Письма в ЖЭТФ, том 98, вып. 8, с. 554 – 560

Новый механизм хаоса в треугольных биллиардах

С. В. Найденов[+1)], *Д. М. Наплеков*[+], *В. В. Яновский*[+*]

[+]*Институт монокристаллов НАНУ, 61001 Харьков, Украина*

[*]*Харьковский национальный университет им. Каразина, 61000 Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 29 июля 2013 г.

После переработки 18 сентября 2013 г.

Предложен новый механизм слабого хаоса для треугольных биллиардов, обусловленный *эффектом разрезания* пучков лучей. Аналогичный механизм реализуется и в других биллиардах, в многоугольниках. Разрезание пучков приводит к разведению первоначально близких лучей на конечный угол скачками во время отражений пучков в вершинах биллиарда. Вместе с разрезанием в любом треугольном биллиарде присутствует противоположный *эффект склеивания* пучков лучей. Показано, что разрезание пучков имеет абсолютный характер и не зависит от вида треугольного биллиарда или параметров пучка. В отличие от него склеивание имеет относительный характер и зависит от соизмеримости углов треугольника с π. В треугольных биллиардах, у которых все углы рационально соизмеримы с π, склеивание всегда подавляет разрезание. Из-за этого их динамика не может быть хаотической. В треугольных биллиардах с углами, рационально несоизмеримыми с π, разрезание всегда доминирует, что и приводит к слабому хаосу. Обнаруженные закономерности подтверждаются численными экспериментами на фазовых портретах типичных треугольных биллиардов.

DOI: 10.7868/S0370274X13200125

1. Биллиарды или динамические системы с упругими отражениями, относятся к популярным моделям современной теории детерминированного хаоса и имеют многочисленные физические приложения (см., например, [1] и ссылки там). Биллиарды Синая [2], Бунимовича [3] и другие сыграли принципиальную роль в объяснении природы динамического хаоса. Несмотря на более чем столетнее изучение биллиардов в многоугольниках (см., например, [4, 5]), до сих пор плохо известны принципы, которым подчинена их хаотическая динамика. Только сравнительно недавно были предприняты попытки численного исследования иррациональных треугольных биллиардов со свойством перемешивания фазовых траекторий [6]. Вместе с тем именно в многоугольных биллиардах как типично параболических динамических системах, где близкие траектории расходятся не более чем линейным образом, следует ожидать появления *слабого хаоса* и связанных с ним необычных нелинейных эффектов. Под слабым хаосом будем понимать нерегулярную динамику в системах, у которых имеются определенные признаки хаотического движения (отсутствие интегралов движения, эргодичность, перемешивание и т.д.), но показатель Ляпунова строго равен нулю. Несмотря на кажущуюся простоту многоугольных биллиардов, методы, которые требуются для их аналитического исследования, как правило, оказываются очень нетривиальными. Поэтому важно установить физические закономерности слабого хаоса в многоугольных биллиардах.

2. Опишем динамику лучей в произвольных треугольных биллиардах. Возьмем на плоскости произвольный треугольник ABC с тремя углами α, β, γ (рис. 1). Длины его сторон всегда можно выразить

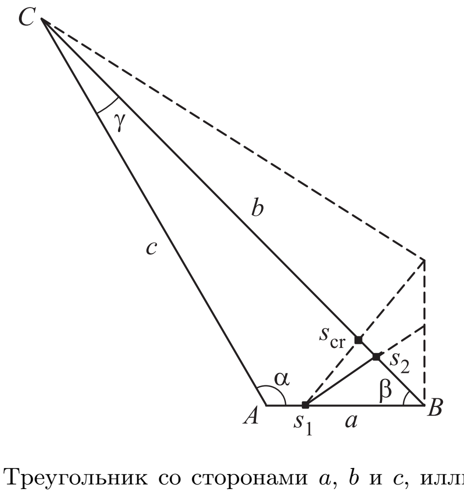

Рис. 1. Треугольник со сторонами a, b и c, иллюстрирующий построение отображения лучей, и особый луч с координатами $(s_1, s_{\rm cr})$

через эти углы. Будем считать положительными обход периметра и направление отсчета углов от вы-

[1)]e-maill: sergei.naydenov@gmail.com

деленного направления (например, от стороны AB) против часовой стрелки. Удобно, изменяя масштаб, нормировать периметр на единицу ($a+b+c=1$) и ввести натуральные координаты s на замкнутой границе. В них координаты вершин A, B, C равны 0, $a_1 = a$ и $a_2 = a+b$ соответственно.

Рассмотрим биллиард внутри треугольника. Отражения точечной частицы от границы происходят по закону упругого (зеркального) отражения. Конфигурационным пространством является замкнутая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ внутри треугольника. В качестве фазового пространства Σ будем использовать симметричное пространство лучей, предложенное в работах [7, 8]. Точка этого пространства (s_1, s_2) определяет отдельный сегмент (луч) биллиардной траектории. Динамика системы в дискретном времени описывается обратимым отображением:

$$\begin{cases} s_1' = s_2, \\ s_2' = f(s_1, s_2), \end{cases} \tag{1}$$

где (s_1, s_2) и (s_1', s_2') – координаты падающего и отраженного лучей на границе треугольника. В общем случае отображение (1) не является консервативным. Из фазового пространства следует исключить нефизические лучи, оба конца которых попадают на одну и ту же сторону треугольника. В результате Σ имеет топологию тора $\mathbb{T}^2$ с тремя вырезанными зонами запрещенного движения. Фазовый портрет биллиарда удобно представлять на плоской развертке этого тора.

Функция $f(s_1, s_2)$ является однопараметрической инволюцией, $f[f(s_1, s_2), s_2] = s_1$ (см. [7, 8]). Для ее определения удобно воспользоваться приемом *выпрямления траекторий* (см., например, [9]) и формулой для длины биссектрисы треугольника (рис. 1). При этом следует учесть, что падающий на некоторую сторону луч после отражения может перейти на одну из двух других сторон. Разрыв $s_2 = s_{\rm cr}$ соответствует попаданию отраженного (особого) луча в вершину биллиарда. В результате инволюция треугольного биллиарда состоит из 12 ветвей. Ее точный вид для произвольного треугольника:

$$f(s_1, s_2) = \tag{2}$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 - \frac{(a_1-s_1)(s_2-a_1)}{2(a_1-s_1)\cos\beta-(s_2-a_1)} & \left\{\begin{array}{l} 0<s_1<a_1, \\ a_1<s_2<a_1+\Delta_1; \end{array}\right. \\
a_2 + \frac{(a_1-s_1)(a_2-s_2)\sin\beta}{(a_1-s_1)\sin(\beta-\gamma)+(s_2-a_1)\sin\gamma} & \left\{\begin{array}{l} 0<s_1<a_1, \\ a_1+\Delta_1<s_2<a_2; \end{array}\right. \\
a_2 - \frac{s_1(s_2-a_2)\sin\alpha}{s_1\sin(\alpha-\gamma)+(1-s_2)\sin\gamma} & \left\{\begin{array}{l} 0<s_1<a_1, \\ a_2<s_2<1-\Delta_2; \end{array}\right. \\
0 + \frac{s_1(1-s_2)}{2s_1\cos\alpha-(1-s_2)} & \left\{\begin{array}{l} 0<s_1<a_1, \\ 1-\Delta_2<s_2<1; \end{array}\right. \\
1 - \frac{(s_1-a_1)s_2\sin\beta}{(s_1-a)\sin(\beta-\alpha)+(a_1-s_2)\sin\alpha} & \left\{\begin{array}{l} a_1<s_1<a_2, \\ 0<s_2<a_1-\Delta_3; \end{array}\right. \\
a_1 + \frac{(s_1-a_1)(a_1-s_2)}{2(s_1-a_1)\cos\beta-(a_1-s_2)} & \left\{\begin{array}{l} a_1<s_1<a_2, \\ a_1-\Delta_3<s_2<a_1; \end{array}\right. \\
a_2 - \frac{(a_2-s_1)(s_2-a_2)}{2(a_2-s_1)\cos\gamma-(s_2-a_2)} & \left\{\begin{array}{l} a_1<s_1<a_2, \\ a_2<s_2<a_2+\Delta_4; \end{array}\right. \\
0 + \frac{(a_2-s_1)(1-s_2)\sin\gamma}{(a_2-s_1)\sin(\gamma-\alpha)+(s_2-a_2)\sin\alpha} & \left\{\begin{array}{l} a_1<s_1<a_2, \\ a_2+\Delta_4<s_2<1; \end{array}\right. \\
1 - \frac{(1-s_1)s_2}{2(1-s_1)\cos\alpha-s_2} & \left\{\begin{array}{l} a_2<s_1<1, \\ 0<s_2<\Delta_5; \end{array}\right. \\
a_1 + \frac{(1-s_1)(a_1-s_2)\sin\alpha}{(1-s_1)\sin(\alpha-\beta)+s_2\sin\beta} & \left\{\begin{array}{l} a_2<s_1<1, \\ \Delta_5<s_2<a_1; \end{array}\right. \\
a_1 - \frac{(s_1-a_2)(s_2-a_1)\sin\gamma}{(s_1-a_2)\sin(\gamma-\beta)+(a_2-s_2)\sin\beta} & \left\{\begin{array}{l} a_2<s_1<1, \\ a_1<s_2<a_2-\Delta_6; \end{array}\right. \\
a_2 + \frac{(s_1-a_2)(a_2-s_2)}{2(s_1-a_2)\cos\gamma-(a_2-s_2)} & \left\{\begin{array}{l} a_2<s_1<1, \\ a_2-\Delta_6<s_2<a_2. \end{array}\right.
\end{array}$$

Здесь координаты разрывов $s_{2,\rm cr} = \Delta_k(s_1) \equiv \Delta_k$ имеют вид

$$\begin{cases}
\Delta_1 = \dfrac{2(a_1-s_1)a_1}{(a_1-s_1)+a_1}\cos\beta, \\
\Delta_2 = \dfrac{2s_1a_1}{s_1+a_1}\cos\alpha, \\
\Delta_3 = \dfrac{2(s_1-a_1)(a_2-a_1)}{(s_1-a_1)+(a_2-a_1)}\cos\beta, \\
\Delta_4 = \dfrac{2(a_2-s_1)(a_2-a_1)}{(a_2-s_1)+(a_2-a_1)}\cos\gamma, \\
\Delta_5 = \dfrac{2(1-s_1)(1-a_2)}{(1-s_1)+(1-a_2)}\cos\alpha, \\
\Delta_6 = \dfrac{2(s_1-a_2)(1-a_2)}{(s_1-a_2)+(1-a_2)}\cos\gamma.
\end{cases} \tag{3}$$

Для треугольных биллиардов с рациональными углами существует интеграл движения, выражающий конечность максимального числа $2N$ возможных направлений, под которыми будет отражаться любой начальный луч. Это число определяется наименьшим общим кратным знаменателей q_i взаимнопростых рациональных дробей, через которые выражаются углы треугольника, $\pi(p_i/q_i)$. В координатах s_1, s_2 многолистный интеграл движения выражается набором инвариантных уравнений:

$$\{(s_2-a_*)/(a^*-s_1) = k_m\}_{m=-N}^{N} = \mathrm{inv}, \tag{4}$$

где a_* и a^* – координаты вершин треугольника, которые лежат, соответственно, слева от конца и справа от начала луча при положительном обходе периметра. Подставляя (4) в (2), получим, что для рационального треугольника биллиардное отображение оказывается кусочно-линейным.

Существует три типа треугольных биллиардов: *рациональные* (все углы соизмеримы с π), *иррациональные* (все углы несоизмеримы с π) и *смешанные* (только один угол соизмерим с π). Случай рационального треугольного биллиарда соответствует регулярной (квазипериодической) динамике (рис. 2). Фазовый портрет биллиарда расслаивается на семейства инвариантных отрезков. Каждое семейство содержит ровно N компонент и зависит только от выбора начального угла отражения или направления луча. Уравнения для этих отрезков являются интегралами движения.

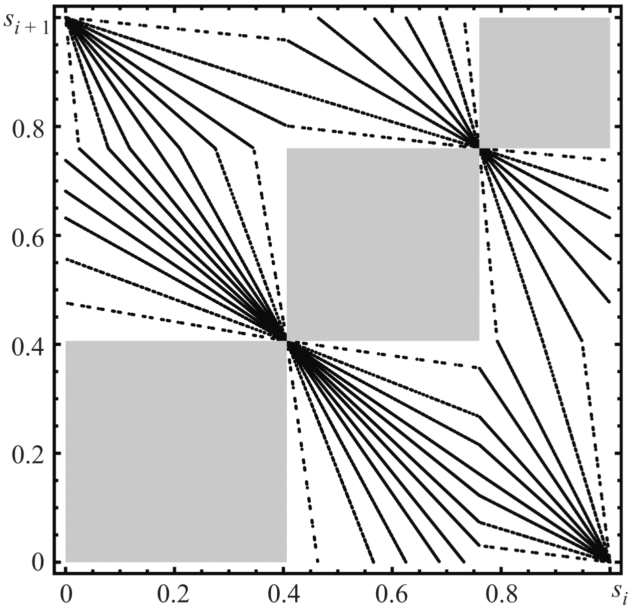

Рис. 2. Фазовый портрет рационального биллиарда $(2\pi/3, \pi/5)$. Показана одна траектория с начальной точкой $(s_1 = 0.13, s_2 = 0.85)$ длиной в $1.5 \cdot 10^4$ итераций. Полное число инвариантных компонент $4N = 60$

Фазовый портрет иррационального треугольного биллиарда демонстрирует черты хаоса (рис. 3). Нетривиальные эргодические компоненты отсутствуют. Любая непериодическая фазовая траектория всюду плотно заполняет все доступное фазовое пространство. Особые (выходящие из вершин) и диагональные (соединяющие пару вершин) траектории также плотно заполняют фазовое пространство.

Фазовый портрет смешанного треугольного биллиарда (см. рис. 4) на начальном этапе эволюции напоминает фазовый портрет рационального биллиарда. Однако при достаточно большом числе отражений он неотличим от фазового портрета иррационального биллиарда. Динамика у смешанного биллиарда переходная. В асимптотическом пределе бесконечного числа отражений, $n \to \infty$, она также является хаотической.

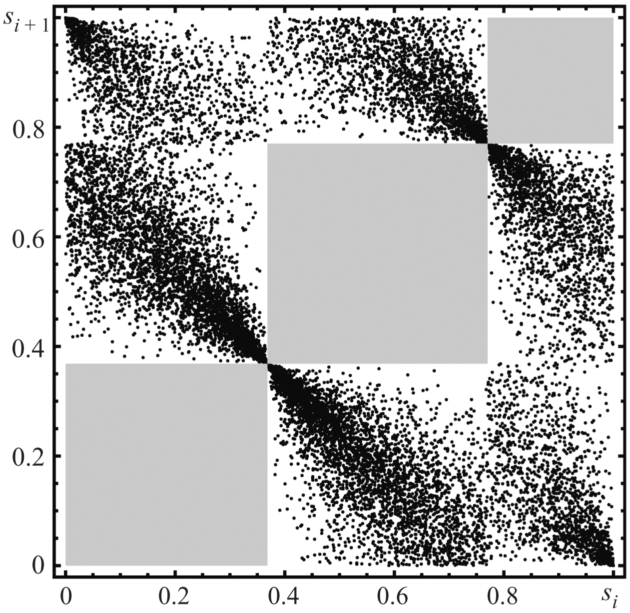

Рис. 3. Фазовый портрет иррационального биллиарда $(\sqrt{3} - 3/5, 3/5)$. Показана типичная траектория с начальной точкой $(s_1 = 0.1, s_2 = 0.9)$ длиной в $1.5 \cdot 10^4$ итераций

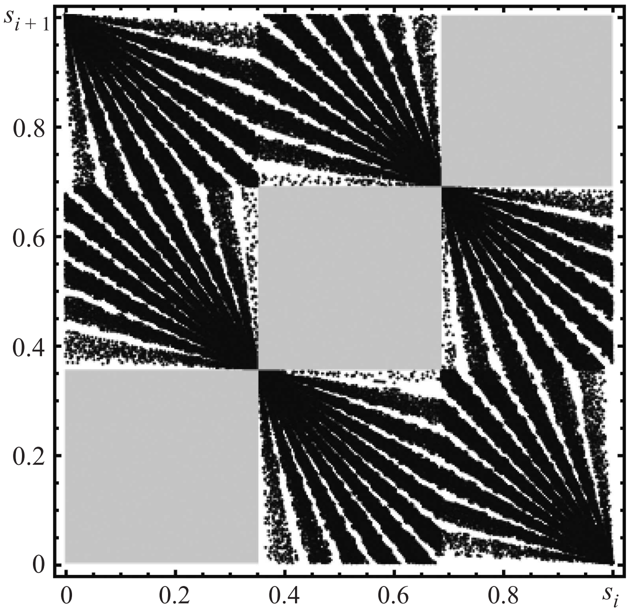

Рис. 4. Фазовый портрет смешанного прямоугольного биллиарда $(\pi/2, \sqrt{2}/3)$. Показана траектория с начальной точкой $(s_1 = 0.08, s_2 = 0.8)$ длиной в $2 \cdot 10^5$ итераций

Энтропия Колмогорова–Синая в любых многоугольных биллиардах равна нулю (см., например, [4]). Численный анализ подтверждает, что показатель Ляпунова здесь также строго равен нулю. Следовательно, сильный хаос в таких системах отсутствует. Вместе с тем фазовые портреты иррациональных и смешанных треугольных биллиардов в значительной мере напоминают фазовый портрет системы с динамическим хаосом. При этом экспоненциальное расхождение первоначально близких траекторий отсутствует.

3. Возникает вопрос: в силу каких причин возможно появление хаотических свойств в треугольных биллиардах? Привычные механизмы хаотизации из-за рассеяния лучей в биллиардах Синая [2] или дефокусировки в биллиардах Бунимовича [3, 10] здесь отсутствуют. Кривизна всех участков границы равна нулю (кроме вершин многоугольника, где она обращается в бесконечность). Поэтому пучок первоначально близких лучей при отражениях от границы не изменяет своего углового размера. Параллельный пучок при отражениях сохраняет не только параллельность, но и ширину. Обычные критерии возникновения хаоса для биллиардов с кусочно-гладкой границей здесь неприменимы. Единственным механизмом, который может отвечать за возникновение хаоса в треугольных биллиардах, является перманентное разрезание пучков лучей при многократных отражениях от границы.

Допустим, что параллельный пучок лучей попадает в какую-нибудь вершину, в которой пересекаются две стороны треугольника. Пусть для простоты пучок влетает симметрично биссектрисе образованного ими угла. Тогда одна половина пучка отразится от одной стороны, а другая – от другой. Ширина каждого подпучка окажется вдвое меньше ширины исходного пучка. Легко проверить, что после отражения подпучки будут повернуты друг относительно друга на угол

$$\Delta\varphi' = 2\alpha_0, \tag{5}$$

где $0 < \alpha_0 < \pi$ – величина угла, в котором происходит разрезание. Следовательно, за единицу дискретного времени, т.е. за одно отражение, первоначально близкие траектории разойдутся на конечное угловое расстояние. При последующих отражениях ширина и относительный поворот подпучков не изменяются вплоть до очередного их разрезания в какой-нибудь из вершин. Соотношение (5) сохраняется при разрезании любого несимметричного или непараллельного пучка, например *центрального пучка*, состоящего из сходящихся или расходящихся в одной точке лучей (или их продолжений за границами биллиарда). При этом угловой размер центральных пучков также изменяется только при разрезаниях. Линейные размеры пучков, т.е. расстояния между траекториями лучей, всегда изменяются с ростом числа отражений не более чем линейным образом. В фазовом пространстве расстояние между инфинитезимально близкими траекториями в момент разрезания изменяется скачком. Таким образом, если для любого типичного пучка разрезание происходит многократно, то в треугольном и даже в многоугольном биллиарде возникают естественный механизм слабого разбегания фазовых траекторий (в моменты разрезаний пучков) и связанный с ним слабый хаос.

4. Покажем, что почти любой пучок в произвольном треугольном биллиарде разрезается. Это проще всего проверить для центральных пучков. Воспользуемся приемом выпрямления траекторий. При этом любой пучок ломаных траекторий в исходном биллиарде становится обычным центральным пучком лучей на плоскости (с тем же самым угловым размером), распространяющимся внутри зеркальной развертки из копий исходного биллиарда, которые получены отражением от соответствующих сторон биллиарда при последовательных отражениях пучка. Если начальный центральный пучок был сходящимся, то выпрямленный пучок вначале сходится, но затем, пройдя фокус, становится расходящимся. Линейный размер выпрямленного расходящегося пучка неограниченно возрастает. Через какое-то число отражений он превысит размер любой из сторон развертки, т.е. размеры сторон биллиарда. Следовательно, пучок в какой-то момент попадет сразу на две стороны развертки. Возвращаясь с помощью обратной процедуры *сворачивания траекторий* к исходному биллиарду, обнаружим, что центральный пучок траекторий терпит разрезание в одной из вершин биллиарда. При этом угловой размер начального центрального пучка может быть произвольным. Если пучок любого размера разрезается хотя бы раз, то затем все образованные из него подпучки разрезаются по разу и т.д. Следовательно, любой такой пучок разрезается бесконечное число раз.

В случае параллельных пучков вначале отметим, что в такие пучки могут объединяться лучи семейства неизолированных (находящихся сколь угодно близко друг к другу) периодических траекторий четного периода. Траектории нечетного периода в треугольных биллиардах остаются изолированными, но порождают периодические пучки траекторий удвоенного периода. Можно показать, что мера всех *периодических пучков* в фазовом пространстве равна нулю, так же как и мера всех периодических орбит и особых траекторий, лучи которых когда-нибудь попадают в вершины биллиарда. Исключим множество периодических пучков и рассмотрим произвольный *типичный* параллельный пучок. Каждый пучок вырезает при отражении от какой-либо из сторон биллиарда некоторый отрезок Δ_i. Назовем его *опорным отрезком* пучка. Длина опорного отрезка $|\Delta_i|$ связана с шириной пучка $|\Delta|$ и углом отражения θ_i выражением $|\Delta_i| = |\Delta| / \cos\theta_i$.

Вначале рассмотрим биллиард в рациональном треугольнике. Возьмем одну из его сторон. Пусть произвольный непериодический пучок конечной ширины отражается под углом θ_0 (отсчитанным от нормали) и вырезает на ней опорный отрезок конечной длины $|\Delta_0|$, меньшей длины стороны. В противном случае пучок сразу разрезается, так как содержит особый луч, попадающий в вершину угла, лежащего напротив выбранной стороны. Допустим противное. Пусть пучок никогда не разрезается при отражениях в биллиарде. Непрерывность пучка означает, что при отражениях сохраняются ширина и односвязность опорного отрезка, а траектории всех лучей пучка параллельны друг другу. Координаты точек опорного отрезка при итерациях изменяются на одну и ту же величину, $s_x^{(0)} - s_y^{(0)} = s_x^{(n)} - s_y^{(n)}$, где x, y – любая пара лучей пучка, n – номер отражения, т.е. опорный отрезок смещается при отражениях как целое. Воспользуемся известной теоремой Пуанкаре о возвращении (в применении к биллиардам, см., например, [9]). Найдется такое число отражений $n = N_1 < \infty$, после которого центральный луч пучка (середина опорного отрезка) вернется на заданную сторону в любую окрестность исходного состояния. Число отражений для возврата остальных лучей пучка будет точно таким же, так как пучок по предположению непрерывен. Поскольку треугольник – рациональный и углы принимают дискретный набор значений, условие возвращения пучка сколь угодно близко к своему начальному направлению означает, что в действительности каждый луч пучка при таком возвращении отражается под одним и тем же углом $\theta_1 = \theta_0$. Новое положение центрального луча на опорном отрезке Δ_1 определяется координатой $s_c^{(1)} = s_c^{(0)} \pm \varepsilon$. Выберем $0 \le \varepsilon < |\Delta_0|/3$. Пусть для определенности s_c сдвигается вправо (при принятом направлении обхода периметра), т.е. $s_c^{(1)} = s_c^{(0)} + \varepsilon$. (Противоположный случай рассматривается аналогично.) Это значит, что при возвращении опорный отрезок Δ_1 сдвигается как целое относительно исходного положения Δ_0 вправо на величину $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Случай $\varepsilon = 0$, когда опорные отрезки совпадают, мы исключаем, так как тогда пучок был бы периодическим. Новое положение левой/правой границы опорного отрезка $s_{L,R}^{(1)} = s_{L,R}^{(0)} + \varepsilon$. Продолжим эволюцию пучка. После $n = N_2$ отражений произойдет второй возврат пучка к своему положению вблизи Δ_1. При этом центральный луч, выходящий при первом возврате из точки $s_c^{(1)}$, одновременно является внутренним лучом предыдущего пучка с той же самой координатой $s_{in}^{(0)} = s_c^{(0)} + \varepsilon < s_R^{(0)}$ и углом отражения θ_0. Поэтому для него $N_2 = N_1$. В силу непрерывности пучка очередное смещение опорного отрезка происходит в том же самом направлении (вправо) и с тем же самым $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$. Сохраняется также и угол отражения $\theta_2 = \theta_1 = \theta_0$. Повторяя процесс до бесконечности, получим монотонную последовательность $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ сдвигов опорного отрезка на конечную величину $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера возврата, их суммарная длина $\sum_k |\Delta_k|$ заведомо превысит длину любой стороны треугольника. Полученное противоречие означает, что происходит разрезание исходного пучка. Разрезание произойдет именно в той вершине, к которой смещается построенная последовательность опорных отрезков при возвращениях. Перебирая разные стороны биллиарда и разные варианты возвратов, получим, что параллельный пучок может разрезаться во всех углах (вершинах) рационального биллиарда.

Несложно распространить этот вывод на случай разрезания в биллиардах с углами, несоизмеримыми с π. Типичный параллельный пучок разрезается хотя бы раз в вершинах треугольного биллиарда. Следовательно, он разрезается и бесконечное число раз, поскольку все получаемые при разрезании подпучки затем также разрезаются. Немного обобщив рассуждения, их можно повторить для разрезания в многоугольных биллиардах. Произвольный однопараметрический пучок лучей можно разложить на элементарные пучки, центральные и параллельные. Поэтому эффект разрезания в произвольных многоугольных биллиардах имеет место для всех типичных пучков лучей.

5. Если в треугольных биллиардах всегда присутствует разрезание, то почему не все они являются хаотическими? Причина состоит в том, что наряду с разрезанием в этих биллиардах всегда имеется противоположный эффект *склеивания пучков лучей*. Разрезание носит абсолютный характер. Оно не зависит ни от геометрии треугольника, ни от параметров пучка. Склеивание же пучков, как оказывается, существенно зависит от взаимной геометрии углов биллиарда и их рациональной соизмеримости с

π. Легко понять, что в том случае, когда склеивание подавляет разрезание пучков, хаоса не будет.

Рассмотрим склеивание в углах, рационально соизмеримых с π. Проще всего оказывается случай, когда угол равен π/n, где $n \geq 2$ – натуральное, или $2\pi/n$, где $n \geq 3$ – нечетное. Снова используем выпрямление траекторий. Распространение параллельного пучка после разрезания в таком угле продемонстрировано на рис. 5. Разрезание пучка происходит

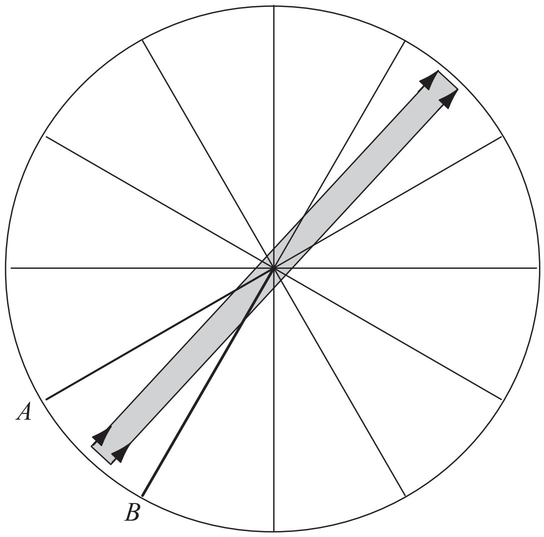

Рис. 5. Склеивание выпрямленного пучка после разрезания в угле вида π/n. Зеркальная развертка замыкается после конечного числа отражений

вдоль особого луча, попадающего прямо в вершину биллиарда. Два новых подпучка после разрезания отражаются от разных сторон угла. Поэтому вместо одной возникают две зеркальные развертки с противоположными направлениями вращения. Так как угол соизмерим с π, после суммарного $n = m_- + m_+$ числа поворотов из $m_- = [n]$ поворотов по часовой стрелке и $m_+ = n$ поворотов против часовой стрелки полная зеркальная развертка точно замыкается, совершив оборот на угол 2π. Выпрямленные подпучки на выходе из угла попадают в один и тот же сектор полной развертки и склеиваются на берегах разреза вдоль продолжения особого луча. В самом биллиарде происходит склейка вылетающих подпучков вдоль особого луча, вылетающего из вершины угла под направлением, противоположным тому, которое было у исходного пучка. Таким образом, разрезание пучков в подобных углах полностью компенсируется склеиванием на выходе и его можно не учитывать в динамике биллиарда. Существуют треугольники, в которых все углы имеют такой тип (например, равносторонний или равнобедренный прямоугольный). В подобных биллиардах любое разрезание, по сути, можно вообще не учитывать. Динамика лучей в них, естественно, является регулярной.

Общий случай для углов вида $\pi(p/q)$, где $p > 2$ и $q > 3$ – взаимно-простые натуральные числа, рассматривается аналогично. Однако здесь после разрезания пучка его полная зеркальная развертка при одном обходе на 2π не замыкается. В результате в самом биллиарде подпучки выходят из угла под разными углами, т.е. разрезание сохраняется. Вместе с тем после дальнейших отражений подпучки будут неоднократно возвращаться в заданный угол (согласно теореме о возвращении Пуанкаре) с очередным разрезанием. При этом не исключена возможность их дополнительного разрезания в других вершинах, что затрудняет анализ. Важно, что число допустимых направлений, под которыми подпучки исходного параллельного пучка возвращаются в заданный угол или выходят из него, никогда не превосходит $4N$ (где N – наименьший общий знаменатель дробей, через которые выражаются углы треугольника). Последнее является следствием существования интеграла движения. Вместе с тем разрезание можно повторять неограниченное число раз. Для каждого поколения подпучков после разрезания их полное число удваивается. Число подпучков экспоненциально растет с ростом числа возвратов и разрезаний. В бесконечной последовательности подпучков после некоторого конечного числа отражений обязательно появляется по меньшей мере пара подпучков, вылетающих из угла после разрезания в одном и том же направлении. Это как раз и означает, что соответствующие подпучки склеиваются. Прообразы склеенных подпучков можно выбросить из исходного пучка. При этом его полная ширина уменьшится, хотя суженный пучок может оказаться многосвязным. Продолжая итерации, можно добиться склеивания другой пары подпучков, полученных при разрезаниях из исходного пучка, и т.д. Нетрудно доказать, что для рациональных треугольников общего вида фазовый объем множества типичных параллельных пучков, в которых при многократных разрезаниях остаются несклеенные подпучки, в пределе бесконечного числа отражений становится равным нулю. Следовательно, в данном случае склеивание подавляет разрезание почти всех пучков лучей в асимптотическом пределе. Динамика в рациональных треугольных биллиардах является регулярной. Однако поведение траекторий, сопутствующее последовательности разрезаний и склеиваний, может оказаться достаточно сложным.

Теперь рассмотрим, что происходит в треугольных биллиардах, у которых имеются углы, рационально несоизмеримые с π. В таких биллиардах угловая координата типичного луча принимает континуум значений. Число допустимых направлений становится бесконечным, $N = \infty$. После разрезания у инфинитезимальных подпучков всякий раз появляется возможность уходить друг от друга. В конфигурационном пространстве разрезание пучков становится необратимым. Два произвольных пучка во время своей эволюции могут склеиться хотя бы один раз. Это соответствует разрезанию склеенного пучка при его движении в обратном времени, $t \to -t$. Однако затем образованный пучок, многократно отражаясь, вновь разрезается в биллиарде. После этого разрезанные пучки никогда больше не склеиваются, а только разрезаются до бесконечности на подпучки сколь угодно малого размера. В фазовом пространстве прообразы особых лучей, попадающих в вершины биллиарда, не заполняют отдельные инвариантные отрезки, а покрывают все доступное фазовое пространство. Образы типичного начального фазового отрезка (пучка лучей) при итерациях отображения (1) из-за разрезаний также всюду плотно заполняют фазовое пространство. Это и является причиной появления слабых хаотических свойств в иррациональных и смешанных треугольных биллиардах.

6. Предложенный подход позволяет унифицировать описание динамики в треугольных биллиардах, сводя ее к исследованию двумерных отображений на торе со специальной дробно-рациональной инволюцией. В дальнейшем интересно проследить топологию разрезания и склеивания в многоугольных биллиардах разного типа. Это позволит выработать общие физические критерии возникновения слабого хаоса в динамических системах с упругими отражениями. Кроме того, обнаруженный механизм разрезания пучков лучей в биллиардах с границей почти всюду нулевой кривизны может оказаться полезным при описании различных явлений в акустических, оптических и электронных системах биллиардного типа.

1. N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic Billiards*, AMS, Providence RI, USA, 2006, 316 p.
2. Я. Г. Синай, Докл. Акад. наук СССР **153**(6), 1261 (1963).
3. L. A. Bunimovich, Commun. Math. Phys. **65**(3), 295 (1979).
4. E. Gutkin, J. Stat. Phys. **83**, 7 (1996).
5. S. Tabachnikov, *Handbook of Dynamical Systems* (ch. 13), v. 1A, North-Holland, 2002, p. 1015.
6. G. Casati and T. Prosen, Phys. Rev. Lett. **83**, 4729 (1999).
7. С. В. Найденов, В. В. Яновский, Теор. и Мат. Физика **127**(1), 500 (2001); **129**(1), 116 (2001).
8. С. В. Найденов, В. В. Яновский, А. В. Тур, Письма в ЖЭТФ **75**(8), 499 (2002).
9. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, *Математические бильярды. Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики*, М.: Наука, 1990, 288 с.
10. Л. А. Бунимович, ЖЭТФ **89**, 1452 (1985).