Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 7, с. 452 – 456 © 2014 г. 10 апреля

Механизм генерации убегающих электронов лидером молнии

Л. П. Бабич[1]*, Е. И. Бочков, И. М. Куцык*

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 607188 Саров, Россия

Поступила в редакцию 23 января 2014 г.

После переработки 19 февраля 2014 г.

Анализируется возможность усиления электрического поля в лидере молнии до уровня, допускающего убегание электронов низких энергий. Распространение волны ионизации в предионизованном газе позволяет преодолеть ограничение на напряженность поля, накладываемое поперечным расширением фронта стримера. Численным моделированием показано, что на заключительной стадии формирования новой ступени лидера в каналах стримерной зоны перед новой ступенью возможна генерация поля с интенсивностью, достаточной для убегания электронов и, следовательно, для генерации импульсов рентгеновского и гамма-излучения, наблюдавшихся в корреляции со ступенями лидера.

DOI: 10.7868/S0370274X14070066

Введение. В корреляции с искусственными и природными молниями неоднократно наблюдались вспышки рентгеновского и гамма-излучения [1–5] с длительностью ~ 1 мкс и энергией фотонов до ~ 1 МэВ. Наиболее вероятным механизмом, способным объяснить вспышки, является тормозное излучение электронов, ускоряющихся (убегающих) до высоких энергий в сильных электрических полях (*high-field runaway* [6]). Явление убегания в плотных газах почти полвека изучается в экспериментах с лабораторными разрядами (см. [7–11] и цитированную литературу), начиная с пионерских экспериментов [12–15] и анализа явления с учетом поля пространственного заряда [16]. Первые оценки скорости этого процесса, выполненные более полувека назад [17], уточнены численным моделированием [18, 19]. Однако проблема механизма генерации в канале молнии поля с напряженностью, достаточной для генерации интенсивных потоков убегающих электронов (УЭ), остается нерешенной.

В работе [19] предполагается, что сильное поле возникает в результате присоединения к лидеру очередной ступени, когда заряд головки лидера быстро перемещается на его новый конец, причем время жизни сильного поля определяется временем формирования стримерной короны, выравнивающей распределение поля. Авторы анализировали возможность убегания электронов на фронте стримера короны и дальнейшее ускорение вдали от фронта. Этот подход получил развитие в работе [20]. Однако рентгеновское излучение, а значит, и УЭ генерируются ступенчатым лидером не во время формирования стримерной короны, а через $\sim 0.1{-}1$ мкс после электромагнитного импульса, обусловленного развитием новой ступени [5].

В работе [21] была выполнена оценка числа УЭ на фронте волны ионизации (ВИ), согласно которой одной ступенью лидера генерируется $\sim 3\cdot 10^{12}$ УЭ. Существенный вклад сюда дают процессы лавинного размножения УЭ в области головки лидера размером ~ 10 см. Для напряженности поля $E \sim 200$ кВ/см авторы используют сильно завышенную оценку характерной длины размножения УЭ: $l_e \sim 1$ см. Так, согласно результатам численного моделирования лавины УЭ методом Монте-Карло при $E = 218$ кВ/см $l_e = 16$ см [22–24]. Размножение УЭ может иметь место на больших расстояниях от головки лидера в сравнительно слабых полях. При потенциале головки лидера $U_L = 20$ МВ усиление лавины оценивается сверху величиной $\exp(U_L/\langle\varepsilon_{\rm re}\rangle) \approx 17$, где $\langle\varepsilon_{\rm re}\rangle \approx 7$ МэВ – средняя энергия УЭ в лавине [22–25].

В настоящей работе численным моделированием показано, что после контакта стримерных зон первичного отрицательного лидера и встречного вторичного лидера и последующего старта новой ступени лидера молнии в каналах стримерной зоны перед ее фронтом возможна генерация поля с напряженностью, достаточной для генерации УЭ и в конечном итоге генерации импульсов излучения рентгеновского и гамма-диапазона, наблюдавшихся в корреляции со ступенями лидера [1–5] (см. численный анализ [26]).

Механизм генерации убегающих электронов лидером молнии. Для эффективной генера-

[1]e-mail: babich@elph.vniief.ru

ции УЭ при нормальных условиях требуются поля с напряженностью E не менее 240 кВ/см [18, 19]. Механизм генерации таких полей в канале или окрестности молнии неясен. Согласно оценкам [27], в головке лидера величина E не превосходит 50 кВ/см, а в самом канале она еще меньше. Известно, что сильное поле существует в головке стримеров, составляющих чехол лидера. Однако в работе [28] показано, что максимальное значение Е на фронте стримера не превышает ~ 150 кВ/см, так как при бóльших E скорости ионизации вдоль и поперек направления распространения канала становятся близкими. В результате канал расширяется, что ведет к ослаблению поля. Этот вывод подтверждается численным моделированием [20]. В работах [19, 20] предполагалось, что в момент расщепления стримера E в его головке может увеличиваться до $\sim 10 \cdot E_{\rm th}$, где $E_{\rm th} \approx 30$ кВ/(см $\cdot$ атм) – порог пробоя сухого воздуха. Однако неясно, как долго может существовать столь сильное поле. Кроме того, рентгеновское излучение длинного искрового разряда регистрируется не на стадии формирования стримерной короны, а в момент контакта положительных и отрицательных стримеров [29].

Ограничение на величину E можно преодолеть, предположив, что ВИ распространяется уже по предварительно ионизованному каналу. Известно, что лидер молнии распространяется ступенчатым образом [27, 30, 31]. В [27] описана следующая схема распространения отрицательного лабораторного лидера, полученная на основании фоторазвертки процесса. Лидер медленно движется вместе со своей стримерной короной. На границе короны формируется вытянутое вдоль вектора поля плазменное образование, от концов которого стартуют стримеры в направлениях к и от головки лидера. В некоторый момент времени от этого образования стартует так называемый объемный лидер (рис. 1a), положительная головка которого быстро движется навстречу старому лидеру. После контакта отрицательной стримерной короны старого лидера с положительной короной объемного лидера начинается развитие новой ступени. В процессе перераспределения зарядов потенциал старого лидера U_L переносится к объемному лидеру (рис. 1b). Скачок потенциала в теле объемного лидера должен приводить к тому, что вдоль каналов его отрицательной стримерной короны стартует новая ВИ (рис. 1c), которая распространяется в предионизованном канале. Поскольку скорость ВИ обратно пропорциональна логарифму от концентрации электронов перед фронтом ВИ [27], скорость расширения фронта в радиальном направлении существенно меньше продольной скорости ВИ. В результате напряженность поля на фронте может достигать необходимых для генерации УЭ значений ~ 240 кВ/см.

Математическая формулировка задачи. В данной работе мы моделируем стадию, изображенную на рис. 1c, т.е. распространение вторичной ВИ вдоль старых отрицательных стримерных каналов, исходящих из головки объемного лидера. Мы полагаем, что скачок потенциала на фронте объемного лидера приводит к возникновению в области головки объемного лидера электрического поля с напряженностью 50 кВ/см. Эта напряженность принимается начальной. Размер стримерной зоны лидеров лабораторных разрядов ~ 1 м [27]. В лидерах молнии стримерная зона, скорее всего, простирается на десятки метров. Поскольку современная вычислительная техника позволяет моделировать стримеры длиной в несколько сантиметров, ограничимся исследованием начальной стадии распространения ВИ. Задача решается в цилиндрической системе координат z, c в следующей постановке. В области с размерами $L_0 \times R_0$ задано стационарное однородное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_{\rm ext}(\mathbf{r}) = -E_0 \cdot \mathbf{e}_z$. В начальный момент времени существует проводящий канал длиной L_0, в котором большая часть электронов оказывается прилипшей к молекулам кислорода. Численно моделируется развитие канала и находится число электронов, перешедших в режим убегания.

Кинетика электронов низких энергий (e), положительных (p) и отрицательных (n) ионов в разряде описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + {\rm div}(n_e \mathbf{x}_e - D_e \boldsymbol{\nabla} n_e) =$$
$$= (\nu_{\rm ion} - \nu_{\rm att}) n_e - \beta_{ep} n_e n_p + S_{\rm ph},$$
$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + {\rm div}\, n_p \mathbf{x}_p = \nu_{\rm ion} n_e - \beta_{ep} n_e n_p - \beta_{pn} n_p n_n + S_{\rm ph}, \quad (1)$$
$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + {\rm div}\, n_n \mathbf{x}_n = \nu_{\rm att} n_e - \beta_{pn} n_p n_n,$$

где n_e, n_p, n_n – соответствующие концентрации; $\mathbf{x}_e = -\mu_e \mathbf{E}$, $\mathbf{x}_p = \mu_p \mathbf{E}$, $\mathbf{x}_n = -\mu_n \mathbf{E}$ – скорости дрейфа, μ_e и $\mu_{p,n}$ – подвижности электронов и ионов; D_e – коэффициент диффузии электронов; $\nu_{\rm ion}$ – частота ионизации молекул воздуха электронами низких энергий; β_{ep} и β_{pn} – коэффициенты рекомбинации электронов с положительными ионами и положительных и отрицательных ионов; $\nu_{\rm att} = k_{\rm diss} N_{\rm O_2} + k_{\rm thr} N^2$ – частота прилипания электронов к молекулам кислорода; $k_{\rm diss}$, $k_{\rm thr}$ – коэффициенты диссоциативного и трехчастичного прилипания; N и $N_{\rm O_2}$ – локальные концентрации воздуха и молекул кислорода на z; $S_{\rm ph}$ – источник фотоионизации. Следует

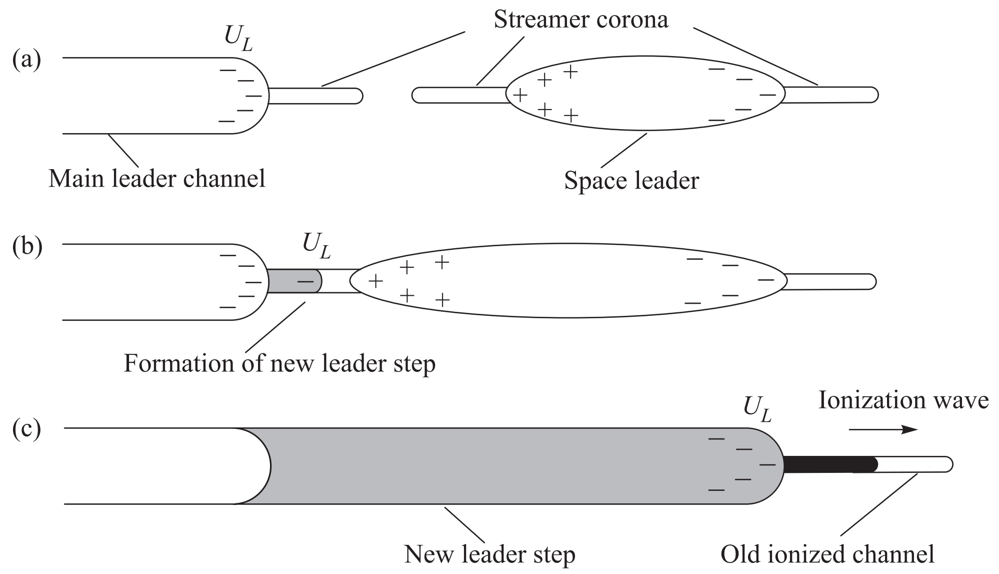

Рис. 1. Схема генерации поля с напряженностью, необходимой для убегания электронов на фронте лидера молнии

отметить, что температура отрицательных ионов и газа в целом за время развития моделируемого процесса существенно не повышается. Поэтому частота столкновений, способных привести к разрушению отрицательных ионов, слишком мала для того, чтобы отлипание электронов существенно сказалось на величине концентрации отрицательных ионов.

Начальные концентрации заряженных частиц в старом стримерном канале имеют вид

$$
\begin{gathered}
N_e^{\mathrm{ch}}(z,\rho) = n_e^{\mathrm{ch},a}\exp(-c^2/l_\rho^2),\\
n_p^{\mathrm{ch}}(z,\rho) = n_e^{\mathrm{ch}}(z,\rho) + n_p^{\mathrm{ch},a}\exp(-c^2/l_\rho^2), \qquad (2)\\
n_n^{\mathrm{ch}}(z,\rho) = n_p^{\mathrm{ch}}(z,\rho) - n_e^{\mathrm{ch}}(z,\rho),
\end{gathered}
$$

где $n_p^{\mathrm{ch},a}$ и $n_e^{\mathrm{ch},a}$ – концентрации на оси симметрии канала.

Для старта ВИ в начальный момент времени задается облако нейтральной плазмы с центром в начале координат ($z_m = 0$):

$$
\begin{gathered}
n_e^{\mathrm{in}}(z,\rho) = n_m \exp[-(z-z_m)^2/l_z^2]\exp(-\rho^2/l_\rho^2),\\
n_p^{\mathrm{in}}(z,\rho) = n_e^{\mathrm{in}}(z,\rho), \qquad (3)\\
n_n^{\mathrm{in}}(z,\rho) = 0.
\end{gathered}
$$

Объединяя (2) и (3), получаем начальные условия для системы (1):

$$
\begin{gathered}
n_e(z,\rho,0) = n_e^{\mathrm{ch}}(z,\rho) + n_e^{\mathrm{in}}(z,\rho),\\
n_p(z,\rho,0) = n_p^{\mathrm{ch}}(z,\rho) + n_p^{\mathrm{in}}(z,\rho), \qquad (4)\\
n_n(z,\rho,0) = n_n^{\mathrm{ch}}(z,\rho) + n_n^{\mathrm{in}}(z,\rho).
\end{gathered}
$$

Система (1) замыкается уравнениями для самосогласованного электрического поля:

$$
\begin{gathered}
\Delta\varphi_{\mathrm{in}} = -\frac{\rho_q}{\varepsilon_0},\\
\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\mathrm{int}} + \mathbf{E}_{\mathrm{ext}},
\end{gathered} \qquad (5)
$$

где φ_{int} – потенциал поля пространственного заряда, возникающего за счет нарушения нейтральности плазмы, $\rho_q = e(n_p - n_n - n_e)$, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, e – элементарный заряд.

На границе расчетной области потенциал

$$
\varphi_{\mathrm{int}}(\mathbf{r}_{\mathrm{bound}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V_\rho}\frac{\rho_q(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}_{\mathrm{bound}} - \mathbf{r}'|} \qquad (6)
$$

вычисляется интегрированием по области с объемом V_ρ, в которой $|\rho_q| \geq 0.001|\rho_q|^{\max}$, где $|\rho_q|^{\max}$ – максимальное значение модуля плотности заряда [32].

Для расчета источника фотоионизации S_{ph} используется модель, предложенная в работе [33] и развитая далее в работе [32]. В данной модели расчет интеграла из классической модели [34] заменяется решением трех уравнений Гельмгольца.

Число электронов $N_{\mathrm{re}}(t)$, перешедших в режим убегания к моменту времени t, есть

$$
N_{\mathrm{re}}(t) = \int\limits_0^t\int\limits_{V_{\mathrm{sim}}}\nu_{\mathrm{run}}[E(z,\rho,t')]n_e(z,\rho,t')dV'dt', \quad (7)
$$

где V_{sim} – объем области моделирования, $\nu_{\mathrm{run}}(E)$ – частота перехода тепловых электронов в режим убегания, вычисленная методом Монте-Карло в работе

[18] для различных значений пороговой энергии убегания $\varepsilon_{\text{th,run}}$ в диапазоне $E = (240-400)$ кВ/см при 1 атм.

Вычисления были выполнены для $P = 1$ атм, парциального давления кислорода 0.2 атм, $L_0 = 4$ см, $R_0 = 4$ мм, $E_0 = 50$ кВ/см, $l_z = l_\rho = 0.5$ мм. Величина $n_e^{\text{ch},a}$ варьировалась. Ее значения определялись из решения системы (1) без учета потоковых членов. Полагалось, что $n_p(t = 0) = 10^{20}$ м$^{-3}$. Расчеты велись до момента времени $\tilde{t}$, когда $n_e(\tilde{t}) = n_e^{\text{ch},a}$. Согласно расчетам $\tilde{t} \approx 1$ мкс, $n_p^{\text{ch},a} = n_p(\tilde{t}) \approx 5 \cdot 10^{17}$ м$^{-3}$. Были использованы те же, что и в работе [35], зависимости μ_e, $\mu_{p,n}$, D_e, ν_{ion}, β_{ep}, β_{pn}, k_{diss}, k_{thr} от E и P и данные [33, 36], необходимые для вычисления S_{ph}. Число УЭ $N_{\text{re}}(t)$ вычисляется для $\varepsilon_{\text{th,run}} = 8$ кэВ. Для $\nu_{\text{run}}(E)$ использовались данные работы [18].

Результаты и анализ. Задача решалась для $n_e^{\text{ch},a} = 10^{13}$, 10^{14}, 10^{15} м$^{-3}$ методом конечных разностей [37, 38]. Моделирование прекращалось в момент времени $t_{z_f=3\,\text{см}}$, когда максимум напряженности на фронте ВИ E_f оказывался в точке $z_f = 3$ см. Полученные результаты приведены в таблице. Здесь v_f – скорость фронта ВИ в момент $t_{z_f=3\,\text{см}}$, k_{re} – число УЭ на единицу длины, рожденных ВИ на участке от 2.9 до 3.0 см:

$$k_{\text{re}} = \frac{N_{\text{re}}(t_{z_f=3\,\text{см}}) - N_{\text{re}}(t_{z_f=2.9\,\text{см}})}{1\,\text{мм}}. \qquad (8)$$

Результаты расчетов

$n_e^{\text{ch},a}$, м$^{-3}$	$t_{z_f=3\,\text{см}}$, нс	E_f, кВ/см	v_f, м/с	k_{re}, м$^{-1}$
10^{13}	3.5	284	$2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$
10^{14}	3.3	252	$3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
10^{15}	3.1	202	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^4$

На рис. 2 приведены распределения E и n_e вдоль оси разряда для $n_e^{\text{ch},a} = 10^{13}$ в зависимости от времени. Видно, что при $n_e^{\text{ch},a} = 10^{13}$, 10^{14} м$^{-3}$ достигаются значения E, превышающие величину 240 кВ/см, согласно [18] необходимую для эффективной генерации УЭ: на единицу длины генерируется $\sim 10^7 - 10^9$ электронов с энергией, большей $\varepsilon_{\text{th,run}} = 8$ кэВ. Оценим число УЭ, генерируемых ступенью лидера. Согласно [27] вокруг головки лидера с потенциалом $U_L = 1.5$ МВ в стримерной зоне радиусом $R_s \approx 1.5$ м развивается $N_s \approx 1.2 \cdot 10^5$ стримеров. Время жизни стримера $t_{\text{life}} \sim R_s/v_{s,\min} \sim 10$ мкс, где $v_{s,\min} \sim 10^5$ м/с – минимальная скорость стримера [27]. Только в каналах "молодых" стримеров длиной $l_s = v_{s,\min}\tilde{t} \approx 10$ см концентрация электронов достаточна для старта новой ВИ. Следовательно, в головке лидера генерируется порядка $N_{\text{re}} \approx l_s k_{\text{re}}(\tilde{t}/t_{\text{life}}) N_s \approx 10^{12}$ УЭ. Здесь

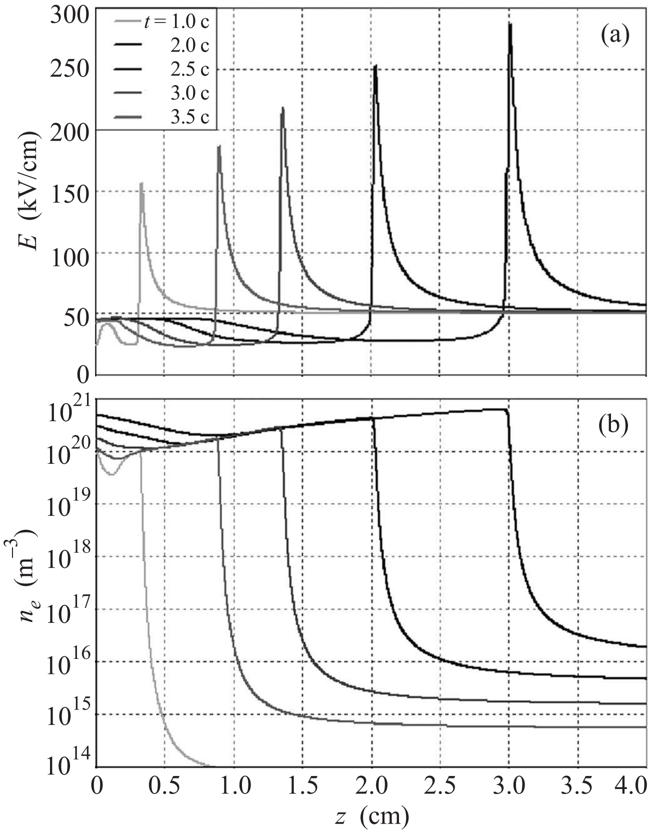

Рис. 2. Напряженность поля (a) и концентрация электронов (b) на оси симметрии в зависимости от времени для $n_e^{\text{ch},a} = 10^{13}$ м$^{-3}$

$(\tilde{t}/t_{\text{life}}) \approx 0.1$ – доля стримеров, по которым проходит ВИ. Поскольку потенциал лидера молнии, скорее всего, значительно выше, чем 1.5 МВ, число генерируемых УЭ существенно больше. Заметим, что для воспроизведения зарегистрированной энергии рентгеновского излучения [4] требуется генерация одной ступенью лидера порядка $10^{10} - 4 \cdot 10^{11}$ УЭ высоких энергий [26].

Заключение. Итак, в настоящей работе исследована возможность усиления электрического поля на фронте лидера молнии до уровня, необходимого для убегания электронов низких энергий. Анализ основан на представлении о волне ионизации, распространяющейся в предионизованной области перед фронтом лидера. Это позволяет преодолеть ограничение напряженности поля, обусловленное поперечным расширением фронта лидера. Выполнено численное моделирование развития волны ионизации с учетом дрейфового движения электронов низких энергий, положительных и отрицательных ионов в самосогласованном электрическом поле, диффузии электронов, ионизации молекул воздуха электронным ударом, рекомбинации зарядов, прилипания электронов к молекулам кислорода и фотоионизации. Согласно результатам расчетов с начальным пространственным распределением электронов с характерным размером 500 мкм и максимальными значениями концентрации 10^{13} и $10^{14}\,\text{м}^{-3}$ генерируется поле с напряженностью, достаточной для убегания электронов и, следовательно, для генерации вспышек излучения рентгеновского и гамма-диапазона, наблюдавшихся на поверхности Земли в корреляции со ступенями лидера [4]. Число убегающих электронов, генерируемое в головке лидера, оценивается величиной $N_{\text{re}} \sim 10^{12}$, близкой к числу УЭ, необходимому для воспроизведения зарегистрированной в [4] энергии рентгеновского излучения [26]. Предсказывается, что число УЭ, генерируемых разрядом молнии, намного превышает 10^{12}.

Авторы благодарны рецензенту, чьи замечания позволили существенно уточнить результаты и улучшить представление материала.

---

1. C. B. Moore, K. B. Eack, G. D. Aulich, and W. Rison, Geophys. Res. Lett. **28**, 2141 (2001).
2. J. R. Dwyer, Science **299**, 694 (2003).
3. J. R. Dwyer, H. K. Rassoul, M. Al-Dayeh, L. Caraway, B. Wright, A. Chrest, M. A. Uman, V. A. Rakov, K. J. Rambo, D. M. Jordan, J. Jerauld, and C. Smyth, Geophys. Res. Lett. **31**, L05119 (2004).
4. J. R. Dwyer, H. K. Rassoul, M. Al-Dayeh, L. Caraway, A. Chrest, B. Wright, E. Kozak, J. Jerauld, M. A. Uman, V. A. Rakov, D. M. Jordan, and K. J. Rambo, Geophys. Res. Lett. **32**, L01803 (2005).
5. J. Howard, M. A. Uman, J. R. Dwyer, D. Hill, C. Biagi, Z. Saleh, J. Jerauld, and H. K. Rassoul, Geophys. Res. Lett. **35**, L13817 (2008).
6. J. R. Dwyer, J. Geophys. Res. **113**, D10103 (2008).
7. Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, В. А. Цукерман, УФН **160**, 49 (1990) [Sov. Phys. Usp. **33**, 521 (1990)].
8. L. P. Babich, *Highenergy Phenomena in Electric Discharges in Dense Gases: Theory, Experiment and Natural Phenomena*, Futurepast Inc., Arlington, Virginia, USA (2003).
9. Л. П. Бабич, УФН **175**, 1069 (2005) [Physics-Uspekhi **48**, 1015 (2005)].
10. Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, ДАН **429**, 35 (2009) [Doklady Physics **54**, 479 (2009)].
11. Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, А. В. Родигин, ПТЭ **57**(2) (2014) (в печати).
12. Ю. Л. Станкевич, В. Г. Калинин, ДАН СССР **177**, 72 (1967) [Sov. Phys. Dokl. **12**, 1042 (1967)].
13. R. C. Noggle, E. P. Krider, and J. R. Wayland, J. Appl. Phys. **39**, 4746 (1968).
14. Л. В. Тарасова, Л. Н. Худякова, ЖТФ **39**, 1530 (1969) [Sov. Tech. Phys. **14**, 1148 (1969)].
15. Л. В. Тарасова, Л. Н. Худякова, Т. В. Лойко, В. А. Цукерман, ЖТФ **44**, 564 (1974) [Sov. Phys. Tech. Phys. **19**, 351 (1975)].
16. Л. П. Бабич, Ю. Л. Станкевич, ЖТФ **42**, 1669 (1972) [Sov. Phys. Tech. Phys. **17**, 1333 (1972).
17. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **39**, 1296 (1960).
18. I. K. Bakhov, L. P. Babich, and I. M. Kutsyk, IEEE Trans. on Plasma Science **28**, 1254 (2000).
19. G. D. Moss, V. P. Pasko, N. Liu, and G. Veronis, J. Geophys. Res. **111**, A02307 (2006).
20. S. Celestin and V. P. Pasko, J. Geophys. Res. **116**, A03315 (2011).
21. A. V. Gurevich, K. P. Zybin, and Yu. V. Medvedev, Phys. Lett. A. **361**, 119 (2007).
22. Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, ЖЭТФ **139**, 568 (2011) [JETP **112**, 494 (2011)].
23. И. М. Куцык, Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Е. И. Бочков, Письма в ЖЭТФ **95**, 712 (2012) [JETP Lett. **95**, 631 (2012)].
24. И. М. Куцык, Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Е. И. Бочков, Физика плазмы **38**, 969 (2012) [Plasma Phys. Rep. **38**, 891 (2012)].
25. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, R. A. Roussel-Dupré, Физика плазмы **30**, 666 (2004) [Plasma Phys. Rep. **30**, 616 (2004)].
26. L. P. Babich, I. M. Kutsyk, E. N. Donskoi, and J. R. Dwyer, J. Geophys. Res. **118**, 2573 (2013).
27. E. M. Bazelyan and Yu. P. Raizer, *Lightning Physics and Lightning Protection*, IOP Publishing, Bristol (2000).
28. Ю. П. Райзер, А. Н. Симаков, Физика плазмы **24**, 754 (1998).
29. P. O. Kochkin, C. V. Nguyen, A. P. J. van Deursen, and U. Ebert, J. Phys. D: Appl. Phys. **45**, 425202 (2012).
30. M. Uman, *The Lightning Discharge*, Dover Publ., Mineola, N.Y. (2001).
31. V. A. Rakov and M. A. Uman, *Lightning Physics and Effects*, Cambridge Univ. Press, N.Y. (2003).
32. A. Bourdon, V. P. Pasko, N. Y. Liu, S. Celestin, P. Segur, and E. Marode, Plasma Sources Sci. Technol. **16**, 656 (2007).
33. A. Luque, U. Ebert, C. Montijn, and W. Hundsdorfer, Appl. Phys. Lett. **90**, 081501 (2007).
34. М. В. Железняк, А. Х. Мнацаканян, С. В. Сизых, ТВТ **20**, 423 (1982).
35. Е. И. Бочков, Л. П. Бабич, И. М. Куцык, ЖЭТФ **144**, 205 (2013) [JETP **117**, 177 (2013)].
36. N. Liu and V. P. Pasko, J. Geophys. Res. **109**, A04301 (2004).
37. B. P. Leonard, Applied Mech. and Eng. **88**, 17 (1991).
38. S. T. Zalesak, J. Comp. Phys. **31**, 335 (1979).