Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 9, с. 597 – 600

Энергетический портрет волн-убийц

В. Е. Захаров[△+∗×1)], *Р. В. Шамин*[∗○∇1)], *А. В. Юдин*[○∇1)]

[△] *Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, USA*

[+] *Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[∗] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[×] *Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия*

[○] *Сахалинский государственный университет, 693000 Южно-Сахалинск, Россия*

[∇] *Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 марта 2014 г.

С помощью вычислительных экспериментов, основанных на точных уравнениях гидродинамики идеальной жидкости, изучаются процессы концентрации энергии при образовании волн-убийц. На примере вычислительного эксперимента показано распределение аномалий волн как по высоте, так и по энергии. Установлена взаимосвязь между значениями концентраций энергии и высоты аномально больших поверхностных волн. Полученные результаты могут быть использованы для оценки опасности аномально больших поверхностных волн.

DOI: 10.7868/S0370274X14090057

1. Введение. Волны-убийцы представляют собой внезапные одиночные поверхностные волны большой высоты (до 30 м). Их внезапность и большая амплитуда несет серьезную опасность для морских объектов. Изучение этих волн началось в последние десятилетия. Единой теории экстремальных волн до сих пор нет. Волны-убийцы представляют не только прикладной, но и теоретический интерес [1, 2].

В последнее время наиболее популярным становится изучение волн-убийц на основе вычислительных экспериментов [3–8]. В наших предыдущих работах с помощью численных опытов мы рассматривали статистику волн-убийц, возникающих в результате нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости [9, 10]. В настоящей работе на основании вычислительных экспериментов проведена количественная оценка процессов концентрации энергии и импульса. Возможности численного моделирования волн-убийц позволяют “заглянуть внутрь” процессов, протекающих при их образовании.

2. Вычислительные эксперименты. В наших вычислительных экспериментах рассматривались волны, бегущие в одну сторону, что соответствует волнам зыби в океане. Эксперименты основывались на численном решении уравнения Эйлера для идеальной жидкости со свободной поверхностью и бесконечной глубиной в 2D-геометрии:

$$-\infty < y < \eta(x,t),$$

$$0 < x < 2\pi.$$

Граничные условия по переменной x были 2π-периодическими. Предполагалось, что течение является потенциальным, а жидкость – несжимаемой. Отсюда

$$v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t), \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Таким образом, потенциал поля скоростей жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi(x,y,t) = 0.$$

Для организации численного счета мы использовали уравнения в конформных переменных, полученные в работе [11]. В работах [12–14] рассматривались математические вопросы корректности этих уравнений, а также проблемы численных расчетов. Уравнения в конформных переменных позволяют проводить нужные нам вычислительные эксперименты с высокой точностью на больших временных интервалах и наблюдать возникновение волн-убийц.

Мы осуществляли конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость (с координатами $w = u + iv$). Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

1) e-mail: zakharov@math.arizona.edu; roman@shamin.ru; yudinorel@gmail.com

Динамические уравнения записывались для переменных Дьяченко:

$$R = \frac{1}{z'_w}, \quad V = i\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Они имели форму

$$\dot{R}(u,t) = i(UR' - U'R) - \alpha R'''',$$
$$\dot{V}(u,t) = i(UV' - B'R) + g(R-1) - \alpha V'''' + F,$$
$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R),$$
$$B = P(V\bar{V}),$$

где P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость, $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$; H — аналог оператора Гильберта для периодического случая:

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan[(u'-u)/2]}du'.$$

В этих уравнениях мы использовали диссипацию для учета возможности обрушения волн в ходе эволюции, а также накачку энергии. Последняя служила для поддержания одинакового уровня энергии в течение всего эксперимента и включалась, когда энергия системы падала ниже необходимого уровня. Указанная диссипация использовалась в нашей предыдущей работе [10]. Форма накачки была модифицирована с целью придания ей физического смысла. Накачка имеет смысл поверхностной силы, действующей на свободную поверхность и пропорциональной наклону поверхности:

$$F = F_w \left|\frac{dy}{dx}\right|.$$

Коэффициенты α и F_w подбирались эмпирически так, чтобы в системе поддерживался заданный уровень энергии. Использование диссипации и накачки позволяет проводить вычисления на практически неограниченном временном интервале.

Обычно волны-убийцы регистрируются на основе амплитудного критерия

$$\nu(t) = \frac{H_{\max}(t)}{H_s(t)} \geq \nu^* = 2.1,$$

где $H_{\max}$ – максимальная высота, а H_s – значительная высота волнения (среднее от трети самых высоких волн). Критическое значение $\nu^* = 2.1$ выбрано эмпирически. Оно используется во многих работах, посвященных волнам-убийцам [1].

3. Энергетические характеристики отдельных волн. В наших вычислительных экспериментах мы рассматриваем периодический по пространственной переменной цуг волн. При этом профиль свободной поверхности задается функцией $y = y(x,t)$, являющейся 2π-периодической по переменной x. Будем называть отдельной волной область, расположенную между двумя локальными минимумами свободной поверхности.

Для каждой волны можно вычислить энергию E (кинетическую, T, и потенциальную, U), а также модуль импульса I (модуль горизонтальной, I_x, и вертикальной, I_y, проекции импульса) с помощью формул гидродинамики. Кроме того, мы вычисляли и геометрические характеристики отдельных волн (амплитуду A, крутизну M, кривизну C).

Для каждой характеристики мы рассчитывали числовой показатель, называемый концентрацией этой характеристики, как отношение ее максимального значения к среднему значению всех волн в цуге в фиксированный момент времени:

$$C_X = \frac{X_{\max}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i},$$

где X_i $(i = 1, \ldots, N)$ – характеристики отдельных волн, $X_{\max} = \max\limits_i X_i$.

4. Пример образования волны-убийцы. Ранее в работах [9, 10] мы приводили масштабные вычислительные эксперименты по моделированию нелинейной динамики поверхностных волн с целью изучения статистики возникновения волн-убийц. При образовании экстремальных волн наблюдаются процессы концентрации энергии и импульса. Концентрация часто происходит по однотипному сценарию.

Рассмотрим характерный пример формирования волны-убийцы. В данном эксперименте начальное поле волнения состояло из цуга 53 волн, бегущих в одну сторону. Квадрат средней крутизны имел значение $\mu^2 = 3.72 \cdot 10^{-3}$. Длительность эксперимента составляла примерно 3525 периодов. Через 1412 периодов возникла волна-убийца. Профиль свободной поверхности на этот момент приведен на рис. 1. Значение функционала ν достигало

$$\nu(t^*) = 2.26.$$

Рассмотрим концентрацию полной энергии в момент образования волны-убийцы (рис. 2). Для наглядности на рисунке также приведена концентрация энергии в начальный момент времени. Из рис. 2 видно, что если в начальный момент времени распределение концентрации близко к линейной функции, то в момент образования волны-убийцы самая боль-

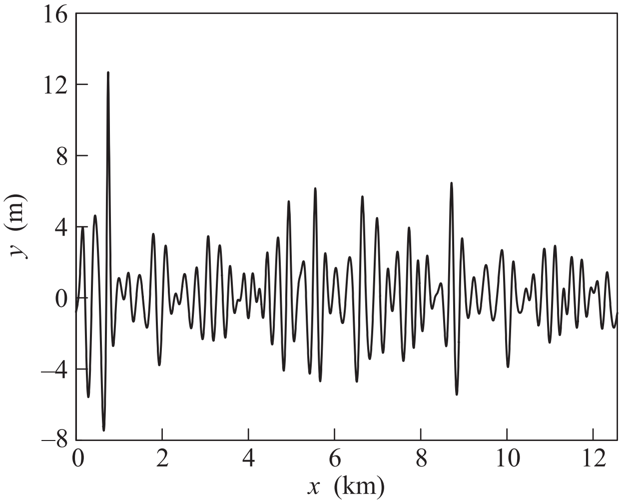

Рис. 1. Профиль типичной волны-убийцы

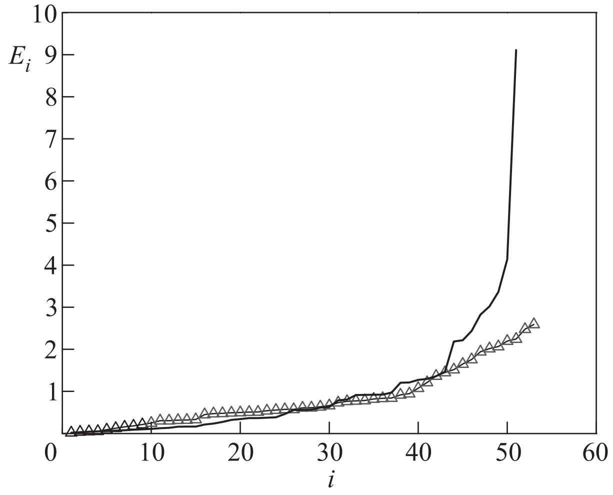

Рис. 2. Концентрация энергии: тонкая линия с треугольниками – в начальный момент, толстая – в момент образования волны-убийцы

шая волна концентрирует в себе большую часть энергии. Концентрация энергии $C_E = 9.1$. Аналогичная картина характерна и для импульса волны-убийцы.

Теперь рассмотрим совместное двумерное распределение параметра ν и концентрации полной энергии C_E для самой большой волны в каждый момент времени вычислительного эксперимента. Подавляющее большинство (около 98 %) реализаций $\nu_{\max}$, $C_{E_{\max}}$ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей. Эти величины распределены следующим образом: $\nu_{\max} \sim N(1.54,\ 2.6\cdot 10^{-2})$, $C_{E_{\max}} \sim \sim N(4.8,\ 0.895)$. Коэффициент корреляции между этими величинами $r = 0.85$.

Построим эллипс рассеяния для данного примера, который имеет эксцентриситет $e = 0.985$ и эллиптичность $k = 0.029$ (рис. 3). Точки внутри эллипса

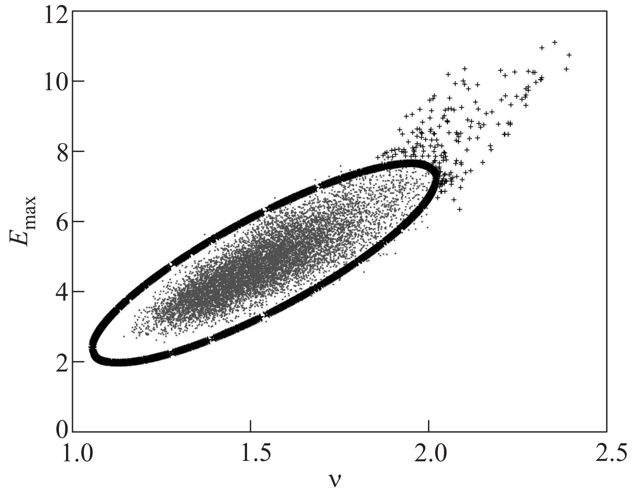

Рис. 3. Диаграмма совместного распределения параметров $\nu_{\max}$ и $E_{\max}$

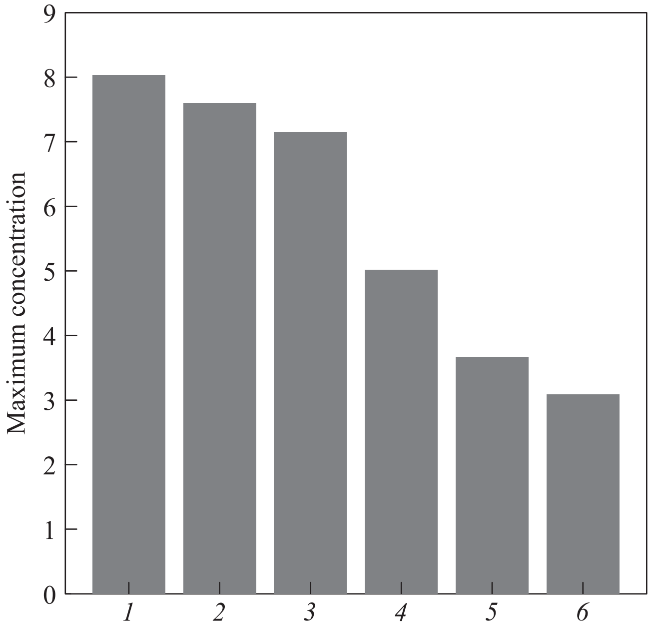

Рис. 4. Средние максимальные концентрации: *1* – кинетической энергии, *2* – полной энергии, *3* – потенциальной энергии, *4* – вертикального импульса, *5* – горизонтального импульса, *6* – модуль импульса

соответствуют парам $\{\nu_{\max}, C_{E_{\max}}\}$, распределенным по нормальному двумерному закону. Точки вне эллипса отвечают парам $\{\nu_{\max}, C_{E_{\max}}\}$, не удовлетворяющим нормальному закону. Они соответствуют, аномальным волнам, имеющим или аномально большую высоту, или аномально высокую энергию. Заметим, что наблюдаются их отклонения лишь в большую сторону.

На рис. 4 приведна гистограмма значений концентрации энергии и импульса, построенная по результатам большой серии вычислительных экспериментов с различными параметрами начального волнения. На этой гистограмме показаны средние значения максимальной концентрации характеристик в момент образования волны-убийцы.

Можно также построить регрессионную зависимость между значениями концентрации высоты волны-убийцы и концентрации ее энергии. По итогам большой серии вычислительных экспериментов мы фиксировали значения концентраций высоты и энергии для волн-убийц в тот момент времени, когда значение параметра ν для них было максимальным. Полученная регрессионная зависимость представлена на рис. 5. Уравнение линейной регрессии имеет

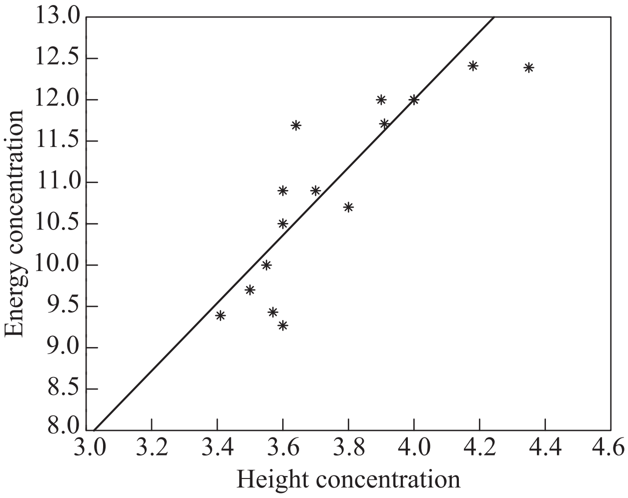

Рис. 5. Регрессионная зависимость между значениями концентраций высоты и энергии волн-убийц

вид $y = 4.1x - 4.4$. Коэффициент линейной детерминации $R^2 = 0.834$.

5. Заключение. Итак, в настоящей работе с помощью вычислительных экспериментов были рассмотрены нелинейные процессы локальной концентрации энергии в момент формирования экстремальных поверхностных волн – волн-убийц. Получены количественные оценки этих процессов. Показано, что одиночная аномально большая волна может концентрировать в себе энергию, на порядок большую, чем средняя энергия окрестных волн.

Продемонстрирована значительная корреляция между амплитудным критерием волны-убийцы и концентрацией энергии. Это позволяет по-новому взглянуть на определение волны-убийцы.

Авторы выражают благодарность профессору Е.Н. Пелиновскому за полезные обсуждения результатов статьи. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор # 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

1. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, sl Rogue Waves in the Ocean, Springer (2009), 216 p.
2. I. Nikolkina and I. Didenkulova, Nat. Hazards Earth Syst. Sci. **11**, 2913 (2011).
3. K. L. Henderson, D. H. Pelegrine, and J. W. Dold, Wave Motion **29**, 341 (1999).
4. W. J. D. Baterman, C. Swan, and P. H. Taylor, J. Comput. Physics **174**, 277 (2001).
5. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **88**(5), 356 (2008).
6. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and R. V. Shamin, Eur. Phys. J.: Special Topics **185**(1), 113 (2010).
7. D. Chalikov, Phys. Fluids. **21**(7), 076602-1 (2009).
8. Р. В. Шамин, А. В. Юдин, ДАН **448**(5), 592 (2013).
9. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, Письма в ЖЭТФ **91**(2), 68 (2010).
10. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, Письма в ЖЭТФ **96**(1), 68 (2012).
11. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Eur. J. Mech. B Fluids **21**, 283 (2002).
12. R. V. Shamin, J. Math. Sci. **160**(5), 537 (2009).
13. Р. В. Шамин, ДАН **406**(5), 112 (2006).
14. Р. В. Шамин, Сиб. жур. вычисл. матем. **9**(4), 379 (2006).