\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{x}')\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{x})\right]. \qquad (14)$$

Среднее значение квантовой наблюдаемой $\hat{A}$ задается формулой

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\big(\hat{\rho}\hat{A}\big) = \int f_{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) \mathrm{Tr}\big[\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{x})\hat{A}\big] d\mathbf{x}.$$

Используя выражение для дуального символа оператора (12), получаем формулу

$$\langle \hat{A} \rangle = \int f_{\rho}(\mathbf{x}) f_{\hat{A}}^{(d)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Следовательно, среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$ равно интегралу перекрытия символа оператора плотности $f_{\rho}(\mathbf{x})$ в основной (исходной) схеме квантования и символа $f_{\hat{A}}^{(d)}(\mathbf{x})$ наблюдаемой $\hat{A}$ в дуальной схеме квантования.

Символы операторов плотности и символы наблюдаемых имеют различную природу. Они принадлежат к различным схемам квантования, дуальным друг другу.

4. Томографические схемы и квантование. В схеме симплектической томографии символ оператора – это томограмма $w_{\hat{A}}(X, \mu, \nu)$, зависящая от координаты X и параметров μ и ν, задающих систему отсчета. Деквантайзер $\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{x})$ в схеме симплектической томографии равен

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathcal{U}}(X, \mu, \nu) = \delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}), \qquad (15)$$

а квантайзер имеет вид

$$\hat{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathcal{D}}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(iX - i\nu\hat{p} - i\mu\hat{q}\right). \qquad (16)$$

Ядро (11) звездочного произведения двух симплектических томограмм в явном виде имеет форму произведения δ-функции и экспоненты [11]:

$$K(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2, X, \mu, \nu) = = \frac{\delta\Big[\mu(\nu_1 + \nu_2) - \nu(\mu_1 + \mu_2)\Big]}{4\pi^2} \times \times \exp\left\{\frac{i}{2}\left[(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) + 2X_1 + 2X_2 - \frac{2(\nu_1 + \nu_2)X}{\nu}\right]\right\}.$$

Томография счета фотонов является еще одним примером квантования на основе звездочного произведения. Деквантайзер в этом случае имеет вид

$$\widehat{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) = \hat{D}(\alpha)|n\rangle\langle n|\hat{D}^{-1}(\alpha),\ \mathbf{x} = (n, \alpha). \qquad (17)$$

Квантайзер в схеме томографии счета фотонов равен

$$\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) = \frac{4}{\pi(1 - s^2)} \left(\frac{s - 1}{s + 1}\right)^{(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)(\hat{a} + \alpha) - n}, \qquad (18)$$

где s – параметр упорядочения, α – комплексное число, $\hat{D}(\alpha)$ – оператор сдвига Вейля. Ядро звездочного произведения (11) двух томограмм счета фотонов имеет вид [33]

$$\begin{aligned} K(n_1, \alpha_1, n_2, \alpha_2, n_3, \alpha_3) = \left[\frac{4}{\pi(1 - s^2)}\right]^2 \times \\ \times \exp[it(n_1 + n_2 - 2n_3)] \exp\big[- | - \alpha_3 + \alpha_1 - \\ - \alpha_1 e^{-it} + \alpha_2 e^{-it} - \alpha_2 e^{-2it} + \alpha_3 e^{-2it}|^2 + \\ + \frac{1}{2}(-\alpha_3\alpha_1^* + \alpha_3^*\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1^*\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3^* + \\ + \alpha_2^*\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1^* e^{it^*} - |\alpha_1|^2 e^{it^*} - \alpha_3\alpha_2^* e^{it^*} + \alpha_1\alpha_2^* e^{it^*} - \\ - \alpha_3^*\alpha_1 e^{-it} + |\alpha_1|^2 e^{-it} + \alpha_3^*\alpha_2 e^{-it} - \alpha_1^*\alpha_2 e^{-it} + \\ + \alpha_3\alpha_2^* e^{2it^*} - \alpha_1\alpha_2^* e^{2it^*} + \alpha_1\alpha_2^* e^{-it + 2it^*} - \\ - |\alpha_2|^2 e^{-it + 2it^*} - |\alpha_3|^2 e^{2it^*} + \alpha_1\alpha_3^* e^{2it^*} - \\ - \alpha_1\alpha_3^* e^{-it + 2it^*} + \alpha_2\alpha_3^* e^{-it + 2it^*} - \alpha_3^*\alpha_2 e^{-2it} + \\ + \alpha_1^*\alpha_2 e^{-2it} - \alpha_1^*\alpha_2 e^{it^* - 2it} - |\alpha_2|^2 e^{it^* - 2it} + \\ + |\alpha_3|^2 e^{-2it} - \alpha_1^*\alpha_3 e^{-2it} + \alpha_1^*\alpha_3 e^{it^* - 2it} - \\ - \alpha_2^*\alpha_3 e^{it^* - 2it})\big] L_{n_3}(| - \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_1 e^{-it} + \\ + \alpha_2 e^{-it} - \alpha_2 e^{-2it} + \alpha_3 e^{-2it}|^2), \end{aligned} \qquad (19)$$

где $(s - 1)/(s + 1) = e^{it}$, $L_n(x)$ – полином Лаггера.

5. Фиделити и параметр чистоты. Рассмотрим в томографической схеме такие параметры, как фиделити и параметр чистоты. В случае непрерывных переменных фиделити для двух операторов плотности, выраженное через симплектические томограммы, имеет вид [43]

$$\mathcal{F} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \frac{1}{2\pi} \int w_1(X_1, \mu, \nu) w_2(X_2, -\mu, -\nu) \times \times \exp\left[i(X_1 + X_2)\right] d\,\mathbf{X}\, d\,\mu\, d\,\nu, \qquad (20)$$

где $w_1(X_1, \mu, \nu)$ – симплектическая томограмма, задающая первое состояние, $w_2(X_2, -\mu, -\nu)$ – симплектическая томограмма второго состояния. Для параметра чистоты в случае схемы симплектической томографии получаем выражение

$$\mathcal{P} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{2\pi} \int w(X_1, \mu, \nu) w(X_2, -\mu, -\nu) \times \times \exp\left[i(X_1 + X_2)\right] d\,\mathbf{X}\, d\,\mu\, d\,\nu. \qquad (21)$$

Выражение для фиделити в схеме томографии счета фотонов имеет вид [33]

$$\mathcal{F} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} \int w_1(n_1, \alpha_1) w_2(n_2, \alpha_2) \times \times \mathcal{K}(n_1, n_2, \alpha_1, \alpha_2)\, d\,\alpha_1^2\, d\,\alpha_2^2, \qquad (22)$$

где $w_1(n_1,\alpha_1)$ – томограмма счета фотонов первого состояния, $w_2(n_2,\alpha_2)$ – томограмма счета фотонов второго состояния. Для параметра чистоты получаем аналогичное выражение:

$$\mathcal{P}=\mathrm{Tr}(\hat\rho^2)=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\int w(n_1,\alpha_1)w(n_2,\alpha_2)\times \\ \times\mathcal{K}(n_1,n_2,\alpha_1,\alpha_2)\,d\,\alpha_1^2\,d\,\alpha_2^2. \qquad (23)$$

Ядро $\mathcal{K}(n_1,n_2,\alpha_1,\alpha_2)$ в выражениях (22), (23) имеет вид

$$\mathcal{K}(n_1,n_2,\alpha_1,\alpha_2)=e^{it(n_1+n_2)}\exp\left\{\frac{1}{2}[-|\alpha_1|^2e^{it^*}+\right. \\ +|\alpha_1|^2e^{-it}+\alpha_1\alpha_2^*(1-e^{-it})(e^{it^*}-e^{-2it^*})- \\ -\alpha_1^*\alpha_2(1-e^{it^*})(e^{-it}-e^{-2it})]- \\ \left.-|\alpha_1-\alpha_1e^{-it}+\alpha_2e^{-it}-\alpha_2e^{-2it}|^2-e^{-2it}\right\}\times \\ \times\mathcal{J}_0(2e^{-it}|\alpha_1-\alpha_1e^{-it}+\alpha_2e^{-it}-\alpha_2e^{-2it}|), \qquad (24)$$

где $\mathcal{J}_0(x)$ – функция Бесселя. Итак, мы получили выражения (20), (22) для фиделити и (21), (23) для параметра чистоты в форме интеграла от произведения двух симплектических томограмм или томограмм счета фотонов с ядром $\exp[i(X_1+X_2)]$ в случае симплектической томографии и ядром (24) в случае томографии счета фотонов.

6. Соотношения неопределенностей и параметр чистоты. Смешанные состояния квантовой системы с оператором плотности $\hat\rho$ характеризуются параметром чистоты $\mu=\mathrm{Tr}\hat\rho^2$. Для оператора плотности чистого состояния выполняется условие $\mathrm{Tr}\hat\rho^2=\mathrm{Tr}\hat\rho=1$. Можно использовать другой параметр, $S=1-\mu$, который называется линейной энтропией. Параметр чистоты удовлетворяет неравенству $0<\mu\le 1$. В [44] было показано, что соотношение неопределенности задает квантовый предел точности измерений, который зависит от параметра чистоты μ:

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp}\ge\frac{\hbar^2}{4(1-r^2)}\Phi^2(\mu), \qquad (25)$$

где $\Phi(\mu)_{(\mu=1)}=1$, а r – коэффициент корреляции:

$$r=\left[\left\langle\frac{1}{2}(\hat q\hat p+\hat p\hat q)\right\rangle-\langle\hat q\rangle\langle\hat p\rangle\right]/\sqrt{\sigma_{qq}\sigma_{pp}}.$$

Функция $\Phi(\mu)$ имеет разный вид для разных областей значений параметра μ. Она может быть аппроксимирована выражением (с точностью до нескольких процентов) [44]

$$\Phi_{\mathrm{app}}(\mu)=\frac{4+\sqrt{16+9\mu^2}}{9\mu}. \qquad (26)$$

Для $\mu\ll 1$ функция $\Phi_{\mathrm{app}}(\mu)\simeq 8/(9\mu)$. Оператор плотности состояния термодинамического равновесия с температурой T имеет вид $\hat\rho(T)=[Z(T)]^{-1}e^{-\hat H/T}$, где $\hat H$ – гамильтониан системы, а статистическая сумма $Z(T)$ задается следом: $Z(T)=\mathrm{Tr}\,e^{-\hat H/T}$. Параметр чистоты $\mu(T)$ выражается через статистическую сумму: $\mu(T)=Z(T/2)/Z^2(T)$. Соотношение неопределенностей в случае состояния термодинамического равновесия принимает вид

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp}\ge\frac{\hbar^2}{4(1-r^2)}\Phi^2\left[\frac{Z(T/2)}{Z^2(T)}\right]. \qquad (27)$$

В случае больших температур ($T\gg 1$) получаем для параметра чистоты $\tilde\mu(T)=(2T)^{-1}$ значение, близкое к нулю. Известно, что существует возможность увеличения флуктуации координаты и импульса с увеличением температуры. Следовательно, объем области координатного пространства (или пространства импульсов), в которой может оказаться частица, возрастает с ростом температуры. Это объясняет, как высокая температура влияет на возможность преодоления сил отталкивания с точки зрения соотношений неопределенности.

Процесс декогерентности рассматривается как процесс, создающий проблемы в квантовых технологиях, например при квантовых вычислениях. С другой стороны, процесс декогерентности может применяться для создания состояний с малым значением параметра чистоты ($\mu\ll 1$). Процессы декогерентности, приводящие к превращению изначально чистых состояний в смешанные, могут быть использованы для влияния на процесс туннелирования [39]. Таким образом, использование процессов декогерентности является еще одним способом повышения эффективности туннелирования наряду с процессом нагревания и процессом увеличения корреляции координаты и импульса в чистом состоянии [45–47].

Необходимо отметить, что хотя соотношения неопределенности с зависящей от параметра чистоты границей квантовости были недавно экспериментально проверены [36], влияние на процесс туннелирования явлений декогерентности или корреляций координаты и импульса еще требует экспериментальной проверки.

Существуют полученные в [48] соотношения неопределенности для энтропии, записанные в терминах энтропии Шеннона, выраженной через оптическую томограмму. Они имеют вид

$$-\int w(X,\theta)\ln w(X,\theta)dX -$$
$$-\int w(X,\theta+\pi/2)\ln w(X,\theta+\pi/2)dX \geq \ln \pi e. \quad (28)$$

Кроме того, имеются соотношения неопределенности, записанные в терминах энтропии Реньи [48]. Они могут быть представлены неравенством

$$\frac{1+r}{r}\ln\left\{\int [w(X,\theta)]^{(1+r)^{-1}}dX\right\} -$$
$$-\frac{1-r}{r}\ln\left\{\int [w(X,\theta+\pi/2)]^{(1-r)^{-1}}dX\right\} \geq \ln \pi +$$
$$+\frac{1}{2r}[(1+r)\ln(1+r)-(1-r)\ln(1-r)],$$

где r – произвольный параметр, $r \in (-1,1)$. Оба соотношения были проверены экспериментально в [36].

Еще один новый результат связан с формулами для вероятности перехода между состояниями и параметра чистоты, записанными в терминах спиновой томограммы $w(m,\mathbf{n})$, введенной в [9, 10]. Для произвольного спина j спиновая томограмма, задающая квантовое состояние, определяется следующим образом:

$$w(m,\mathbf{n}) = \langle m|D(\mathbf{n})|\rho D^{+}(\mathbf{n})|m\rangle,$$

где вектор $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ определяет направление, а m – проекция спина на это направление. Матрица плотности ρ задает состояние кудита, а матрица $D(\mathbf{n})$ есть матрица неприводимого представления группы вращений с одним углом Эйлера, равным нулю. Формула для параметра чистоты была получена в [49]. Она имеет вид

$$\mathrm{Tr}\rho^2 = (2j+1)\sum_{m=-j}^{j}\int \frac{d\mathbf{n}}{4\pi} w(m,\mathbf{n})[w(m,\mathbf{n}) -$$
$$- w(m+1,\mathbf{n})], \quad (29)$$

где $d\mathbf{n} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, $\theta \in (0,\pi)$, $\phi \in (0,2\pi)$, $\sum_m$ означает суммирование по $m = -j, -j+1, \ldots, j$, а $w(m,\mathbf{n}) = 0$ при $m < -j$ или $m > j$. Как было выяснено в [50], все томограммы можно интерпретировать как условные распределения вероятностей. Так, томограмма $w(m,\mathbf{n})$ может пониматься как условная вероятность $w(m|\mathbf{n})$ того, что проекция спина равна m при условии заданного направления $\mathbf{n}$. Аналогичная интерпретация имеется и для всех других томограмм, включая сиплектическую, оптическую, центра масс и счета фотонов. Например, оптическая томограмма есть условная вероятность $w(X|\theta)$ положения X при заданном угле θ. Такая интерпретация позволила обобщить томографический подход, используя известную формулу Байеса, и ввести совместные функции распределения, задающие квантовые состояния. Так, функция $P(m,\mathbf{n}) = w(m,\mathbf{n})\mathcal{P}(\mathbf{n})$, где $\mathcal{P}(\mathbf{n}) \geq 0$ и $\int \mathcal{P}(\mathbf{n})\frac{d\mathbf{n}}{4\pi} = 1$, есть совместная функция распределения двух случайных величин, m и $\mathbf{n}$. В случае оптической томограммы квантовое состояние можно задавать совместной функцией распределения случайных величин X и θ: $P(X,\theta) = w(X,\theta)\mathcal{P}(\theta)$, где $\mathcal{P}(\theta)$ есть любое распределение вероятности по углу на окружности. Выявленная возможность позволила получить новое универсальное неравенство в квантовой механике:

$$-\frac{1}{2\pi}\int w(X,\theta)\ln w(X,\theta)dX d\theta \geq \frac{1}{2}\ln \pi e, \quad (30)$$

справедливое для любых состояний. Это неравенство было проверено экспериментально [36].

7. Заключение. Итак, в настоящей работе использована новая формулировка квантовой механики с вероятностью, задающей состояние вместо волновой функции и матрицы плотности. Получен новый вид схемы звездочного произведения, в рамках которой томограммы состояний и наблюдаемые описываются аналогично описанию Мойала–Вигнера–Вейля. В отличие от этого описания на языке квазираспределений на фазовом пространстве томографический подход дает описание состояний на языке обычных распределений вероятностей как в квантовом, так и в классическом случаях. Получены ядра звездочного произведения в схемах разных томографий. Отметим новые квантовые неравенства, найденные в новом подходе и выраженные через томограммы квантовых состояний как для кудитов, так и для непрерывных переменных. Некоторые из этих неравенств были проверены экспериментально.

Данное исследование было частично профинансировано в рамках гранта РФФИ # 10-02-00312. Авторы благодарят участников гранта М.А. Манько и С.Н. Филиппова за сотрудничество и вклад, внесенный в выполнение проекта.

---

1. S. Mancini, V.I. Man'ko, and P. Tombesi, Phys. Lett. A **213**, 1 (1996).
2. O.V. Man'ko and V.I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. **18**, 407 (1997).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, т. 3, *Нерелятивистская теория*, М.: Физматлит, 1963.
4. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.
5. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
6. J.E. Moyal, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45**, 99 (1949).
7. J. Radon, Ber. Sachs. Akad. Wiss. (Leipzig) **69**, 262 (1917).

8. A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo et al., Phys. Scr. **79**, 065013 (2009).
9. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **239**, 335 (1997).
10. В. И. Манько, О. В. Манько, ЖЭТФ **112**, 796 (1997).
11. O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, and G. Marmo, J. Phys. A **35**, 699 (2002).
12. С. Л. Стратонович, ЖЭТФ **31**, 1012 (1957).
13. H. Weyl, Zs. f. Physik **46**, 1 (1928).
14. H. Groenewold, Physica **12**, 405 (1946).
15. O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo, and P. Vitale, Phys. Lett. A **360**, 522 (2007).
16. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Europhys. Lett. **37**, 79 (1997).
17. S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **53**, 4528 (1996).
18. K. Banaszek and K. Wodkiewicz, Phys. Rev. Lett. **76**, 4344 (1996).
19. A. S. Arkhipov and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **71**, 012101 (2005).
20. O. V. Man'ko, AIP Conf. Proc. **1424**, 221 (2012).
21. O. V. Man'ko, Phys. Scr. T **151**, 6 (2013).
22. В. В. Додонов, В. И. Манько, О. В. Манько, *Сжатые и коррелированные состояния квантовых систем, Труды ФИАН*, М.: Наука, 1991, т. 200, с. 155.
23. V. V. Dodonov and A. V. Dodonov, J. Russ. Laser Res. **26**, 445 (2005).
24. V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, J. Sov. Laser Research, Plenum. Publ. **10**, 413 (1989).
25. O. V. Man'ko, J. Korean Phys. Soc. **27**, 1 (1994).
26. K. Takashima, N. Hatakenaka, S. Kurihara, and A. Zeilinger, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164036 (2008).
27. C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian et al. Nature **479**, 376 (2011).
28. S. V. Kuznetsov, A. V. Kusev, O. V. Man'ko, and N. V. Tcherniega, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Phys. **5**, S503 (2003).
29. S. V. Kuznetsov, A. V. Kusev, O. V. Man'ko, and N. V. Tcherniega, Acta Physica Hungarica, Quantum Electronics Series **20/1**, 11 (2004).
30. O. V. Man'ko, and N. V. Tcherniega, Proc. SPIE **6256**, 62560W-1 (2006).
31. O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, Laser Phys. **19**(8), 1804 (2009).
32. O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, Phys. Scr. T **140**, 014028 (2010).
33. O. V. Man'ko, AIP Conf. Proc. **1508**, 275 (2012).
34. O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Rus. Laser Res. **31**, 608 (2010).
35. O. V. Man'ko, AIP Conf. Proc. **1327**, 166 (2011).
36. M. Bellini, A. S. Coelho, S. N. Filippov et al., Phys. Rev. A **85**, 052129 (2012).
37. V. N. Chernega and V. I. Man'ko, Int. J. Quantum Inf. **10**(8) (2012); arXiv:1210.0464.
38. V. N. Chernega, Phys. Scr. T **147**, 014006 (2012).
39. V. N. Chernega, J. Russ. Las. Res. **34**(2) (2013) (at press); arXiv:1303.5238.
40. V. I. Man'ko, M. Moshinsky, and A. Sharma, Phys. Rev. A **59**, 1809 (1999).
41. K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
42. D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
43. O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, Fortschritte der Physik **57**, 1064 (2009).
44. В. В. Додонов, В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, *Труды ФИАН*, М.: Наука, 1987, т. 183, с. 286.
45. V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **134**, 211 (1989).
46. В. В. Додонов, А. В. Климов, В. И. Манько, *Сжатые и коррелированные состояния квантовых систем*, *Труды ФИАН*, М.: Наука, 1991, т. 200, с. 56.
47. В. И. Высоцкий, М. В. Высоцкий, С. В. Адаменко, ЖЭТФ **142**(4), 627 (2012).
48. M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, Found. Phys. **41**, 330 (2011).
49. V. I. Man'ko and S. N. Filippov, J. Rus. Laser Res. **34**, 1 (2013).
50. M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, AIP Conf. Proc. **1488**, 110 (2012).