Письма в ЖЭТФ, том 98, вып. 10, с. 670 – 675

Затухание спиральности в однородной турбулентности

А. О. Левшин[+], О. Г. Чхетиани[+*1)]

[+]Институт физики атмосферы им. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия

[*]Институт космических исследований РАН, 117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2013 г.

После переработки 7 октября 2013 г.

Рассмотрено самоподобное затухание спиральности в однородной турбулентности с учетом интегральных инвариантов вида $\int\limits_0^\infty r^m \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle dr = I_m^h$ (где $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$, $r = |\mathbf{r}|$). Показано, что, помимо спиральных аналогов инвариантов Лойцянского ($m = 4$) и Биркгофа–Саффмена ($m = 2$), связанных с законами сохранения импульса и момента импульса, возможны интегральные инварианты с $m = 3$ как для спиральности, так и для энергии. Спиральность всегда затухает быстрее энергии. Ее показатели затухания лежат в пределах от $-3/2$ до $-5/3$ против интервала от $-6/5$ до $-10/7$ у энергии.

DOI: 10.7868/S0370274X13220049

1. Самоподобный режим затухания турбулентности связан с интегральными инвариантами, определяемыми продольной парной корреляционной функцией поля скорости [1] ($u_L = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $r = |\mathbf{r}|$) и имеющими вид

$$\int\limits_0^\infty r^m B_{LL}(r)\, dr = I_m. \tag{1}$$

Теоретические оценки и эмпирические наблюдения в многочисленных лабораторных и численных экспериментах указывают на то, что порядковый номер инварианта m связан с наклоном спектра энергии в крупномасштабной (“инфракрасной”) области $E(k) \sim k^m$ [2, 3].

Инвариантность (1) при $m = 4$ показал Лойцянский [4]. Необходимым условием инвариантности является поведение корреляционных функций $B_{LL}(r)$ и $B_{LL,L}(r) = \left\langle u_L^2(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \right\rangle$ при $r \to \infty$ как $O\left(r^{-5}\right)$ и $O\left(r^{-4}\right)$ соответственно.

Учитывая инвариант Лойцянского и гипотезу самоподобия в виде $B_{LL}(r,t) = v^2(t) f[r/l(t)]$, $B_{LL,L}(r,t) = v^3 h[r/l(t)]$, Колмогоров получил законы для затухания энергии и роста интегрального масштаба турбулентности [5]:

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-10/7}, \ \frac{l}{l_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{2/7}. \tag{2}$$

Здесь $E_0 = [B_{LL}(0)]^{1/2}$ – интенсивность турбулентности в момент времени $t = t_0$.

Позже инвариантность интеграла Лойцянского стала оспариваться [6]. К тому же во многих численных расчетах свободного затухания турбулентности наблюдался степенной рост интеграла Лойцянского со временем $\sim t^m$ ($t < 1$) [7]. Лишь относительно недавно было показано [8], что интеграл Лойцянского перестает зависеть от времени в прямом численном моделировании при условии, что расчетная область много больше интегрального масштаба турбулентности.

Рассматривая поле турбулентности, создаваемой в начальный момент распределением произвольных импульсных сил, Саффман показал инвариантность (1) при $m = 2$ [9]. С учетом этого инварианта, впервые рассмотренного в [10], был получен закон затухания для энергии в виде

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-6/5}, \ \frac{l}{l_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{2/5}. \tag{3}$$

В пользу затухания (3) свидетельствовала часть экспериментальных данных, собранных в [11], хотя там были представлены и результаты, более близкие к затуханию турбулентности по Колмогорову (2).

2. Одним из наблюдаемых проявлений нарушения зеркальной симметрии в природных системах является присутствие спиральных свойств в корреляционных свойствах турбулентных движений. Спиральность течения определяется как скалярное произведение скорости и завихренности. Наряду с энергией спиральность является квадратичным инвариантом движения идеальной жидкости. Она наблюдается как в лабораторных, так и в природных гео-

1)e-mail: lgg@ifaran.ru

физических и астрофизических течениях. Именно спиральные свойства турбулентности, связанные с накоплением определенного знака момента импульса в мелкомасштабных движениях, являются одним из основных источников генерации и поддержания магнитных полей во вращающихся объектах. Повышенной спиральностью обладают многие когерентные вихревые структуры в широком диапазоне масштабов. В работе [12] был получен и исследован аналог уравнения Кармана– Ховарта [1], описывающего динамику парных и тройных корреляций турбулентного поля скорости, для спиральности:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(r) = 2\frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial}{\partial r}C(r)\right) + \frac{2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3 S\left(r\right)\right]. \quad (4)$$

Здесь $C(r)$ связано с антисимметричной частью парного корреляционного тензора скоростей:

$$b_{ij} = \langle u_{1i}u_{2j}\rangle = A\left(r\right)\delta_{ij} + B\left(r\right)r_i r_j + C\left(r\right)\varepsilon_{ijl}r_l, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}\left(\mathbf{x}+\mathbf{r}\right)$. Нетрудно показать, что

$$\langle \mathbf{u}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{u}\rangle = -6C\left(0\right). \quad (6)$$

Функция $S\left(r\right)$ входит как коэффициент в асимметричную часть двухточечного корреляционного тензора скоростей третьего ранга и отлична от нуля лишь при наличии спиральности:

$$b_{il,t} = \langle u_{1i}u_{1l}u_{2t}\rangle = D(r)\delta_{il}n_t + E(r)(\delta_{it}n_l + \delta_{lt}n_i) + \\ + F(r)n_i n_l n_t + S(r)(\varepsilon_{ilm}n_m n_t + \varepsilon_{tlm}n_m n_i). \quad (7)$$

В [12] было показано, что в инерционном интервале $S\left(r\right)$ приобретает вид

$$S(r) = \frac{\bar{\eta}}{60}r^2, \quad (8)$$

что является аналогом "закона 4/5", связывающего продольные тройные корреляции скорости с диссипацией энергии [13]. Для смешанных корреляционных функций $h_{ij} = \langle u_{1i}\omega_{2j}\rangle$ уравнения Кармана–Ховарта имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} = \varepsilon_{jst}\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_s}\left[b_{il,t} - b_{lt,i}\right] + 2\nu \triangle h_{ij}, \quad (9)$$

где

$$h_{ij}\left(r\right) = -\left(2C\left(r\right) + r\frac{\partial C\left(r\right)}{\partial r}\right)\delta_{ij} + \\ + \frac{\partial C\left(r\right)}{\partial r}\frac{r_i r_j}{r} - \left(5B\left(r\right) + r\frac{\partial B\left(r\right)}{\partial r}\right)\varepsilon_{ijl}r_l. \quad (10)$$

Учитывая свойства уравнения (4), рассмотрим возможные интегральные турбулентные инварианты, связанные со спиральностью.

3. Рассмотрим случай $m = 4$. Из (4) следует аналог интеграла Лойцянского для спиральности [12]:

$$\Lambda_h = \int_0^\infty r^4 C\left(r\right)dr = \mathrm{const}. \quad (11)$$

Интеграл (11) сходится, если $\frac{\partial}{\partial r}C(r) \to 0$ так же быстро, как $r^{-4} \to 0$, при $r \to \infty$, а $S\left(r\right) \to 0$ так же быстро, как $r^{-3} \to 0$, при $r \to \infty$.

Будем рассматривать самоподобие затухания для корреляционной функции спиральности $C(r)$ в виде

$$\frac{C(r)}{\chi} = f\left(\frac{r}{l_\chi}\right). \quad (12)$$

Здесь $\chi = C(0)$, l_χ – интегральный масштаб спиральности. Входящая в (4) антисимметричная часть тензора третьего ранга $S(r)$ пропорциональна кубу скорости. Из спиральности можно построить единственную величину с размерностью скорости:

$$u_h \sim Cl_\chi \sim \left(|\chi|\, l_\chi\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Действительно, из (5) можно получить величину, эквивалентную квадрату скорости и связанную со спиральной частью коррелятора:

$$|\langle[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2]\rangle\,\mathbf{n}| = |\langle \mathbf{u}_1 \cdot [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n}]\rangle| = 2\left|C\left(r\right)\right| r. \quad (14)$$

В частности, выражение (14) указывает на возможность достаточно простого определения величины спиральности при условиях однородности турбулентности из двух(много)точечных измерений без непосредственных вычислений пространственных производных поля скорости. Выбрав в качестве одной из осей линию, соединяющую точки измерений скорости $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, получим

$$\langle \mathbf{u}_1 \cdot [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n}]\rangle = \langle u_{1y}u_{2z}\rangle - \langle u_{1z}u_{2y}\rangle.$$

Отсюда, например, для данных акустического анемометра, взятых на интервале наблюдений с постоянным значением среднего ветра, воспользовавшись гипотезой Тэйлора, можно получить оценки для пространственной корреляционной функции спиральности $C\left(r\right)$.

Таким образом, закон автомодельности для $S(r)$ принимает вид

$$\frac{S(r)}{l_\chi^{3/2}\chi^{3/2}} = h\left(\frac{r}{l_\chi}\right). \quad (15)$$

Подставив (12) и (15) в (4) и обозначив $\zeta = r/l_\chi$, получим

$$\frac{\nu}{l_\chi^{3/2}\chi^{1/2}}\left(f''(\zeta)+4\frac{f'(\zeta)}{\zeta}\right)-\frac{1}{2}\frac{l_\chi^{1/2}}{\chi^{3/2}}\frac{d\chi}{dt}f(\zeta)+ +\frac{1}{2}\frac{1}{l_\chi^{1/2}\chi^{1/2}}\frac{dl_\chi}{dt}\zeta f'(\zeta)+\left(3\frac{h(\zeta)}{\zeta^2}+\frac{h'(\zeta)}{\zeta}\right)=0.$$

При больших числах Рейнольдса, $l_\chi^{3/2}\chi^{1/2}/\nu \gg 1$, имеем

$$\left(3\frac{h(\zeta)}{\zeta^2}+\frac{h'(\zeta)}{\zeta}\right)=\frac{1}{2}\frac{l_\chi^{1/2}}{\chi^{3/2}}\frac{d\chi}{dt}f(\zeta)-\frac{1}{2}\frac{1}{l_\chi^{1/2}\chi^{1/2}}\frac{dl}{dt}\zeta f'(\zeta). \tag{16}$$

Отсюда

$$\frac{l_\chi^{1/2}}{\chi^{3/2}}\frac{d\chi}{dt}=c,\ \frac{1}{l_\chi^{1/2}\chi^{1/2}}\frac{dl_\chi}{dt}=kc. \tag{17}$$

Безразмерные величины kc и c не зависят от ζ. Из (16) и общих свойств функции $f(\zeta)$ следует, что величины kc и c являются постоянными. Из (17) следует

$$\left(\frac{l_\chi}{l_0}\right)=\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^k, \tag{18}$$

что приводит к временным зависимостям

$$\frac{\chi}{\chi_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{2/(k-1)},\ \frac{l_\chi}{l_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{2k/(k-1)}. \tag{19}$$

Из аналога инварианта Лойцянского для спиральности (11) и (12) получаем

$$\Lambda_h=\chi\int_0^\infty f\left(\frac{r}{l_\chi}\right)r^4dr=\chi l_\chi^5\int_0^\infty f(\zeta)\zeta^4d\zeta.$$

Отсюда

$$l_\chi=a\left(\frac{\Lambda_h}{\chi}\right)^{1/5},\ a=\int_0^\infty f(\zeta)\zeta^4d\zeta. \tag{20}$$

Из (20) следует $k=-1/5$, что дает для затухания спиральности

$$\frac{\chi}{\chi_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{-5/3},\ \frac{l_\chi}{l_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{1/3}. \tag{21}$$

4. Рассмотрим случай $m=2$. Для $h\,(r)$ имеем

$$h\,(r)=-\frac{1}{2}h_{ii}\,(r)=3C\,(r)+r\frac{\partial C\,(r)}{\partial r}. \tag{22}$$

Непосредственное вычисление $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty r^2h\,(r)\,dr$ с учетом уравнения (4) и условия сходимости на бесконечности для $S\,(r)$ и $C\,(r)$ как $O\left(r^{-2}\right)$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty r^2h\,(r)\,dr=\left(6rS\,(r)+2r^2\frac{\partial S\,(r)}{\partial r}\right)\Big|_0^\infty+ +\nu\left(8r^2\frac{\partial C\,(r)}{\partial r}+2r^3\frac{\partial^2C\,(r)}{\partial r^2}\right)\Big|_0^\infty=0.$$

Отсюда следует аналог инварианта Биркгофа–Саффмена для спиральности:

$$\int_0^\infty r^2h\,(r)\,dr=\lim_{r\to\infty}\left[r^3C\,(r)\right]=\Lambda_h^S=\text{const}. \tag{23}$$

Используя представление (12), из (23) получим $\Lambda_h^S = \chi l_\chi^3\lim_{\zeta\to\infty}\left[f(\zeta)\zeta^3\right]$. С учетом (18) имеем $k=-1/3$. Соответственно спиральность с инвариантом вида (23) будет затухать как

$$\frac{\chi}{\chi_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{-3/2},\ \frac{l}{l_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{1/2}. \tag{24}$$

5. Рассмотрим случай $m=3$. Покажем, что для спиральности, помимо аналогов инвариантов Лойцянского и Биркгофа–Саффмена, можно построить еще один интегральный инвариант, связанный с определенным выше параметром (14). Рассмотрим величину

$$h'\,(r)=\frac{1}{2}\left(\langle\mathbf{u}_1\cdot[\mathbf{u}_2\times\mathbf{n}]\rangle-\langle\mathbf{u}_1\boldsymbol{\omega}_2\rangle(\mathbf{nr})\right)= =\left(4C\,(r)+r\frac{\partial C\,(r)}{\partial r}\right)r.$$

Для ее интеграла при условии затухания на бесконечности $S\,(r)$ и $C\,(r)$ как $O(r^{-3})$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty r^2h'\,(r)\,dr=\left(6r^2S\,(r)+2r^3\frac{\partial S\,(r)}{\partial r}\right)\Big|_0^\infty+ +\nu\left(8r^3\frac{\partial C\,(r)}{\partial r}+2r^4\frac{\partial^2C\,(r)}{\partial r^2}\right)\Big|_0^\infty=0,$$

что дает нам новый тип инварианта для спиральности в затухающей турбулентности:

$$\int_0^\infty r^2h'\,(r)\,dr=\lim_{r\to\infty}\left[r^4C\,(r)\right]=\Lambda_h^U=\text{const}. \tag{25}$$

Из (25) получаем условие $\Lambda_h^U=\chi l_\chi^4\lim_{\zeta\to\infty}\left[f(\zeta)\zeta^3\right]$. Отсюда $k=-1/4$. Соответственно спиральность будет затухать как

$$\frac{\chi}{\chi_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{-8/5},\qquad \frac{l_\chi}{l_0}=\left(\frac{t+t_0}{2t_0}\right)^{2/5}. \tag{26}$$

Отметим, что аналогичный инвариант существует и для поля скорости:

$$\int_0^\infty r^3 B_{LL}(r)\, dr = I_3. \qquad (27)$$

Закон затухания в этом случае будет иметь вид

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-4/3}, \ \frac{l_\chi}{l_0} = \left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{1/3}. \qquad (28)$$

Закон затухания (28) рассматривался, в частности, в [14] как предельный случай.

Заметим, что показатель затухания энергии $-4/3$ для инварианта I_3 весьма близок к части экспериментальных данных, собранных в [11], и данных из [15].

6. Как отмечено в [16], инвариант Лойцянского в турбулентной жидкости связан с законом сохранения момента импульса.

Законы сохранения импульса и момента импульса имеют, соответственно, вид [17]

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})\, d\mathbf{r} = \int \mathbf{u} d\mathbf{r} = \mathrm{const}, \qquad (29)$$

$$\mathbf{H} = \int (\mathbf{x}\times\mathbf{u})\, d\mathbf{r} = \frac{1}{3}\int \mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})\, d\mathbf{r} = \mathrm{const}. \qquad (30)$$

Интеграл Лойцянского связан с моментом импульса следующим образом [18]:

$$\Lambda = \left\langle \mathbf{H}^2\right\rangle /V = -\int \mathbf{r}^2 \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^2\right\rangle d\mathbf{r}. \qquad (31)$$

Интеграл Биркгофа–Саффмана связан с импульсом как [18]

$$\Lambda_S = \left\langle \left[\int \mathbf{u} d\mathbf{r}\right]^2 \right\rangle \frac{1}{V} = -\int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^2 \right\rangle d\mathbf{r} = \left\langle \mathbf{L}^2 \right\rangle \frac{1}{V} =$$
$$= -\frac{1}{6}\int \mathbf{r}^2 \left\langle \boldsymbol{\omega}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 \right\rangle d\mathbf{r} = 4\pi u^2 \lim_{r\to\infty}\left[r^3 f\right]. \qquad (32)$$

Покажем, что аналог интеграла Лойцянского для спиральности можно получить из законов сохранения импульса и момента импульса методом, описанным в [1], и он имеет вид

$$\Lambda^h = c\frac{\langle \mathbf{HL}\rangle}{V}, \qquad (33)$$

где c – коэффициент.

Действительно, для среднего от произведения импульса и момента импульса имеем

$$\frac{\langle \mathbf{HL}\rangle}{V} = \left\langle \int \mathbf{u} d\mathbf{r}' \int (\mathbf{x}\times\mathbf{u})\, d\mathbf{r} \right\rangle \frac{1}{V} =$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}\int (\mathbf{x}'\times\boldsymbol{\omega}')\, d\mathbf{r}' \int (\mathbf{x}\times\mathbf{u})\, d\mathbf{r} \right\rangle \frac{1}{V} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^{3/2}}{\pi^{3/2}}\rho^2 \int\int \left[\mathbf{x}\mathbf{x}' h_{jj}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - \right.$$
$$\left. - x_i x_j' h_{ij}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\right] e^{-\alpha\left(x^2+x'^2\right)} d\mathbf{x} d\mathbf{x}'. \qquad (34)$$

Учитывая структуру корреляционного тензора h_{ij}, получим

$$\frac{\langle \mathbf{HL}\rangle}{V} = -2^{3/2}\pi\rho^2 \lim_{\alpha\to 0}\int e^{-\frac{\alpha}{2}r^2} r^4 C(r)\, dr =$$
$$= -2^{3/2}\pi\rho^2\Lambda^h. \qquad (35)$$

Выражение (35) выявляет связь между сохранением аналога интеграла Лойцянского для спиральности при затухании турбулентности и законами сохранения импульса и момента импульса.

Инвариант Биркгофа–Саффмана для спиральности имеет вид

$$I_2^h = \Lambda_S^h = -\frac{1}{2V}\left\langle \int \mathbf{u} d\mathbf{r} \int \boldsymbol{\omega} d\mathbf{r} \right\rangle =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^2 \right\rangle d\mathbf{r}. \qquad (36)$$

Инварианты I_3 и I_3^h имеют вид

$$I_3 = \int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \left[\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{n}\right]\right\rangle d\mathbf{r} = \int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_N^2 \right\rangle d\mathbf{r}, \qquad (37)$$

$$I_3^h = \int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \left[\mathbf{u}^2 \times \mathbf{n}\right]\right\rangle d\mathbf{r} = \int \left\langle \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}_N^2 \right\rangle d\mathbf{r}. \qquad (38)$$

7. В заключение приведем результаты по затуханию энергии и спиральности в сравнительной таблице 1 (в скобках приводятся временные законы для масштабов l и l_χ).

Таблица 1

Затухание энергии и спиральности

Инвариант	Энергия	Спиральность
I_2 (I_2^h)	$t^{-6/5}$ ($t^{2/5}$)	$t^{-3/2}$ ($t^{1/2}$)
I_3 (I_3^h)	$t^{-4/3}$ ($t^{1/3}$)	$t^{-8/5}$ ($t^{2/5}$)
I_4 (I_4^h)	$t^{-10/7}$ ($t^{2/7}$)	$t^{-5/3}$ ($t^{1/3}$)

Спиральность затухает быстрее, чем энергия. Заметим, что процессы пересоединения, с которыми связано, в частности, укрупнение масштабов вихрей при свободном затухании, сопровождаются интенсивной генерацией мелкомасштабных структур типа мостов и перемычек, обладающих ненулевой спиральностью и быстро диссипирующих [19]. Подобные явления могут способствовать более быстрой диссипации спиральности.

Представленные здесь законы затухания могут быть получены и из соображений размерности. Для этого необходимо связать характерное время затухания или нелинейного взаимодействия со спектром спиральности. В частности, в [20] было показано, что, начиная с определенных масштабов при движении в сторону области диссипации, такое время становится меньше характерного времени, определяемого энергетической частью спектра. Это может объяснять так называемый эффект бутылочного горлышка (*bottleneck effect*).

Отметим, что, как было показано в [21], из уравнений Кармана–Ховарта для поля скорости может следовать бесконечный набор интегральных инвариантов, сохраняющихся при затухании, если выполняются определенные условия на сходимость. Правда, инварианты, отличные от случаев Лойцянского и Биркгофа–Саффмана, здесь связываются с комбинациями пространственных производных высокого порядка от корреляционных функций.

8. Лабораторных экспериментальных данных по затуханию спиральности в настоящее время нет. Известно несколько численных экспериментов. Так, в работе [22] турбулентность со спиральностью исследовалась в рамках квазинормального марковского приближения. В этом приближении третьи моменты заменяются на комбинации парных, умноженные на время релаксации, определяемое спектрами энергии и спиральности. Затухание энергии и спиральности шло здесь примерно с одинаковой скоростью $\sim t^{-1}$.

В работе [23] данные по затуханию энергии не приводятся, а сама спиральность затухает на промежуточных временах как t^{-m} $(-1.71 < m < -1.5)$.

В работе [24] проводилось прямое численное моделирование уравнений Навье–Стокса. Степенные законы затухания здесь заметно отличаются от автомодельных значений. Энергия затухает медленнее спиральности ($t^{-0.38}$ против $t^{-0.71}$).

В расчетах свободного затухания в каскадной модели турбулентности [25], допускающей спиральность, были получены, соответственно, показатели $-0.67, -0.68, -0.72$ для энергии против $-0.80, -1.05, -1.13$ для спиральности (Е.Б. Гледзер, частное сообщение).

В расчетах по затуханию спиральности, приведенных в недавней работе [26], также отсутствуют данные по затуханию энергии. Спиральность же затухает как t^{-m} $(-0.5 < m < -0.34)$.

9. В табл. 2 приводится затухание по времени для "эквивалентных" спиральности и энергии, получаемых из соображений размерности следующим образом:

$$E_{eq} = |\chi|\, l_\chi, \; H_{eq} = E/l. \qquad (39)$$

Можно показать, что эквивалентные энергия и спиральность являются, соответственно, нижними и верхними оценками и следуют из условия положительной определенности корреляционного тензора для поля скорости. Также они совпадают с полными значениями энергии и спиральности течений Громеки–Бельтрами, в которых поле завихренности параллельно полю скорости, $\mathbf{v} = \lambda \mathrm{rot}\mathbf{v}$ [27].

Таблица 2

Затухание "эквивалентных" энергии и спиральности

Инвариант	$E_{eq} = \|\chi\|\, l_\chi$	$H_{eq} = E/l$
I_2 (I_2^h)	t^{-1}	$t^{-8/5}$
I_3 (I_3^h)	$t^{-6/5}$	$t^{-5/3}$
I_4 (I_4^h)	$t^{-4/3}$	$t^{-12/7}$

Интересно отметить, что "эквивалентные" энергии, полученные из спиральных инвариантов I_3^h и I_4^h (Лойцянский), совпадают с затуханием энергии по Биркгофу–Саффмену I_2 и инварианту I_3 для энергии. В то же время затухание "эквивалентных" спиральностей, полученных на основе затухания энергии по Биркгофу–Саффмену I_2 и энергетическому инварианту I_3, совпадает с затуханием с учетом спиральных инвариантов I_3^h и I_4^h (Лойцянского).

Авторы выражают благодарность Е.Б. Гледзеру, Г.С. Голицыну и М.В. Курганскому за интерес к работе и конструктивные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты # 12-05-01008, 12-05-00565 и 12-05-12002-офи-м) и программы # 19 президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках".

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика, ч. 2*, С.-Петербург: Гидрометеоиздат (1996).
2. U. Frisch, *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov,* Cambridge, UK: Cambridge University Press (1996).
3. A. Llor, Europ. J. Mech. – B/Fluids **30**, 480 (2011).
4. Л. Г. Лойцянский, Труды ЦАГИ **440**, 3 (1939).
5. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **31**, 538 (1941).
6. G. K. Batchelor and I. Proudman, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **248**, 369 (1956).
7. J. R. Chasnov, Phys. Fluids A **5**, 2579 (1993).
8. T. Ishida, P. A. Davidson, and Y. Kaneda, J. Fluid Mech. **564**, 455 (2006).
9. P. G. Saffman, Phys. Fluids. **10**, 1349 (1967).

10. G. Birkhoff, Commun. Pure Applied Math. **VII**, 19 (1954).
11. G. Comte-Bellot and S. Corrsin, J. Fluid Mech. **25**, 657 (1966).
12. О. Г. Чхетиани, Письма в ЖЭТФ **63**, 768 (1996).
13. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **32**, 19 (1941).
14. A. Llor, arXiv:physics/0612220v1 [physics.flu-dyn] (2006).
15. Z. Warhaft and J. L. Lumley, J. Fluid Mech. **88**, 659 (1978).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Гидродинамика*, М.: Наука (1986).
17. Ф. Дж. Саффман, *Динамика вихрей*, М.: Научный мир (2000).
18. P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press. (2004).
19. F. Hussain and K. Duraisamy, Phys. Fluids **23**, 021701 (2010).
20. S. Kurien, M. A. Taylor, and T. Matsumoto, Phys. Rev. E **69**, 066313 (2004).
21. J. C. Vassilicos, Phys. Lett. A **375**, 1010 (2011).
22. J. C. Andrė and M. Lesieur, J. Fluid Mech. **81**, 187 (1977).
23. W. Polifke and L. Shtilman, Phys. Fluids A **1**, 2025 (1989).
24. Y. Morinishi, K. Nakabayashi, and S. Ren, JSME Int. Journal Ser. B **44**, 410 (2001).
25. Е. Б. Гледзер, ДАН **419**, 488 (2008).
26. A. Brandenburg and A. Petrosyan, Astron. Nachr. **333**, 195 (2012).
27. О. Ф. Васильев, *Основы механики винтовых и циркуляционных потоков*, М.-Л.: Госэнергоиздат (1958).