Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 11, стр. 521 — 524 10 июня 1991 г.

НИАБЕЛЕВА $SU(2)$-ГОРЛОВИНА С 7-МЕРНОЙ ВСТАВКОЙ

В.Д.Джунушалиев

Киргизский государственный университет им 50-летия СССР
720024, Фрунзе

Поступила в редакцию 12 апреля 1991 г.

Построен объект, состоящий из двух частей: 1) 4-мерная область вне горизонта событий, являющаяся неабелевой $SU(2)$ черной дырой; 2) область внутри горизонта, являющаяся решением 7-мерных уравнений Эйнштейна - Калузы - Клейна - Янга - Миллса.

1. Введение

В этой работе строится стационарный, несингулярный объект глобально устроенный следующим образом: 1) вне горизонта событий (ГС) он является неабелевой черной дырой с калибровочной группой $SU(2)$, построенной в [1]; 2) внутри горизонта событий это - 7-мерное пространство N^7 (вставка) с евклидовым временем. В этой метрике первые четыре измерения соответствуют обычным координатам эйнштейновского 4-пространства-времени, а оставшиеся являются координатами на калибровочной группе $SU(2)$. Для построения этого объекта необходимо предположить: 1) гравитация действует на всем пространстве N^7, т.е. и на калибровочной группе $SU(2)$; 2) на горизонте событий склеиваются 7-мерные геометрические величины $SU(2)$ вставки с соответствующими величинами в 4-мерном мире, а также с янг-миллсовским $SU(2)$-полем.

2. 7-мерные уравнения Эйнштейна - Калузы - Клейна - Янга - Миллса

Таким образом лагранжиан для вставки N^7 можно записать в следующем виде:

$$L = \sqrt{-G}\left(-\frac{R}{16\pi\gamma} - \frac{1}{4}F^a_{AB}F^{AB}_a\right), \tag{1}$$

где $A, B = 0,1,2,3,4,5,6$; $a = 4,5,6$; R - 7-мерная скалярная кривизна, $(F_{aAB} = \partial_A W_{aB} - \partial_B W_{aA} + \epsilon_{abc} W_{bA} W_{cB})$ - кривизна связности W_{aA}, обусловленная тем, что дополнительные измерения во вставке образуют группу. $F^a_{AB} = h^{ab} F_{bAB}$, h_{ab} - метрика на калибровочной группе $SU(2)$, т.е. метрика в дополнительных измерениях.

7-мерная метрика выбирается в следующем сферически-симметричном виде:

$$ds^2 = -e^{\lambda(t)}dt^2 - e^{-\nu(t)}dR^2 - r^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{\nu(t)}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2), \quad (2)$$

где t - евклидово время; t, θ, ϕ - обычные полярные координаты; y_1, y_2, y_3 - координаты на калибровочной группе $SU(2)$. Неметрическую связность в дополнительных измерениях калибровочной группы $SU(2)$ в полярной системе координат (t, θ, ϕ) ищем в следующем виде [2]:

$$\vec{W}_t = \vec{W}_R = 0,$$

$$\vec{W}_\theta = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\frac{(V(t)-1)}{e} \quad (3)$$

$$\vec{W}_\phi = (-\cos\phi\cos\theta, -\sin\phi\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta\frac{(V(t)-1)}{e},$$

здесь e - калибровочная константа связи.

Поскольку координату t можно подвергнуть произвольному калибровочному преобразованию, то варьирование можно произвести только по λ, ν и V:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{r'^2}{r^2} + \frac{2r'\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \frac{\kappa}{2}e^{-\nu}\left(\frac{(V^2-1)^2}{2r^4} - e^{-\lambda}\frac{V'^2}{r^2}\right), \quad (4)$$

$$\frac{r''}{r} + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{r'\lambda'}{2r} - \frac{e^\lambda}{2r^2} = 0, \quad (5)$$

$$(e^{-\frac{\lambda}{2}}V')' = e^{\frac{\lambda}{2}}\frac{(y^2-1)V}{2}, \quad (6)$$

здесь штрих обозначает производную по $t; \kappa = \frac{16\pi\gamma}{e^2}$.

Интегрирование первых двух уравнений (4) и (5) с некоторыми упрощениями приводит к следующему результату:

$$e^\lambda = r'^2, \quad (7)$$

$$e^\nu = \frac{\alpha}{4}\int_x^{x_H}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 - \frac{(V^2-1)^2}{2x^2}\right]\frac{dx}{x}, \quad (8)$$

здесь введена безразмерная переменная $x = \frac{r}{r_0}$; $x_H = \frac{r_H}{r_0}$,; $\alpha = \frac{\chi}{r_0^2}$; r_0 и r_H - некоторые константы. Уравнения Янга - Миллса (6) после подстановки значения (7) можно переписать в следующем виде:

$$x^2\frac{d^2V}{dx^2} = V(V^2-1) \quad (9)$$

Это уравнение имеет два решения. Первое регулярно при $x = 0$, и его можно разложить в ряд по x при $0 \le x \le 1$

$$-V_1(x) = 1 + \sum_{1=1}^{\infty} a_i\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2i} \quad (10)$$

$a_1 = -1$; $a_2 = 3/10$; для $i > 2$

$$a_i = \frac{3\sum\limits_{j<i} a_{i-j}a_j + \sum\limits_{j+k<i} a_{i-j-k}a_j a_k}{4i^2 - 2i - 2}.$$

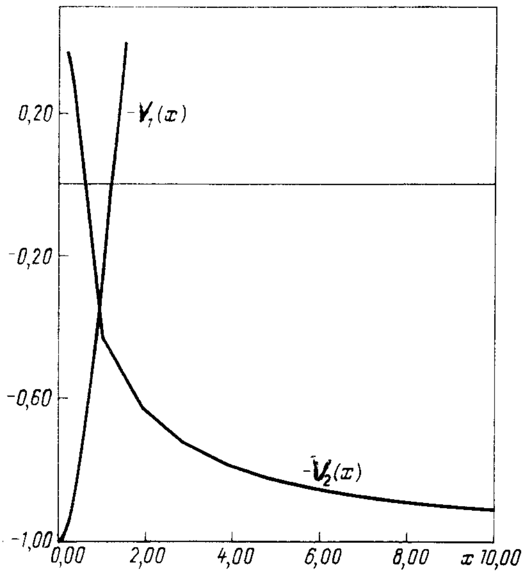
Второе решение регулярно при $x = \infty$ и его можно разложить в ряд:

$$-V_2(1/x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\frac{r_o}{r}\right)^i \tag{11}$$

$1/x < 1$; $a_1 = -1$; $a_2 = 3/4$; для $i > 2$:

$$b_i = \frac{3\sum\limits_{j<i} b_{i-j}b_j + \sum\limits_{j+k<i} b_{i-j-k}b_j b_k}{i^2 + i - 2}$$

Оба эти решения можно численным интегрированием уравнения (9) продолжить за область определения рядов. Результат представлен на рисунке.



Решение $V_1(x)$ - аналитично при $x = 0$.
Решение $V_2(x)$ - аналитично при $x = \infty$

3. Склейка с неабелевой черной дырой

Произведем склейку соответствующих 4-мерных величин внешней области, найденных в [1] и 7-мерных величин внутренней области, найденных выше, следующим образом:

$$g_{\theta\theta}({}_4r = r_H) = r_H = G_{\theta\theta}({}_7r = r_H), \tag{12}$$

$$f({}_4r = r_H) = f_n^*(\alpha) = V({}_7r = r_H) \tag{13}$$

величины, стоящие слева являются 4-мерными, определенными в [1], а справа находятся соответствующие им 7-мерные (определенные на $SU(2)$ вставке); ${}_4r$ - 4-мерная пространственноподобная координата в неабелевой черной дыре [1]; $g_{\mu\nu}$ - 4-мерный метрический тензор ($\mu, \nu = t, r, \theta, \phi$); $f(r)$ - определяет 4-мерное поле Янга - Миллса в области ${}_4r \geq r_H$ аналогично (3); $f({}_4r)$

может принимать на горизонте событий только дискретные значения $f_n^*(\alpha)$, нумеруемые натуральным числом n; r_H - радиус горизонта событий. Легко видеть, что (12) и (13) удовлетворяются. Необходимо отметить, что можно не требовать равенств $g_{rr} = G_{RR}$ и $g_{tt} = G_{tt}$, поскольку в обеих этих парах одна из величин произвольна в силу калибровочной степени свободы координаты $_4r$ или евклидова времени $_5t$. Далее очень важно то, что:

$$G_{y_1y_1} = G_{y_2y_2} = G_{y_3y_3} = 0. \tag{14}$$

Это условие необходимо для того, чтобы дополнительные координаты ($SU(2)$ калибровочная группа) отщепились за горизонтом событий (при $r > r_H$).

4. Обсуждение

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что построены два стационарных, несигнулярных объекта, глобально устроенных следующим образом: 1) имеется 4-мерный "хвост", который является 4-мерной неабелевой черной дырой и расположен за горизонтом событий ($r > r_H$); 2) внутри горизонта событий находится 7-мерная вставка, дополнительными измерениями в которой является калибровочная группа $SU(2)$; 3) на горизонте событий отщепляются дополнительные измерения, происходит скачок размерности, а евклидово время становится эйнштейновским. Аналогичный частицеподобный объект: горловина с внешней областью, являющейся стационарной частью решения Райсснера - Нордстрема и с $U(1)$-вставкой, был построен в [3]. Но в отличие от объекта, полученного здесь, на поверхности горизонта событий горловины с $U(1)$-вставкой сигнатура метрики не меняется, происходит только скачок размерности.

Литература

1. Волков М.С., Гальцов Д.В. ЯФ, 1990, 51, 1171.
2. Van Nienwenhuizen P., Wilkinson D., Perry M.J. Phys. Rev. D, 1975, 12, 778.
3. Джунушалиев В.Д. Дополнительные координаты в многомерии как координаты на калибровочной группе. Деп. в ВИНИТИ 10.04.90, N2005-B90.