

Аномальные волны при низких индексах Бенджамина–Фейра: численное исследование роли нелинейности

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 мая 2013 г.

В некогерентных состояниях морской поверхности нелинейное взаимодействие волн слабее их дисперсии. В такой ситуации основным механизмом образования аномальных волн (*rogue waves*) является случайная пространственно-временная фокусировка. В данной работе численным моделированием показано, что на конечной стадии фокусировки нелинейность вступает в игру и способна существенно изменить предсказания так называемой теории второго порядка относительно параметров аномальных волн. Важный эффект, способствующий “утяжелению хвостов” функции распределения вертикального отклонения свободной поверхности – удлинение гребня аномальной волны по сравнению с теорией второго порядка.

DOI: 10.7868/S0370274X13120072

Аномальные волны (волны-убийцы, *rogue waves*), высота H которых более чем в 8–9 раз превосходит среднеквадратическое отклонение σ морской поверхности, могут возникать в океане по ряду причин (см. [1–4] и ссылки там). Наиболее вероятно их появление в состояниях моря с высокими и протяженными группами волн, чему соответствуют достаточно большие значения индекса Бенджамина–Фейра, $I_{BF} \sim N\varepsilon$ [5], где N – типичное число волн в группе, $\varepsilon = k_0 A_0$ – характерная крутизна волн, A_0 – амплитуда, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, λ_0 – характерная длина волны. При значениях $I_{BF} \sim 1$ дисперсия волн в группе приближенно компенсируется фокусирующей нелинейностью, т.е. образуется долгоживущая когерентная нелинейная структура типа солитона нелинейного уравнения Шредингера [6]. Взаимодействие подобных структур может сопровождаться появлением неустойчивой группы, в которой нелинейность оказывается сильнее дисперсии. Тогда развивается модуляционная неустойчивость [6, 7], конечным итогом которой становится аномальная волна [8–11]. В природе состояния моря с $I_{BF} \sim 1$ реализуются редко, поскольку для их возникновения требуется предварительное воздействие специфических усиливающих механизмов, таких, например, как рефракция волн на неоднородных океанических течениях [12–15]. В типичных же условиях штормового моря длина групп $N \lesssim 3$, тогда как крутизна волн $\varepsilon \lesssim 0.1$. Большое значение имеет также угловая ширина спектра. Для длиннорегнебных состояний веро-

ятность волн-убийц заметно выше, чем для средних и короткогребневых [2, 16–19].

При малых I_{BF} когерентные группы (на некотором участке моря с линейными размерами порядка нескольких десятков λ_0) большую часть времени отсутствуют. Аномальные волны могут возникать лишь очень редко, по случайному стечению обстоятельств, когда некоторые из почти невзаимодействующих основных гармоник $b_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ волнового поля оказываются “в фазе” вблизи некоторой точки \mathbf{r}_* горизонтальной плоскости. Эта ситуация приближенно описывается так называемой теорией второго порядка (*second-order theory*, см. [20, 2] и ссылки там). Последняя пренебрегает нелинейным взаимодействием главных гармоник, а роль нелинейности сводит к поддержанию полностью зависимых старших гармоник, обеспечивающих, в частности, наблюдаемую асимметрию верх–низ в профилях волн – более высокие резкие гребни и менее глубокие пологие впадины. Таким образом, в рассматриваемом приближении вертикальное отклонение свободной поверхности дается выражением вида

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[A(\mathbf{r}, t)] + \mathcal{O}(AA). \quad (1)$$

Здесь $A(\mathbf{r}, t)$ – свободное комплексное поле,

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2)$$

динамика фурье-мод которого определяется простой формулой:

$$b_{\mathbf{k}}(t) = \rho_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\phi_{\mathbf{k}}), \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{g|\mathbf{k}|}, \quad (3)$$

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

где амплитуды и начальные фазы $\rho_{\mathbf{k}}$ и $\phi_{\mathbf{k}}$ – не зависящие от времени действительные величины, а g – ускорение свободного падения. Нелинейные по $b_{\mathbf{k}}$ поправки условно обозначены как $\mathcal{O}(AA)$. Пространственно однородному (в статистическом смысле) состоянию морской поверхности соответствует равномерное распределение фаз $\phi_{\mathbf{k}}$ на интервале $[0, 2\pi)$.

Из формул (2) и (3) следует, что если подождать достаточно долгое время T_* , то конфигурация полных фаз придет в такое положение, когда $|A|$ в некоторой точке \mathbf{r}_* горизонтальной плоскости превысит условное значение, например 6σ . Это и будет означать появление аномальной волны. Вероятность этого события, как известно, можно оценить по приближенной формуле для $|A|_{\max}$, если полагать поле A гауссовым:

$$P\{|A|_{\max} > \xi\sigma\} \sim 1 - [1 - \exp(-\xi^2/2)]^G, \quad (4)$$

где G – среднее число волновых групп на заданном участке моря S . Для среднегребневых полей типичная длина гребня составляет 4–6 длин волн. Тогда группа занимает площадь около $S_{gr} \sim 5N\lambda_0^2$, что дает нам оценку $G \sim S/(5N\lambda_0^2)$. Для достаточно больших $\xi \sim 6$ имеем соотношение $P\{|A|_{\max} > \xi\sigma\} \sim G \exp(-\xi^2/2)$. Отсюда следует, что типичное время между двумя последовательными экстремальными событиями обратно пропорционально площади S участка наблюдения. В частности, для квадрата $50\lambda_0 \times 50\lambda_0$, используемого в данной работе, это время составляет около 10^4 характерных волновых периодов $T_0 = 2\pi/\sqrt{gk_0}$. Разумеется, волны с $|A|_{\max} < 6\sigma$ возникают гораздо чаще, а типичное значение $|A|_{\max}$ на указанном участке составляет примерно 4.5σ (заметим, что наиболее вероятное значение $|A|_{\max}$ растет с увеличением площади участка, как это следует из формулы (4)).

Теория второго порядка предполагает также (хотя это и довольно тонкий момент), что относительно медленная зависимость фаз $\phi_{\mathbf{k}}$ от времени, обусловленная нелинейностью третьего и более старших порядков, не оказывает серьезного воздействия на повторяемость экстремальных событий именно в силу отсутствия когерентных структур при малых $I_{ВФ}$. Но разумеется, сами моменты времени, в которые такие события происходят, с учетом нелинейных сдвигов частот далеко не совпадают с моментами чисто линейной случайной фокусировки.

Аномальной волне описанного выше типа предшествует специфический процесс на свободной поверхности. На случайном статистически однородном фоне спонтанно формируются одна или несколько близких волновых групп. Затем в течение одного-

двух десятков волновых периодов они фокусируются вблизи некоторой точки, образуя большую отдельную волну, существующую в течение нескольких T_0 (см. численный пример на рис. 1 и 2). Важ-

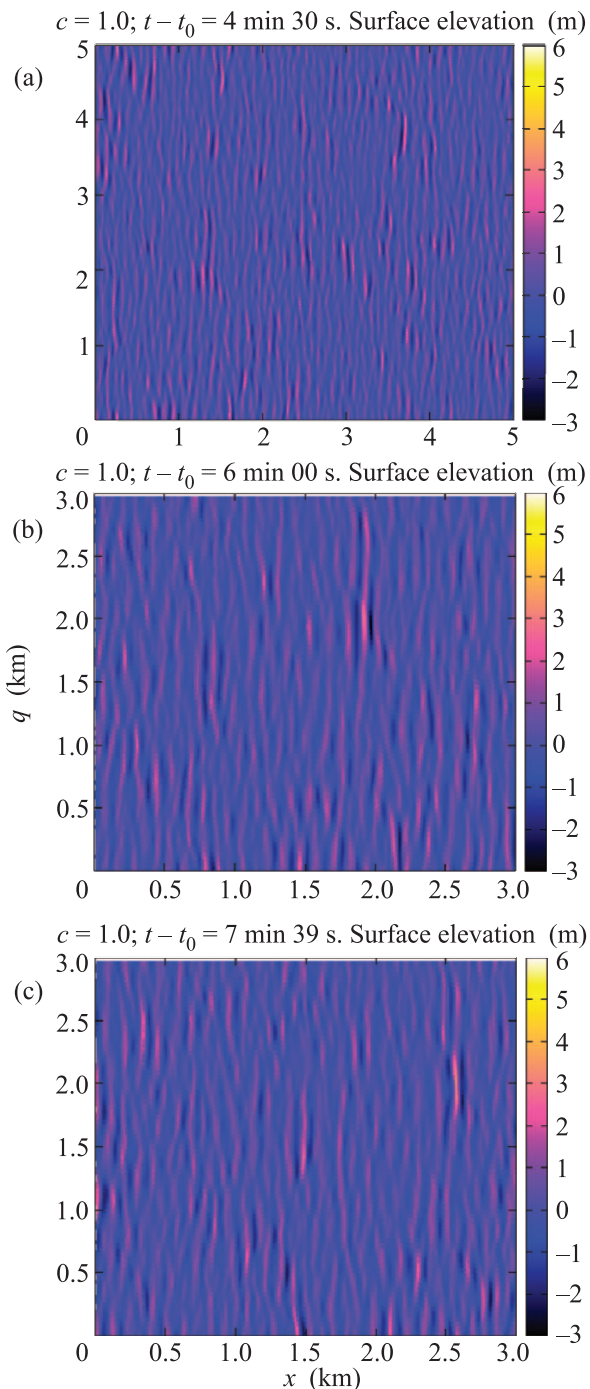


Рис. 1. Образование волны-убийцы путем случайной пространственно-временной фокусировки. В этом примере $\lambda_0 = 100$ м, $\sigma \approx 0.7$ м, а высота гребня превышала 5.5 м при $t - t_0 = 7$ мин 39 с, $x \approx 2.55$ км, $q \approx 2.0$ км

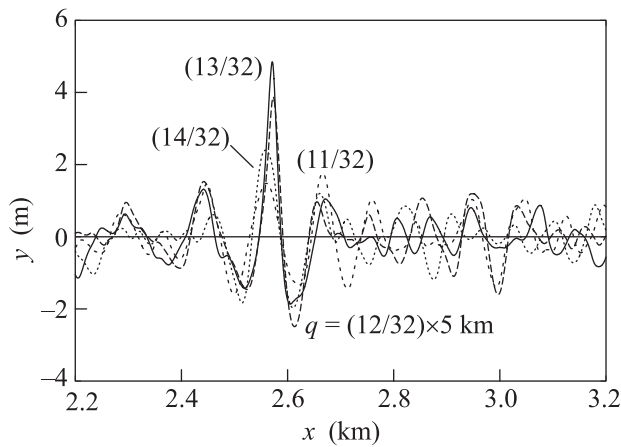


Рис. 2. Некоторые профили волны-убийцы с рис. 1с. Высота максимальной волны от гребня до впадины более 7 м, что в 2.5 раза превосходит “существенную” высоту волн $H_s = 4\sigma$

но, что при физически интересных значениях $\sigma \sim (0.007-0.01)\lambda_0$ на конечной стадии фокусировки волновая крутизна s_{\max} достигает значений около 0.5 радиан (на рис. не показано), и тогда нелинейность неизбежно вступает в игру. В результате параметры возникающей волны-убийцы отличаются от предсказаний теории второго порядка. Насколько существенны эти отличия? Вычисления в рамках слабонелинейной модели, включающей волновые взаимодействия четвертого порядка, показали, что подобные отличия незначительны [21]. Выяснение этого вопроса для сильно нелинейного случая является темой данного исследования. Ответ на него будет следовать из результатов численного моделирования среднегребневых волн на двумерной свободной поверхности с использованием полностью нелинейной приближенной модели, описанной в работах [22, 23]. Малым параметром в этой модели является узость углового распределения спектра волн, распространяющихся в среднем вдоль оси x и относительно слабо зависящих от поперечной горизонтальной координаты q . Эффективное число учитываемых старших гармоник в наших вычислениях достигало 40–60. Это позволяло с хорошей точностью находить профили волн-убийц почти до момента их опрокидывания.

Разумеется, прямое численное моделирование с учетом нелинейности на временном интервале порядка $10^4 T_0$ в области $50\lambda_0 \times 50\lambda_0$ нереально. Поэтому для сравнения предсказаний теории второго порядка и нашей намного более аккуратной модели вычислялась нелинейная эволюция волнового поля начиная с момента времени t_0 , на несколько десятков волновых периодов предшествующего момен-

ту линейной фокусировки T_* . Важно, чтобы отрезок времени $T_* - t_0$ не был слишком велик, иначе нелинейные сдвиги частот $\dot{\phi}_k$ “собиют” фокусировку (см. [24]). Само же значение T_* находилось путем построения графика $|A|_{\max}(t)$ (здесь не приводится) с использованием формул (2) и (3). Квазислучайные начальные амплитуды и фазы для реалистичности моделирования брались из вспомогательных нелинейных вычислений эволюции волнового поля с параметром $\sigma \approx 0.007\lambda_0$ в течение одной-двух сотен периодов, что обеспечивало статистическое квазиравновесие для главных гармоник. После начала численного счета в момент t_0 старшие гармоники волнового поля формировались на протяжении 2–3 периодов, в результате чего квазиравновесие достигалось полностью. Таким образом, в отличие от некоторых других работ, где также вычислялась пространственно-временная фокусировка нелинейных волн (см., например, [24, 25]), в данном исследовании произвол в выборе начальных условий удалось в значительной мере редуцировать. Это дает нам основания считать полученные здесь характеристики волн-убийц типичными для полей с низкими индексами Бенджамина–Фейра. Для сравнения с предсказаниями теории второго порядка проводились контрольные вычисления, в которых начальный спектр умножался на коэффициент $c = 0.4$, что обеспечивало практически линейную эволюцию главных гармоник.

Было проведено несколько численных экспериментов. Результаты одного из них представлены на рисунках. В частности, рис. 1 дает представление о процессе случайной пространственно-временной фокусировки. В начале процесса две ничем не примечательные группы волн сталкиваются под небольшим углом. Промежуточным этапом этого столкновения становится фокусирующая форма гребней, несколько вогнутая по направлению распространения. Затем формируется аномальная волна, профили которой показаны на рис. 2. Нелинейность данной волны – почти предельная, поскольку ее крутизна превышает 0.8 рад (на рис. не показано). Это говорит о близости ее гребня к началу опрокидывания. На рис. 3 приведены максимальные и минимальные отклонения свободной поверхности для $c = 1.0$ и 0.4. Видно, что нелинейность несколько приближает момент образования аномальной волны и, разумеется, усиливает ее асимметрию (относительную разность между максимальной высотой гребня и максимальной глубиной впадины). Однако наиболее важное, на наш взгляд, следствие влияния нелинейности демонстрирует рис. 4: длина гребня сильно нелинейной

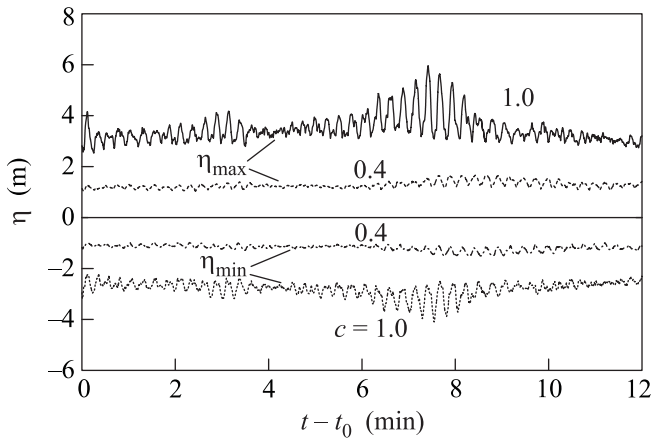


Рис. 3. Сравнение максимальных и минимальных отклонений свободной поверхности для двух разных уровней нелинейности

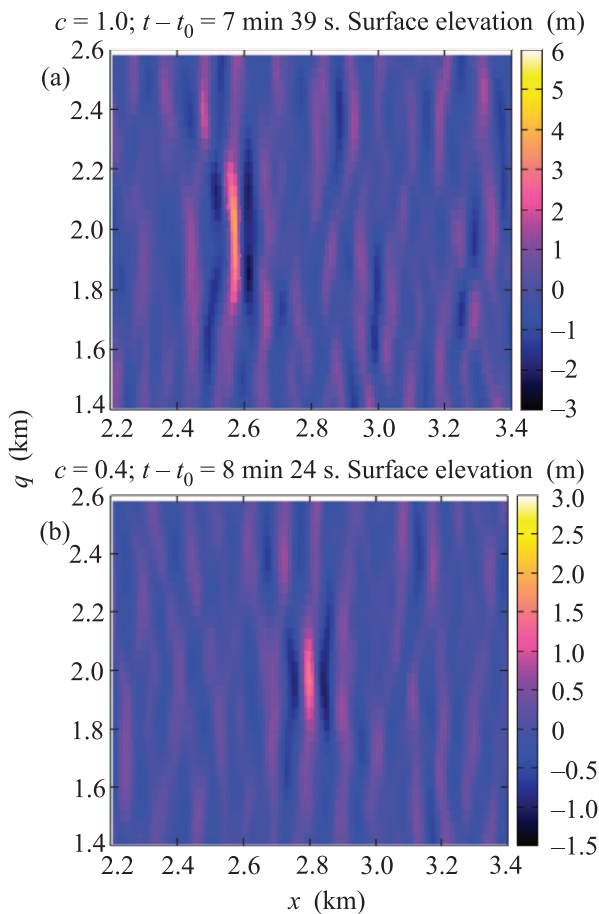


Рис. 4. Сравнение длины гребня аномальной волны для разных уровней нелинейности (диапазоны цветной шкалы в двух случаях различны)

аномальной волны в момент ее наивысшего подъема заметно превышает длину гребня аналогичной слабо нелинейной волны. На рис. 4 это отличие составля-

ет примерно полтора раза. Причина удлинения гребня – дефокусирующий характер действия нелинейности в поперечном горизонтальном направлении. Данный эффект, очевидно, способствует “утяжелению хвостов” функции распределения вертикального отклонения свободной поверхности в фиксированной точке горизонтальной плоскости по сравнению с теорией второго порядка. Отметим для ясности, что соответствующий дополнительный вклад в функцию распределения не зависит от той ее деформации, которую вносят старшие гармоники.

Из полученных результатов можно сделать следующий вывод. Хотя в некогерентных волновых полях с малыми индексами Бенджамин–Фейра частота возникновения аномальных волн, по-видимому, достаточно хорошо описывается теорией второго порядка, существенные параметры этих волн (длина гребня, максимальная высота гребня и максимальная глубина впадины) в значительной мере определяются нелинейными взаимодействиями. Последние увеличивают вероятность детектирования высокой волны в произвольно выбранной точке.

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. E. Pelinovsky and C. Kharif (ed.), *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 535 (2006).
4. N. Akhmediev and E. Pelinovsky (ed.), *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185**, 1 (2010).
5. P. A. E. M. Janssen, *J. Phys. Oceanogr.* **33**, 863 (2003).
6. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
7. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
8. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
9. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **81**, 255 (2005).
10. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
11. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).
12. D. H. Peregrine, *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9 (1976).
13. B. S. White and B. Fornberg, *J. Fluid Mech.* **355**, 113 (1998).
14. I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 574 (2006).
15. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 550 (2012).
16. H. Socquet-Juglard, K. Dysthe, K. Trulsen et al., *J. Fluid Mech.* **542**, 195 (2005).

17. M. Onorato, A.R. Osborne, M. Serio et al., *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 586 (2006).
18. O. Gramstad and K. Trulsen, *J. Fluid Mech.* **582**, 463 (2007).
19. M. Onorato, T. Waseda, A. Toffoli et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 114502 (2009).
20. G. Z. Forristall, *J. Phys. Oceanogr.* **30**, 1931 (2000).
21. A. Toffoli, E. Bitner-Gregersen, M. Onorato, and A. V. Babanin, *Ocean Engineering* **35**, 1784 (2008).
22. V.P. Ruban and J. Dreher, *Phys. Rev. E* **72**, 066303 (2005).
23. V.P. Ruban, *Eur. Phys. J. Special Topics* **185**, 17 (2010).
24. В. П. Рубан, arXiv:1107.1307.
25. C. Fochesato, S. Grilli, and F. Dias, *Wave Motion* **44**, 395 (2007).