Письма в ЖЭТФ, том 98, вып. 12, с. 898 – 902

Неоднородные эластомагнитоэлектрические эффекты в неупорядоченной среде

А. Ф. Кабыченков, Ф. В. Лисовский[1)]

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. Котельникова РАН, 141190 Фрязино, Россия

Поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Методом варьирования термодинамического потенциала неупорядоченной однородной среды по напряженностям электрического и магнитного поля и упругим деформациям получена система нелинейных уравнений для определения основного состояния и анализа возможности существования различных эластомагнитоэлектрических эффектов в присутствии неоднородных внешних воздействий. Показано, что источником внутренних электрических полей могут служить неоднородные деформации, создаваемые гравитационными или центробежными силами.

DOI: 10.7868/S0370274X13240077

Успехи в области синтеза простых и композитных мультиферроиков, а также перспективы их практического использования (см., например, обзор [1]) возродили интерес к исследованию эластомагнитоэлектрических эффектов, обусловленных взаимодействием электрической, магнитной и упругой подсистем конденсированных сред. Наиболее интенсивно изучаются ситуации, когда и основное состояние среды, и внешние воздействия (электрические и магнитные поля и упругие напряжения) являются однородными. Вместе с тем в последнее время было выполнено большое количество работ, относящихся к средам с неоднородным основным состоянием, например к ферроикам с доменной структурой или к магнетикам с длиннопериодической структурой [1]. При этом возможность существования эластомагнитоэлектрических эффектов различного типа в конкретной среде полностью определяется кристаллографической и магнитной симметрией последней.

Что касается эластомагнитоэлектрических эффектов при неоднородных внешних воздействиях, которые неизбежно приводят к устранению некоторых или даже всех исходных элементов симметрии среды, то они остаются чрезвычайно мало изученными, за исключением так называемого флексоэлектрического эффекта. (Последний состоит в существовании линейной зависимости электрической поляризации от пространственных производных упругих деформаций [2].) При этом из рассмотрения выпадает целый класс эффектов, которые могут существовать даже в изотропных центросимметричных средах и иметь более сильное проявление по сравнению со случаем однородных воздействий. Не исключено, например, что обнаруженный недавно сильный магнитоэлектрический эффект в пленках магнитных гранатов [3, 4] обусловлен именно неоднородностью внешнего электрического поля [5].

Целью настоящей работы является разработка теории, описывающей эластомагнитоэлектрические эффекты в неупорядоченных центросимметричных средах, подверженных воздействию неоднородных упругих напряжений и внешних полей (электрических и магнитных).

Стационарное состояние электрической, магнитной и упругой подсистем однородной непроводящей среды определяется уравнениями электростатики, магнитостатики и эластостатики [6–8]. В тензорно-операторном представлении они записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=0,\\ \operatorname{div}\hat{\sigma}^*=-\mathbf{f},\ \operatorname{Ink}\hat{u}^*=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{u}^*=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$ – электрическая и магнитная индукции, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ – электрическая поляризация и намагниченность, $\hat{\sigma}$ – тензор упругих напряжений, $\mathbf{f}$ – плотность внутренних объемных сил в среде, $\hat{u}$ – тензор упругих деформаций с компонентами $u_{ij}=(1/2)\,(\partial R_i/\partial x_j+\partial R_j/\partial x_i)$, $\mathbf{R}$ – вектор упругих смещений, $\operatorname{Ink}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}^*$ – дифференциальный оператор, результат действия которого на тензорное поле характеризует несовместность последнего [7, 8]. Для сред конечного размера на поверхности с нормалью $\mathbf{n}$ должны выполняться стан-

1)e-mail: lisf@rambler.ru

дартные граничные условия. Для электрической и магнитной подсистем они заключаются в непрерывности нормальных компонент $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ и касательных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а для упругой подсистемы имеют вид $\hat{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ – поверхностная плотность внешних сил.

Если среда подвергается воздействию неоднородных статических упругих напряжений и полей (электрических и магнитных), то связи между напряженностями полей и индукциями, между упругими напряжениями и деформациями, а также перекрестные связи становятся нелокальными и описываются интегральными соотношениями, т.е. среда приобретает пространственную дисперсию [6, 7, 9]. Для анализа этих связей необходимо использовать метод варьирования термодинамического потенциала

$$W = \int_V w\, dv,$$

где V – объем среды, а w – плотность термодинамического потенциала. В общем случае w зависит не только от полей и напряжений, но и от их пространственных производных. Выражение для нее можно представить в следующем виде:

$$w = w_0 + w_e + w_m + w_u + w_{em} + w_{ue} + w_{um} + w_{uem}, \quad (2)$$

где слагаемое w_0 представляет собой плотность термодинамического потенциала в отсутствие внешних воздействий, слагаемые w_e, w_m и w_u описывают, соответственно, вклады электрической, магнитной и упругой подсистем, а слагаемые w_{em}, w_{ue}, w_{um} и w_{uem} – вклады, возникающие за счет взаимодействий между парами подсистем и тремя подсистемами.

Для изотропных центросимметричных сред, которые в отсутствие внешних воздействий являются неупорядоченными (нет спонтанных намагниченности, электрической поляризации и деформаций), слагаемые термодинамического потенциала из (2) целесообразно раскладывать по полям и деформациям и их производным. С точностью до слагаемых не выше четвертой степени по указанным термодинамическим переменным и второй степени по их производным с учетом системы уравнений (1) представим слагаемые в выражении (2) следующим образом:

$$w_e = \frac{1}{2}\left[a_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}a_1\mathbf{E}^4 + a_2\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i}\right)^2\right] + \\ + a_3\mathbf{E}^2\mathrm{div}\mathbf{E}, \quad (3)$$

$$w_m = \frac{1}{2}\left[b_0\mathbf{H}^2 + \frac{1}{2}b_1\mathbf{H}^4 + b_2\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}\right)^2\right], \quad (4)$$

$$w_u = \frac{1}{2}\lambda\, u_{ii}^2 + \eta\, u_{ij}^2, \quad (5)$$

$$w_{em} = \frac{1}{2}\left[c_1\mathbf{E}^2\mathbf{H}^2 + c_2\left(\mathbf{EH}\right)^2\right] + \\ + c_3\mathbf{H}^2\mathrm{div}\mathbf{E} + c_4\left(\mathbf{EH}\right)\mathrm{div}\mathbf{H}, \quad (6)$$

$$w_{ue} = \frac{1}{2}\lambda^{(e)}u_{ii}\mathbf{E}^2 + \eta^{(e)}u_{ij}E_iE_j + \\ + \lambda^{(en)}u_{ii}\mathrm{div}\mathbf{E} + \eta^{(en)}u_{ij}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$w_{um} = \frac{1}{2}\lambda^{(m)}u_{ii}\mathbf{H}^2 + \eta^{(m)}u_{ij}H_iH_j, \quad (8)$$

где a_i, b_i и c_i – феноменологические коэффициенты, λ и η – коэффициенты Ламе для изолированной упругой подсистемы, $\lambda^{(e)}$, $\eta^{(e)}$ и $\lambda^{(en)}$, $\eta^{(en)}$ – коэффициенты Ламе для упругой подсистемы с учетом однородного и неоднородного эластоэлектрического взаимодействия соответственно, $\lambda^{(m)}$, $\eta^{(m)}$ – коэффициенты Ламе для упругой подсистемы с учетом однородного эластомагнитного взаимодействия (выражение для плотности термодинамического потенциала w_{uem}, возникающей за счет взаимодействия трех подсистем, не приводится, так как оно проявляется в следующем порядке малости). Выражения (3)–(8), все коэффициенты которых в общем случае зависят от температуры, учитывают нелинейность сред по E и H. Последняя становится ощутимой в парафазе магнетиков, сегнетоэлектриков и сегнетомагнетиков вблизи точек Кюри даже при слабых напряженностях полей.

Экстремумы функционала W при постоянных граничных условиях на поверхности среды соответствуют системе (1), если выполняются уравнения состояния в виде вариационных производных [10]:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial w}{(\partial \mathbf{E}/\partial x_i)},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{H}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial w}{(\partial \mathbf{H}/\partial x_i)}, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial w}{(\partial u_{ij}/\partial x_k)}.$$

Подставляя (3), (6) и (7) в первое уравнение системы (9), получаем следующее выражение для электрической индукции в предположении постоянства феноменологических коэффициентов:

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j - a_2\Delta E_i + \nu H_i - \eta^{(en)}\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} + D_i^{(g)}, \quad (10)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij} + 2\eta^{(e)}u_{ij}$ – компоненты тензора нелинейной диэлектрической проницаемости, $\varepsilon = \varepsilon_0 + a_1\mathbf{E}^2 + c_1\mathbf{H}^2 + 2a_3\mathrm{div}\mathbf{E} + \lambda^{(e)}u_{ii}$ – изотропное слагаемое, $\varepsilon_0 = a_0$ – линейная диэлектрическая проницаемость, $\nu = c_2\mathbf{EH} + c_4\mathrm{div}\mathbf{H}$ – нелинейная магнитоэлектрическая проницаемость, $\mathbf{D}^{(g)} = -a_3\mathrm{grad}\mathbf{E}^2 - c_3\mathrm{grad}\mathbf{H}^2 - \lambda^{(en)}\mathrm{grad}u_{ii}$ – градиентная составляющая электрической индукции. Видно, что упругие деформации изменяют симметрию и значения компонент тензора диэлектрической проницаемости. В выражении (10) можно выделить обусловленные неоднородностью полей слагаемые $\varepsilon_{ij}^{(en)}E_j$ и $\nu_{ij}^{(en)}H_j$, где $\varepsilon_{ij}^{(en)} = 2a_3\left(\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{E} - \partial E_i/\partial x_j\right)$ – компоненты тензора неоднородной диэлектрической проницаемости, а $\nu_{ij}^{(en)} = c_4\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{H} - 2c_3\partial H_i/\partial x_j$ – компоненты тензора неоднородной электромагнитной проницаемости. Отсюда следует, что в общем случае неоднородное электрическое поле перенормирует диэлектрическую проницаемость, а неоднородное магнитное поле создает электрическую индукцию.

Подстановка (4), (6) и (8) во второе уравнение системы (9) дает следующее выражение для магнитной индукции в предположении постоянства феноменологических коэффициентов:

$$B_i = \mu_{ij}H_j - b_2\Delta H_i + \nu E_i + B_i^{(g)}, \tag{11}$$

где $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij} + 2\eta^{(m)}u_{ij}$ – тензор нелинейной магнитной проницаемости, $\mu = \mu_0 + b_1\mathbf{H}^2 + c_1\mathbf{E}^2 + 2c_3\mathrm{div}\mathbf{E} + \lambda^{(m)}u_{ii}$ – изотропное слагаемое, $\mu_0 = b_0$ – линейная магнитная проницаемость, $\mathbf{B}^{(g)} = -c_4\mathrm{grad}\left(\mathbf{EH}\right)$ – градиентная составляющая магнитной индукции. Наличие в выражении (11) возникающих из-за неоднородности полей слагаемых $\mu_{ij}^{(mn)}H_j$ и $\nu_{ij}^{(mn)}E_j$, где $\mu_{ij}^{(mn)} = 2c_3\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{E} - c_4\left(\partial EH_i/\partial x_j\right)$ – компоненты тензора неоднородной магнитной проницаемости, а $\nu_{ij}^{(mn)} = c_4(\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{H} - \partial H_i/\partial x_j)$ – компоненты тензора неоднородной магнитоэлектрической проницаемости, свидетельствует о том, что как само электрическое поле, так и его неоднородности перенормируют магнитную проницаемость, а в присутствии неоднородного магнитного поля электрическое поле дает вклад в магнитную индукцию. Заметим, что в неоднородных внешних полях связь между электрической и магнитной подсистемами существует даже в центросимметричных средах. При этом изменение значений компонент векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ за счет неоднородности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ может иметь любой знак. Если феноменологические коэффициенты в первом и втором уравнениях системы (9) зависят от координат, то в выражениях для индукций появляются слагаемые, пропорциональные производным коэффициентов.

Выражение для тензора напряжений, получаемое путем подстановки (5), (7) и (8) в последнее уравнение системы (9), в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{kk} + 2\eta\, u_{ij} + \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(m)} + \sigma_{ij}^{(en)}, \tag{12}$$

где $\sigma_{ij}^{(e)} = (1/2)\delta_{ij}\lambda^{(e)}\mathbf{E}^2 + \eta^{(e)}E_iE_j$ и $\sigma_{ij}^{(m)} = (1/2)\delta_{ij}\lambda^{(m)}\mathbf{H}^2 + \eta^{(m)}H_iH_j$ – напряжения, вызванные электрическим и магнитным полями, а $\sigma_{ij}^{(en)} = \delta_{ij}\lambda^{(en)}\mathrm{div}\mathbf{E} + \eta^{(en)}\left(\partial E_i/\partial x_j\right)$ – напряжения, обусловленные неоднородностью электрического поля. Компоненты тензоров напряжений $\sigma_{ij}^{(e)}$и $\sigma_{ij}^{(m)}$ инвариантны по отношению к изменению направления $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соответственно, а компоненты тензора $\sigma_{ij}^{(en)}$ изменяют знак при инверсии $\mathbf{E}$.

Подставляя выражения (10)–(12) в систему уравнений (1), находим, что величины $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{R}$ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\mathrm{div}\big[\varepsilon\mathbf{E} - a_2\Delta\mathbf{E} + 2\eta^{(e)}u_{ij}E_j\mathbf{e}_i + \nu\mathbf{H} + \\ + \mathbf{D}^{(g)} - (1/2)\eta^{(en)}\left(\mathrm{graddiv}\,\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}\right)\big] = 0, \\ \mathrm{div}\big(\mu\mathbf{H} - b_2\Delta\mathbf{H} + 2\eta^{(m)}u_{ij}H_j\mathbf{e}_i + \nu\mathbf{E} + \mathbf{B}^{(g)}\big) = 0, \\ (\lambda+\eta)\,\mathrm{graddiv}\mathbf{R} + \eta\Delta\mathbf{R} + \eta^{(e)}\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} + \\ + \eta^{(m)}\mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{H} + \mathrm{grad}\sigma^{(em)} = -\mathbf{f},\end{gathered} \tag{13}$$

где $\mathbf{e}_i$ – базисные векторы, а

$$\sigma^{(em)} = \frac{1}{2}\left[\left(\lambda^{(e)} + \eta^{(e)}\right)\mathbf{E}^2 + \left(\lambda^{(m)} + \eta^{(m)}\right)\mathbf{H}^2\right] + \\ + \left(\lambda^{(en)} + \eta^{(en)}\right)\mathrm{div}\mathbf{E}.$$

В общем случае найти точное решение системы нелинейных уравнений (13) не представляется возможным. Для качественного анализа можно использовать численные методы, а для получения приближенных решений – метод последовательных приближений. В качестве иллюстрации сначала рассмотрим два примера из [11], когда неоднородные напряжения в среде создаются гравитационным полем.

Первый пример относится к расположенному на жестком (недеформируемом) плоском металлическом основании бесконечному плоскому слою однородной непроводящей среды толщиной h в плоском же гравитационном поле в отсутствие внешних электрического и магнитного полей. Известно, что из-за давления верхних частей слоя на нижние в нем возникают неоднородные напряжения сжатия (см. [11]). За счет эластоэлектрического эффекта они могут приводить к появлению неоднородного электрического поля.

Из симметрии задачи следует, что все переменные зависят только от координаты z, отсчитываемой по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности основания. Поэтому в первом (линейном) приближении из первого уравнения эластостатики при $\mathbf{f} = -\rho\mathbf{g}$ (где ρ – плотность среды, g – гравитационная постоянная) находим

$$\frac{\partial u_{zz}^{(1)}}{\partial z} = \rho g/\gamma_0 - \gamma^{(en)} \frac{\partial^2 E_z^{(1)}}{\partial z}^2 , \qquad (14)$$

где $\gamma^{(en)} = (\lambda^{(en)} + \eta^{(en)})/\gamma_0$, $\gamma_0 = \lambda + 2\eta$. Подставляя выражение (14) в первое уравнение системы (13), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения возникающего в слое электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_z^{(1)}}{\partial z^2} - \varepsilon_{02} E_z^{(1)} + a_{02}\rho = 0, \qquad (15)$$

где $\varepsilon_{02} = \varepsilon_0/a_{2\gamma}$, $a_{02} = a_0/a_{2\gamma}$, $a_{2\gamma} = a_2 - \gamma^{(en)} \left(\lambda^{(en)} + \eta^{(en)}\right)$, $a_0 = g\gamma^{(en)}$.

В пренебрежении зависимостью плотности среды от z решение уравнения (15) имеет вид

$$E_z^{(1)} = E_g \left[1 - \cosh\left(\zeta_h - \zeta\right)\right], \qquad (16)$$

где $E_g = g\rho\gamma^{(en)}/\varepsilon_0$ – напряженность электрического поля, создаваемого гравитационными силами за счет неоднородного эластоэлектрического взаимодействия, $\zeta_h = \varepsilon_{02}^{1/2} h$ и $\zeta = \varepsilon_{02}^{1/2} z$. Плотность поверхностного заряда у основания слоя равна

$$q^{(e)} = \rho g \gamma^{(en)} \left(1 - \cosh\zeta_h\right).$$

При экспоненциальной зависимости плотности от z вида $\rho = \rho_0 \exp\left(-\beta z\right)$ решение уравнения (15) принимает более сложный вид, зависящий от знака параметра $a_{2\gamma}$. При $a_{2\gamma} > 0$ имеем

$$E_z^{(1)} = E_{z0}^{(1)} \left\{\exp\left[\beta_\varepsilon\left(\zeta_h - \zeta\right)\right] - \cosh\left(\zeta_h - \zeta\right) - \right.$$
$$\left. - \beta_\varepsilon \sinh\left(\zeta_h - \zeta\right)\right\}, \qquad (17)$$

где $E_{z0}^{(1)} = E_g \exp\left(-\beta_\varepsilon \zeta_h\right) / \left(1 - \beta_\varepsilon^2\right)$, $\beta_\varepsilon = \beta/\varepsilon_{02}^{1/2}$. При $a_{2\gamma} < 0$ в формуле (17) следует заменить гиперболические функции на гармонические.

Приведенные выше результаты показывают, что упругие напряжения гравитационного происхождения, возможно, могут быть привлечены для объяснения некоторых геофизических явлений, таких, как наличие на поверхности Земли зарядов определенного знака [12, 13], а также существование сильных электрических полей в земных недрах [14–16].

Во втором приближении дифференциальное уравнение для деформаций имеет вид

$$\frac{\partial u_{zz}^{(2)}}{\partial z} = -\gamma^{(en)} \frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial z^2} - \gamma^{(e)} \frac{\partial \left(E_z^{(1)}\right)^2}{\partial z}. \qquad (18)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 E_z^{(2)}}{\partial z^2} - \varepsilon_{02} E_z^{(2)} - E_z^{(1)} E^{(11)} = 0. \qquad (19)$$

Здесь

$$E^{(11)} = 2\gamma_a^{(en)} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} + \lambda_a^{(e)} \left[\exp\left(-\beta h\right) - \exp\left(-\beta z\right)\right],$$

где параметры $\gamma_a^{(en)} = \gamma^{(en)}/a_{2\gamma}$, $\lambda_a^{(e)} = \lambda^{(e)} g_\beta/a_{2\gamma}$, $\lambda_a^{(e)} = \lambda^{(e)} g_\beta/a_{2\gamma}$, $g_\beta = -g\rho_0/\beta$. Результаты для третьего приближения из-за их громоздкости мы опускаем.

Второй пример относится к шару радиуса r_0 с постоянной плотностью ρ_0, деформируемому собственным гравитационным полем с плотностью объемной силы $\mathbf{f} = -g\rho_0 \mathbf{r}/r_0$ [11]. В силу симметрии задачи все переменные зависят только от радиальной координаты и, следовательно, $\mathrm{rot}\mathbf{R} = 0$. На свободной поверхности упругие напряжения и электрическая индукция отсутствуют. Используя соотношение $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathrm{graddiv}\mathbf{R} - \Delta\mathbf{R}$, находим $\Delta\mathbf{R} = \mathrm{graddiv}\mathbf{R}$. Тогда из последнего уравнения системы (13) следует, что в первом (линейном) приближении выражение для не имеющих особенностей упругих смещений имеет вид

$$R_r^{(1)} = -\gamma^{(en)} E_r^{(1)} + g_s. \qquad (20)$$

Здесь $g_s = \left(g\rho_0/10\lambda_0\right)\left(r/r_0\right)\left(3r_{c0}^2 - r^2\right)$, где $r_{c0}^2 = \left(1/3\right) r_0^2 (5\lambda + 6\eta) / \left(3\lambda + 2\eta\right)$ – квадрат радиуса, при котором в отсутствие эластоэлектрической связи происходит изменение знака радиальных смещений [11]. Уравнение для напряженности радиального электрического поля

$$\Delta E_r^{(1)} - \varepsilon_{02} E_r^{(1)} = -\left(r/r_0\right)\varepsilon_{02} E_g \qquad (21)$$

при $a_{2\gamma} > 0$ можно представить в виде

$$E_r^{(1)} = E_g \left[\left(\xi/\xi_0\right) - \left(\xi_0/\xi\right)\left(\sinh\xi/\sinh\xi_0\right)\right], \qquad (22)$$

где $\xi = \varepsilon_{02}^{1/2} r$ и $\xi_0 = \varepsilon_{02}^{1/2} r_0$. Напряженность электрического поля изменяет знак в точке $r_{ce} = \varepsilon_{02}^{-1/2} \xi_{ce}$, где значение ξ_{ce} определяется из уравнения $\sinh\xi_0/\xi_0^2 = \sinh\xi_{ce}/\xi_{ce}^2$. Заметим, что точка смены знака $E_r^{(1)}$ не совпадает с точкой смены знака радиальных смещений. Решение уравнения (21) при $a_{2\gamma} < 0$ получается из выражения (22) при замене sinh на sin и $\varepsilon_{02}^{1/2}$ на $|\varepsilon_{02}|^{1/2}$.

В качестве третьего примера рассмотрим однородный непроводящий цилиндр радиуса r_0. При его вращении вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью Ω центробежная сила с плотностью

$\mathbf{f}_c = \rho\Omega^2\mathbf{r}$ будет создавать неоднородные радиальные смещения. Эти смещения благодаря эластоэлектрическому взаимодействию будут индуцировать неоднородное радиальное электрическое поле.

В первом приближении распределение радиальных смещений определяется уравнением

$$R_r^{(1)} = -\gamma^{(en)} E_r^{(1)} - R_r^{(\Omega)}, \tag{23}$$

где $R_r^{(\Omega)} = \left(\rho\Omega^2/8\gamma_0\right) r \left(3r_{c0}^2 - r^2\right)$, а $r_{c0}^2 = (1/3)\, r_0^2 (2\lambda + 3\eta) / (\lambda + \eta)$. Дифференциальное уравнение для напряженности электрического поля имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_r^{(1)}}{\partial r} + \tilde{\lambda} E_r^{(1)} = f_c \tilde{\lambda} \left(\gamma^{(en)}/\varepsilon_0\right), \tag{24}$$

где $\tilde{\lambda} = -\varepsilon_{02}$. Его решением при $\tilde{\lambda} > 0$ является

$$E_r^{(1)} = E_{r0}^{(1)} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\tilde{\lambda} / \left(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_{0k}\right)\right] \times \\ \times \left[\xi_{0k}/\pi J_1\left(\xi_{0k}\right)\right] J_0\left(\xi_k\right). \tag{25}$$

Здесь $E_{r0}^{(1)} = \rho r_0 \Omega^2 \left(\gamma^{(en)}/\varepsilon_0\right)$, J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка, x_{0k} – корни уравнения $J_0(x) = 0$, $\tilde{\lambda}_{0k} = (x_{0k}/r_0)^2$, $\xi_k = r\tilde{\lambda}_{0k}^{1/2}$, $\xi_{0k} = r_0\tilde{\lambda}_{0k}^{1/2}$. Точка $a_{20} = 0$ является точкой ветвления решений. При $\tilde{\lambda} < 0$ J_0 и J_1 в (25) становятся функциями мнимого аргумента.

Выполненный в настоящей работе теоретический анализ эластомагнитоэлектрических эффектов в присутствии неоднородных внешних воздействий (электрических и магнитных полей и упругих напряжений), частично или полностью устраняющих исходные элементы симметрии среды, и рассмотренные примеры показывают, что в таких ситуациях в полном соответствии с принципом Кюри возникает множество новых явлений, обусловленных связью между электрической, магнитной и упругой подсистемами. Подобные явления часто могут сопутствовать известным из экспериментов, поскольку все реально используемые в них внешние поля и упругие напряжения в той или иной степени являются неоднородными.

1. А.П. Пятаков, А.К. Звездин, УФН **182**, 593 (2012).
2. А.К. Таганцев, УФН **152**, 423 (1981).
3. А.С. Логгинов, Г.А. Мешков, А.В. Николаев, А.П. Пятаков, Письма в ЖЭТФ **86**, 124 (2007).
4. А.К. Звездин, А.П. Пятаков, УФН **179**, 897 (2009).
5. А.Ф. Кабыченков, Ф.В. Лисовский, Е.Г. Мансветова, Письма в ЖЭТФ **97**, 304 (2013).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, ГИФМЛ, М. (1982).
7. Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, ГИФМЛ, М. (1979).
8. А.А. Ильюшин, *Механика сплошной среды*, Изд-во МГУ, М. (1990).
9. М.А. Воротынцев, А.А. Корнышев, *Электростатика сред с пространственной дисперсией*, Наука, ГИФМЛ, М. (1993).
10. Л.Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Наука, ГИФМЛ, М. (1969).
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, ГИФМЛ, М. (1987).
12. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, *Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм*, Мир, М. (1965), т.5 [R.F. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, N.Y. (1963), v.2].
13. В.В. Кузнецов, *Физика Земли. Учебник-монография*, Новосибирск (2011).
14. D. Finkelstein, R.D. Hill, and J.P. Powell, J. Geophys. Res. **78**, 992 (1973).
15. А.А. Воробьев, *Физические условия залегания и свойства глубинного вещества. Высокие электрические поля в земных недрах*, Изд-во ТГУ, Томск (1975).
16. А.А. Воробьев, *Равновесие и преобразование видов энергии в недрах*, Изд-во ТГУ, Томск (1980).
17. Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, ГИФМЛ, М. (1976) [E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Akademische Verlagsgeselschaft, Leipzig (1959)].