Письма в ЖЭТФ, том 98, вып. 3, с. 207 – 213

О законе возрастания энтропии и причине необратимости динамики квантовых систем

Г. Б. Лесовик[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 27 июня 2013 г.

Показано, что нарушение симметрии по времени в динамике больших систем возникает из-за нарушения симметрии в заполнении гильбертова пространства. Состояния ϕ, для которых энтропия системы (подсистемы) растет, естественным образом порождаются в природе или могут быть приготовлены экспериментально, а состояния, им комплексно-сопряженные (ϕ^*), для которых энтропия убывает, – нет (хотя формально в силу принципа суперпозиции они и могут существовать). В работе указывается, что в общем случае обращение динамики неизвестных состояний невозможно из-за того, что оператор комплексного сопряжения антилинеен. Для известного состояния сложность обращения экспоненциальна в типичном случае большой системы. Сделанные утверждения проиллюстрированны на простых моделях.

DOI: 10.7868/S0370274X13150137

В понимании закона возрастания энтропии в последние годы достигнут довольно существенный прогресс. В литературе появился ряд публикаций на эту тему [1–3], в которых в качестве ключевой представлена идея о квантовой запутанности как о причине роста энтропии (см. также более ранние работы [4]). То, что именно возрастание запутанности системы и резервуара является источником возрастания энтропии, на сегодняшний день можно считать общепризнанным. Вместе с тем в понимании фундаментальной причины необратимости ясности гораздо меньше. Именно этот вопрос мы и рассмотрим. Напомним, что проблема (так называемый парадокс Лошмидта) заключается в том, что непонятно, почему имеется неизбежный рост энтропии, если микроскопические законы инвариантны относительно инверсии времени ($t \to -t$).

В учебнике Ландау и Лифшица [5] это обстоятельство формулируется так: *“...если возможен какой-либо процесс, сопровождающийся возрастанием энтропии замкнутой макроскопической системы, то должен быть возможен и обратный процесс, при котором энтропия системы убывает”.*

И далее для случая квантовой механики: *“Как известно, основное уравнение квантовой механики – уравнение Шредингера – само по себе симметрично по отношению к изменению знака времени (при условии одновременной замены волновой функции Ψ на Ψ^*). Это значит, что если в некоторый момент времени $t = t_1$ волновая функция задана, $\Psi = \Psi(t_1)$, и, согласно уравнению Шредингера, в другой момент времени $t = t_2$ она должна стать равной $\Psi(t_2)$, то переход от $\Psi(t_1)$ к $\Psi(t_2)$ обратим; другими словами, если в начальный момент времени $t = t_1$ было бы $\Psi = \Psi(t_2)^*$, то в момент $t = t_2$ будет $\Psi = \Psi^*(t_1)$”.*

Из данной цитаты видно, что приготовление (или естественное появление в природе) комплексно-сопряженной волновой функции ψ^* не считается проблемным. Однако в большинстве случаев ψ^* практически нереально (или в принципе невозможно) приготовить. Причиной этого является возникновение в волновой функции большого числа интерферирующих компонент с различными фазами, которые тяжело воссоздать для обращения. Именно сложность изготовления ψ^* и есть ключевой момент, объясняющий, с нашей точки зрения, парадокс Лошмидта.

Рассмотрим теперь проблему обращения состояний более подробно.

1. Обращение неизвестного состояния. Начнем с обращения *неизвестного* состояния. Рассмотрим некую манипуляцию, которая породит ψ^*, после чего эволюция состояния повернется вспять. Хорошо известен пример, когда для определенного класса состояний это возможно. Это явление спинового эхо [6].

Напомним суть данного эффекта в самом простом варианте. Пусть в начальный момент времени спин лежит в плоскости (XY). Далее он вращается в течение некоторого времени t_0 в плоскости (XY) из-за присутствия постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси Z. Для обращения динамики вспять спин можно повернуть (импульсом поля) на угол π относительно любой из осей, лежащих в

[1)]e-mail: glesovik@yandex.ru

плоскости (XY), например относительно оси X. Как можно убедиться, с точностью до общей фазы это и есть операция комплексного сопряжения, достигнутая просто перестановкой компонент в спиноре. Применив через время t_0 поворот еще раз, получим исходное состояние (при этом знание о начальном состоянии не использовалось). Данный эффект также лежит в основе успешно используемой в последние годы динамической изоляции (*dynamical decoupling*) кубитов от внешнего шума [7].

Вместе с тем для обращения произвольного состояния возникает следующая проблема. Комплексное сопряжение произвольного *неизвестного* состояния должно осуществляться неким единым оператором, не зависящим от вида состояния. Однако оператор комплексного сопряжения $\hat{C}$, вообще говоря, не может отвечать обычной унитарной эволюции. Хотя операция комплексного сопряжения сохраняет норму вектора, как и положено при унитарной операции, $\hat{C}$ является не линейным, а антилинейным оператором. Для $\hat{C}$ мы имеем

$$\hat{C}A\phi = A^*\phi^* = A^*\hat{C}\phi, \tag{1}$$

в то время как для унитарного (как и любого линейного) оператора

$$\hat{U}A\phi = A\hat{U}\phi. \tag{2}$$

Можно было бы надеяться, что для довольно широких классов состояний существует унитарная операция, которая осуществляет комплексное сопряжение. Приведем контраргумент. Пусть есть два различных состояния, для которых имеется "случайное" совпадение унитарного оператора и оператора сопряжения:

$$\hat{U}\phi_1 = \phi_1^*; \quad \hat{U}\phi_2 = \phi_2^*. \tag{3}$$

Для суперпозиции соответствующих состояний такое совпадение в общем случае уже не имеет места, и подпространства, на котором возможно обращение, не образуется:

$$\hat{U}(A\phi_1 + B\phi_2) = A\phi_1^* + B\phi_2^* \neq A^*\phi_1^* + B^*\phi_2^*. \tag{4}$$

Итак, *неизвестное* состояние обратить, вообще говоря, нельзя в принципе, за исключением специальных случаев "совпадения" действий некоторого унитарного оператора и $\hat{C}$ на определенные состояния.

Можно ли обратить *известное* состояние? В общем случае можно считать, что это задача изготовления заданного состояния, которую можно связать с понятием сложности вычислений. Создание известного (заданного) состояния квантового компьютера из K кубитов требует в общем случае порядка 2^K шагов [8]. Иначе говоря, сложность определяется эффективной размерностью гильбертова пространства (ГП), в которое вложено состояние.

Любая реальная система вовсе не устроена как квантовый компьютер с доступом к каждой степени свободы и возможностью всех необходимых манипуляций. Поэтому в то время как на идеальном квантовом компьютере для большой размерности обращение является сложным, для обычной системы оно оказывается невозможным.

Фактически для обращения сложных событий требуются нетривиальные действия, которые создают очень специальное состояние. Спонтанно они не возникают, т.к. крайне маловероятны. При целенаправленном же изготовлении легко изготовить только состояния, которые затем эволюционируют в труднообратимые.

Реалистично, как правило, создать систему, занимающую малый фазовый объем. Для этого не требуется манипуляции на уровне квантовых вычислений. Например, можно охладить систему, так что она окажется в основном состоянии, а затем возбудить ее классическим полем. Такие же процессы могут происходить спонтанно, например из-за флуктуаций внешних полей. А вот процесс достаточно точной подстройки всех фаз спонтанно не происходит. Таким образом, мы можем сказать, что *необратимость во времени порождается сложностью или невозможностью создания соответствующих состояний.*

Для демонстрации вышеизложенных идей мы сначала рассмотрим задачу о расплывании волнового пакета, а затем – динамику частицы в ящике с модельным спиновым резервуаром и покажем, как с течением времени состояния становятся труднообратимыми.

2. Расплывание волнового пакета. Степенная необратимость (сложность обращения). Начнем с задачи о расплывании волнового пакета – примера, в котором увеличение энтропии не имеет места, но динамика тоже сложно обратима. При расплывании волнового пакета (ВП) в определенном смысле увеличивается размерность занятого ГП, что и определяет сложность приготовления сопряженного состояния.

Рассмотрим одномерную свободную эволюцию ВП, который описывается гамильтонианом с квадратичным спектром. Пусть в момент времени $t = 0$ пакет имеет гауссову форму, $\psi(x, 0) \propto \exp\{-x^2\}$. Всем известно, что из-за нелинейности спектра он расплывается при движении по времени вперед. Однако менее известно, что он также расплывается при движении по времени назад (о чем можно прочесть в учебниках, см., например, [9]). Для гауссова пакета при конечных временах при t и $-t$ функции распределения равны: $|\psi(x,-t)|^2 = |\psi(x,t)|^2$. Следовательно, до момента $t = 0$ пакет сужался (если его эволюция была при этом свободной; см. далее о приготовлении состояния). Более того, начав "отматывать" эволюцию *любого* волнового пакета назад, мы увидим, что в прошлом он тоже был "размазан" в пространстве [9] (см. рис. 1). (Характеристикой расплывания

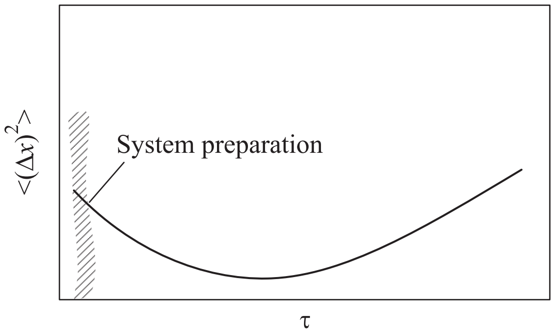

Рис. 1. Зависимость дисперсии $\langle(\Delta x)^2\rangle_t$ от времени. Дисперсия может увеличиваться или убывать в зависимости от исходного состояния

может служить дисперсия $\langle(\Delta x)^2\rangle_t = \langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2$, где $\Delta x = x - \langle x\rangle_t$. Здесь треугольные скобки означают усреднение по состоянию в момент времени t.)

Итак, если рассмотреть свободную эволюцию любого пакета в некоторый случайный момент времени, то в выбранный момент он может как расплываться, так и сжиматься. Таким образом, имеет место симметрия. Однако в момент изготовления начального состояния частица не являлась свободной, а была, например, локализована в квантовой точке (яме). Типичный процесс приготовления как раз и обеспечивает состояние, близкое к минимуму дисперсии. В ходе дальнейшей эволюции пакет расплывается. Расхожие (и не совсем верные) представления о том, что все волновые пакеты расплываются, возникают именно оттого, что практически можно изготовить только расплывающиеся ВП. Волновые пакеты, которые сжимаются, формально могут существовать, но приготовить их сложно. В частности, можно комплексно сопрячь расплывшийся пакет, и он начнет сжиматься. Оценим сложность этой операции и покажем, что она является степенной по времени. Состояние пакета $\psi(x,0) = \int dk f_k \exp(ikx)$ после эволюции в течение времени t имеет вид

$$\psi(x,t) = \int dk f_k \exp\left[-iE(k)t + ikx\right].$$

Для обращения назад волновую функцию (ВФ) нужно комплексно сопрячь (пусть эта процедура занимает время τ):

$$\psi(x,t+\tau) = \int dk f_k^* \exp\left[iE(k)t - ikx\right],$$

т.е. для каждой компоненты в k-пространстве надо добавить нужную фазу, обеспечиваемую множителем $\exp\{2[iE(k)t - ikx]\} f_k^*/f_k$.

При любой реальной манипуляции точность конечна. Поэтому зафиксируем требуемую точность так, чтобы отклонения в волновой функции в k-пространстве $|\delta f_k| < f_0$. Пусть при манипуляциях ВФ аппроксимируется кусочно-ступенчатой функцией с шагом $\delta k = k_0/N$, где k_0 – характерный k-вектор частицы. Пусть это делается, скажем, с помощью спектрального разложения волны в интерферометре (на дифракционной решетке) и последующих манипуляций с каждой отдельной компонентой. Вычислим, сколько компонент N при этом потребуется.

Будем считать, что начальная ВФ является плавной, а размер волнового пакета составляет порядка L. Тогда $|\psi| \approx L^{-1/2}$, а $|f_k| \approx L^{1/2}$ и $|f_k^{'}| \approx L^{3/2}$.

В этом случае на больших временах максимальное изменение фазы набирается за счет временной компоненты. Производную от ВФ в k-пространстве g_k на больших временах можно оценить как

$$|g_k^{'}/g_k| < v_k t = \hbar k t/m.$$

Из условия на точность имеем

$$|\delta g_k| = |g_k^{'}|\delta k \sim< \hbar k t/m L^{1/2} k_{\mathrm{F}}/N < f_0.$$

Здесь $g_k \sim L^{1/2}$, $k_{\mathrm{F}} = 1/L$.

Отсюда получаем, что число манипуляций (компонент) растет линейно со временем:

$$N \sim t\frac{\hbar k}{m L^{1/2} f_0}. \quad (5)$$

Таким образом, сложность обращения определяется тем, что в *базисе, задаваемом типом манипуляций, совершаемых над состоянием, и требуемой точностью, состояние заполняет линейно растущий со временем фазовый объем* (для координатного пространства это характерный размер расплывшегося волнового пакета).

Итак, обращение эволюции с квадратичным спектром имеет степенную сложность (а на практике вряд ли реализуемо, особенно в трехмерном случае). Как мы увидим далее, для системы с дискретными степенями свободы при наличии резервуара имеет место аналогичное явление, вызванное запутанностью системы и резервуара, из-за которой эффективная размерность занятого ГП и сложность обращения растут экспоненциально. Они именно растут, а не убывают, поскольку типично система создается в состоянии, близком к минимуму объема фазового пространства, так что, например, изначально система не запутана за резервуар или запутана тривиально, т.е. естественным образом, в меру взаимодействия с резервуаром (такие состояния можно назвать естественно запутанными).

Отметим также, что расплывание системы в ГП (в фиксированном базисе) как в будущем, так и в прошлом (и сжатие в окрестности некоторого момента времени) является вполне общим свойством для широкого класса систем с гамильтонианом не зависящим от времени. Его можно пронаблюдать и на примере частицы в ящике, взаимодействующей с резервуаром (см. далее; более строго данное утверждение мы рассмотрим в отдельной публикации).

3. Частица в ящике, запутанная со спинами. Экспоненциальная необратимость (сложность обращения). Парадокс Лошмидта выглядит особенно ярко для равновесного распределения, к которому, например, газ срелаксировал из исходного неравновесного. В этом случае все направления скоростей равновероятны. Можно было бы задать вопрос о том, почему не возникает такого состояния, в котором все скорости обратятся, и газ не вернется к исходному неравновесному состоянию.

Рассмотрим движение частицы в ящике, в котором при должном взаимодействии с резервуаром функция распределения становится равновесной, и обсудим сложность обращения динамики. В работе [3] для блуждания квантовой частицы на решетке в присутствии модельного резервуара был продемонстрирован рост ее энтропии со временем. Модифицируем эту модель и рассмотрим движение частицы не на бесконечной цепочке, а на ограниченном отрезке (в одномерном ящике). Пусть в ящике длиной $2L$ имеется (для простоты) всего два рассеивателя на расстоянии $L/2$ от стенок с вероятностью прохождения $1/2$, но с разными амплитудами t_1, r_1 и t_2, r_2 (см. рис. 2).

Будем считать спектр линейным. Тогда обращение свободного движения частицы (при помощи отражения от стенки для известной траектории) становится тривиальным, в отличие от случая квадратичного спектра. При этом мы будем рассматривать дискретные моменты времени, соответствующие положениям частицы посередине между рассеивателями или на стенке, поскольку в промежутках между актами рассеяния энтропия не меняется.

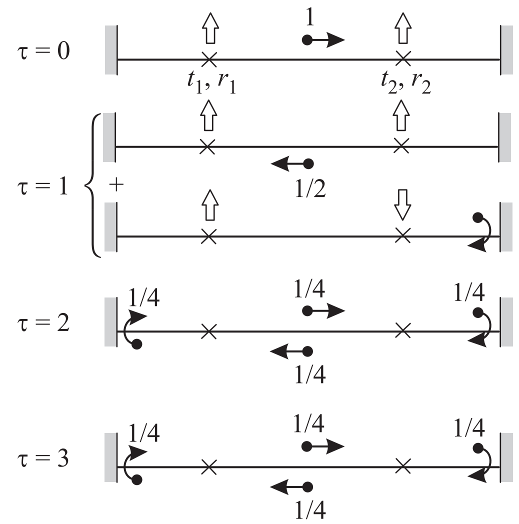

Рис. 2. Движение частицы в одномерном ящике. В ящике длиной $2L$ имеется два рассеивателя на расстоянии $L/2$ от стенок с вероятностью прохождения $1/2$, но с разными амплитудами t_1, r_1 и t_2, r_2. Возле каждого рассеивателя расположен спин (новый на каждом временном шаге). Состояния спинов показаны только для первого шага

Будем обозначать состояния частицы вектором $|A_L, A_{0+}, A_{0-}, A_R\rangle$, где по порядку слева направо стоят амплитуды на левой стенке (A_L), в центре с $v > 0$ (A_{0+}) и $v < 0$ (A_{0-}) и справа (A_R). Состояние на стенке можно представить как волновой пакет, наполовину (передним фронтом) отразившийся от стенки.

Чтобы динамика частицы описывалась кинетическим уравнением (уравнением только на вероятности) нужно ввести взаимодействие с резервуаром. При этом требуется такое взаимодействие с резервуаром, при котором обмен энергией или импульсом был бы пренебрежимо мал, но при этом фаза сбивалась бы из-за возникновения запутанности. Тогда для системы будет справедливо кинетическое уравнение. Чтобы удовлетворить этим условиям, будем считать, что возле каждого рассеивателя имеется спин-измеритель (или кубит [10]), который поворачивается на угол π, если частица проходит, и остается в начальном состоянии, если частица отражается (эта идея почерпнута из работ по статистике переноса заряда [11]). Угол поворота π обеспечивает полный сбой фазы (состояние спина становится ортогональным исходному). При этом можно считать, что энергия не передается. В этом смысле данная система идеально подходит для наших целей.

В результате после рассеяния частицы при движении, скажем, слева, начиная с середины,

$|0,1,0,0\rangle|00\rangle$, через один шаг полная волновая функция системы частица + спин приобретает вид $|0,0,r_2,0\rangle|00\rangle + |0,0,0,t\rangle|01\rangle$. (Мы для краткости не выписываем набор фазы на стенке.) Заметим, что это уже запутанное состояние частицы и резервуара. Как мы увидим, это простой тип запутанности. Более сложный ее тип возникает после третьего шага (тогда уже и возникают принципиальные сложности в обращении).

Для того чтобы полностью избежать интерференции и проследить все возможные фейнмановские траектории, будем считать, что на каждом шаге набор двух детекторов-спинов (кубитов) сменяется новым, так что полная информация о движении частицы "записывается" в систему спинов (кубитов). Для такой системы справедливо кинетическое (разностное) уравнение на вероятности найти частицу со скоростью $\pm v_0$ на одной из стенок или в центре. Имеем

$$P_L(n+1) = P_L(n)/2 + P_-(n)/2 \qquad (6)$$

и аналогичное уравнение для правой стенки, а также

$$P_-(n+1) = P_R(n)/2 + P_+(n)/2 \qquad (7)$$

и аналогичное уравнение для P_+.

Если частица стартует из любого из четырех состояний, то после второго шага создается одно и то же стационарное распределение вероятностей, которое далее не меняется со временем, (см. рис. 2).

При этом энтропия, как и положено по H-теореме, сначала растет, а на втором шаге насыщается. (Энтропия S (по фон Нейману) определяется как $S = -\mathrm{Tr}\{\hat{\rho} ln \hat{\rho}\}$, где ρ – оператор матрицы плотности частицы.)

Поясним важную тонкость в описании системы с помощью матрицы плотности (МП). Для описания динамики частицы в каждый момент времени мы можем описать рассмотренную систему полной МП, являющейся произведением МП частицы и спинов, с которыми частица будет взаимодействовать в будущем:

$$\hat{\rho}_{ps} = \hat{\rho}_p \times \hat{\rho}_s. \qquad (8)$$

Матрица плотности электрона после второго шага симметрична по направлению скоростей. Если мы комплексно обратим состояние всей системы, матрица плотности частицы останется неизменной. Здесь мы можем еще раз сформулировать (переформулировать) вопрос из начала параграфа (парадокс Лошмидта): как получить начальное состояние, если МП частицы не меняется при комплексном сопряжении (фактически при обращении времени) [12]? Дело в том, что формула (8) корректна для описания эволюции вперед по времени. Но если мы комплексно обратим состояние всей системы, то, хотя матрица плотности частицы и останется неизменной, частица при этом будет взаимодействовать в будущем со спинами, с которыми она запутана. В таком случае формула (8) для полной матрицы плотности окажется неверна. В этом случае следует вводить в явном виде состояние всей системы частица + резервуар, с которым частица запутана:

$$\hat{\rho}_{ps} = |\psi_{ps}\rangle\langle\psi_{ps}| \neq \hat{\rho}_p \times \hat{\rho}_s. \qquad (9)$$

При этом вывод уравнений на вероятности (6) и (7) (и сами уравнения) уже становится некорректным, так как уникальность идентификации каждой из фейнмановских траекторий не имеет места для состояния, в котором частица взаимодействует с резервуаром, с чьими степенями свободы имеется исходная запутанность.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как обратить динамику рассматриваемой системы и на каком шаге это становится сложным.

Обращение известных состояний в ящике. Пусть для обращения у нас в распоряжении имеются следующие инструменты. Мы можем отразить частицу от произвольного места в ящике, сообщив некоторую дополнительную фазу, а также обеспечить появление спинов около частицы в обратном порядке и их обращение на угол π (для выбранной модели две последние операции эквивалентны комплексному сопряжению состояния спина). Иначе говоря, у нас в распоряжении есть однокуб(д)итные операции и мы за короткое время можем их осуществить.

Тогда мы можем обратить состояния после первого, а также после второго шага, но после третьего шага мы их обратить не сможем. Дело в том, что именно на третьем шаге возникает более сложное запутанное состояние, для обращения которого указанных выше операций недостаточно. Необходимы операции, в которых спины и частица нетривиально взаимодействуют (по типу двухкубитных операций в квантовых компьютерах).

Для краткости выпишем явно только одну компоненту полной волновой функции (возникающую после третьего шага), описывающую частицу, движущуюся направо в середине: $|0,r_2t_1^2,0,0\rangle|00\rangle|10\rangle|10\rangle +$ $+ |0,r_1t_2^2,0,0\rangle|01\rangle|01\rangle|00\rangle + ...$ Если сообщить частице дополнительную фазу, так что, например, первая компонента окажется комплексно-сопряженной, то вторая компонента вовсе не будет являться таковой [13]. Причину, по которой нельзя простым способом обратить состояние частицы + спины в ящике, можно понимать следующим образом. Состояние нашего спинового резервуара обратимо ввиду его специфики (неизвестные состояния спинов (кубитов) обратимы). А вот неизвестное состояние частицы (кудита размерности 4) обратить (операциями, имеющимися в наличии) невозможно. Поэтому речь может идти только о построении заранее известного состояния Это является трудоемкой процедурой.

Итак, мы пришли к выводу о том, что *система (частица) спонтанно не возвращается к начальному состоянию, так как она запутана с резервуаром. Для обращения эволюции требуются сложные манипуляции одновременно, и над системой и над резервуаром. В общем случае сложность растет экспоненциально по времени в силу того, что экспоненциально растет число компонент волновой функции, описывающей систему и резервуар. При этом сама запутанность за резервуар необходима для справедливости описания кинетическим уравнением на вероятности.*

Отметим, что, как и в случае волнового пакета, если мы устраним из рассмотрения "изготовителя", то в прошлом состояние системы также окажется запутанным и "расплывется" в пространстве "вычислительного базиса" [8]. Если суметь его изготовить, то к моменту времени "нуль" оно сожмется в состояние с локализованной частицей, не запутанной с резервуаром. Данное свойство можно сформулировать в более общем виде (для систем с не зависящим от времени гамильтонианом). *Пусть состояние φ расплывается по времени вперед (в каком-либо из смыслов) и φ^* ведет себя так же (что имеет место, например, для действительной φ, а также в ряде других случаев). Тогда состояние φ расплывается и в прошлом, аналогично волновому пакету.* Действительно, пусть для эволюции от момента времени $t = 0$ до $t = \tau$ состояния φ (т.е. вперед по времени) имеем $\exp\{-iH\tau\}\varphi = \psi$, а для эволюции комплексно-сопряженного состояния $\exp\{-iH\tau\}\varphi^* = \psi_1$ (в последней формуле при наличии магнитного поля, входящего в гамильтониан, знак поля должен быть изменен на противоположный). Тогда состояние φ в прошлом при времени $t = -\tau$ есть ψ_1^*, поскольку $\exp\{iH\tau\}\varphi = \psi_1^*$. Отсюда следует, что такие характеристики волновой функции φ, как средние $\langle(\Delta x)^2\rangle_t$, энтропия подсистем S и т.д., в прошлом совпадают со свойствами волновой функции φ^* в будущем, что мы и хотели показать. (Для рассмотренного выше случая состояние φ^* есть состояние частицы, движущейся при $t = 0$ влево, $|0,0,1,0\rangle|11\rangle$.)

4. Заключение. Подводя итог, можно сказать, что парадокс Лошмидта обусловлен нарушением симметрии в заполнении ГП: состояния ϕ, для которых энтропия (или эффективный фазовый объем) растет, присутствуют, а комплексно-сопряженные им состояния ϕ^*, для которых энтропия убывает, отсутствуют. Таким образом, имеется своего рода неэргодичность. Одни состояния (ϕ) могут порождаться или по заказу экспериментально, или естественным образом в природе, а другие (ϕ^*) – нет. Приготовить последние, кроме простых случаев, невозможно (хотя формально в силу принципа суперпозиции они и могут существовать).

Типичный процесс взаимодействия системы с макромиром исчерпывается наличием возможности термализации при помощи резервуара и дополнительных манипуляций (например, возбуждения) посредством классических полей. Такой набор операций как раз и порождает асимметрию по времени.

Говоря более формально, сектор ГП, в котором находятся ϕ^*, недостижим при воздействии унитарной эволюции, реально осуществимой в природе (см. рис. 3). Чтобы описать допустимые (имеющиеся в наличии) унитарные операции на заданном ГП, приходится рассматривать свойства изготовителя (внешнего мира). Зная набор допустимых на ГП унитарных операторов, мы можем ввести меру на таком пространстве.

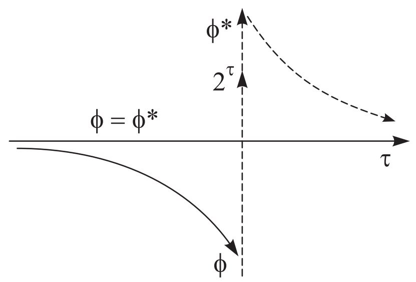

Рис. 3. Асимметрия в заполнении гильбертова пространства. Изготовление комплексно-сопряженного состояния (эволюционирующего к начальному состоянию) или невозможно, или является, как правило, экспоненциально сложной процедурой. Поэтому такие состояния почти никогда не реализуются в природе

Расстояние $D(\psi_1|\psi_2)$ между состояниями ψ_1 и ψ_2 мы определим как минимальное время, необходимое для перехода от состояния ψ_1 к состоянию ψ_2.

Необычность такой меры заключается в том, что она асимметрична. Например, если ψ_2 есть результат естественной эволюции ψ_1, то в типичном случае $D(\psi_1|\psi_2) \ll D(\psi_2|\psi_1)$ [14] (что и означает необратимость).

Расстояние $D(\phi_1|\phi_1^*)$ от ϕ_1 до ϕ_1^* в типичном случае будет экспоненциально велико (иначе говоря, изготовление комплексно-сопряженного состояния, как мы уже обсуждали, почти всегда невозможно или сложно). Также велико будет расстояние до ψ_1^* от любых состояний, которые реально изготовить (они занимают нижнюю полуплоскость на рис. 3).

Симметрия по времени восстанавливается, например, для динамики квантового компьютера, в котором все состояния достижимы, если случайным образом приготавливать начальные состояния.

В заключение еще раз процитируем учебник [5]: *"...Вопрос о физических основаниях закона монотонного возрастания энтропии остается, таким образом, открытым. Не имеет ли его происхождение космологической природы, и не связано ли оно с общей проблемой начальных условий в космологии? Играет ли и какую роль в этом вопросе нарушение временной симметрии в некоторых процессах слабых взаимодействий между элементарными частицами? Возможно, что на подобные вопросы будут получены ответы лишь в процессе дальнейшего синтеза физических теорий."*

Можно констатировать, что ни космология, ни слабые взаимодействия не требуются для объяснения второго закона и нарушения временной симметрии.

Работа поддержана грантом РФФИ # 11-02-00744-а. Автор признателен Дж. Блаттеру, М.В. Суслову и Ю.М. Кагану за полезные обсуждения.

---

1. J. A. Otte and G. Mahler, Phys. Rev. Lett. **86**, 1927 (2001); J. Gemmer, M. Michel, and G. Mahler, *Quantum Thermodynamics*, LNP 657, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2004.
2. S. Popescu, A. J. Short, and A. Winter, Nature Physics **2**, 754 (2006).
3. G. B. Lesovik and I. A. Sadovskyy, arXiv:1212.2576.
4. А. Б. Брайловский, В. Л. Вакс, В. В. Митюгов, Квантовые модели релаксации **166**, 795 (1996); В. И. Татарский, УФН **151**(2), 273 (1987); В. В. Митюгов, УФН **170**, 681 (2000) ; Б. Б. Кадомцев, *Динамика и информация*, М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1999.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика.* Ч. 1. М.: Физматлит, 1995.
6. E. Hahn, Phys. Rev. **80**, 580 (1950).
7. L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **82**, 2417 (1999).
8. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, М.: Мир, 2006.
9. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, М.: Физматлит, 1976.
10. G. B. Lesovik, F. Hassler, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **96**, 106801 (2006).
11. L. S. Levitov, H. W. Lee, and G. B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).
12. При этом то, что кинетическое уравнение (КУР) "назад по времени" не сработает, видно уже из наличия неоднозначности. Из любого из четырех начальных состояний (и их суперпозиций) мы получим одно и то же стационарное состояние. Непонятно, в какое же именно из начальных состояний может привести КУР.
13. Обратим внимание на то, что необратимость (труднообратимость) наступает после третьего шага, а не после второго, когда релаксация к равновесному состоянию ("термализация") уже произошла. Таким образом, в квантовом случае возможность обращения состояния не определяется только величиной энтропии (и степень запутанности недостаточно точно определяется энтропией).
14. Здесь напрашивается аналогия с используемыми в криптографии необратимыми (*one way functions*) математическими функциями, для которых $y = f(x)$ легко вычисляется, а $x = f^{-1}(y)$ – нет. Для наглядности также укажем на пример асимметричного расстояния, возникающего при движении в городе по улицам с односторонним движением.