Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 10, с. 664 – 668 © 2014 г. 25 мая

Вероятность нарушения условия $\mathcal{PT}$-симметрии при столкновении бризеров со случайными фазами в модели плоского $\mathcal{PT}$-симметричного каплера

Л. Х. Рысаева[+], *С. В. Сучков*[*×1)], *С. В. Дмитриев*[*○]

[+]*Башкирский государственный университет, 450074 Уфа, Россия*

[*]*Институт проблем сверхпластичности металлов, 450001 Уфа, Россия*

[×]*Nonlinear Physics Centre, Australian Nation University, ACT 0200 Canberra, Australia*

[○]*С.-Петербургский государственный политехнический университет, 195251 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 21 апреля 2014 г.

Исследовано взаимодействие бризеров в модели нелинейного плоского $\mathcal{PT}$-симметричного каплера. Показано, что динамика взаимодействия существенно зависит от относительной фазы бризеров. Для различных наборов параметров модели и параметров бризеров оценена вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии в случае столкновения бризеров, имеющих случайные начальные фазы. Описаны различные сценарии столкновения бризеров.

DOI: 10.7868/S0370274X1410004X

1. Введение. Сравнительно недавно было показано, что системы с неэрмитовыми гамильтонианами могут обладать полностью вещественным спектром собственных значений, если они обладают свойством $\mathcal{PT}$-симметрии [1]. Необходимым условием $\mathcal{PT}$-симметрии в таких системах является следующее свойство потенциала, связанного с системой: $V(x) = V^*(-x)$, где звездочка означает комплексное сопряжение. Известно, что распространение света в прозрачной среде описывается уравнением, подобным уравнению Шредингера. Поэтому теория $\mathcal{PT}$-симметричных систем может быть использована и в оптике, если показатель преломления оптической системы обладает данной симметрией: $n(x) = n^*(-x)$. Комплекснозначность показателя преломления с физической точки зрения означает, что в системе присутствуют потери и усиления. Таким образом, оптические системы с областями усиления и потерь могут допускать решения в виде мод, энергия которых сохраняется в среднем.

Изучение $\mathcal{PT}$-симметричных оптических систем является актуальной задачей, поскольку, как было показано в недавних экспериментальных [2, 3] и теоретических [4–12] работах, они предоставляют новые возможности по управлению и контролю оптическими сигналами. Кроме оптических $\mathcal{PT}$-симметричных систем, рассматриваются также электрические [13, 14] и механические [15] модели со сбалансированным притоком и оттоком энергии, в том числе и модели, описываемые уравнениями типа Клейна-Гордона [16].

Системы с $\mathcal{PT}$-симметрией демонстрируют хорошо известный эффект, часто называемый фазовым переходом: несмотря на соблюдение необходимого условия вещественности спектра, при превышении порогового значения интенсивности поля или интенсивности усиления/потерь в спектре появляются мнимые значения и система теряет устойчивость [1]. В этом случае нарушается баланс между усилением и потерями, что в оптических системах приводит к неограниченному росту интенсивности света.

В работе [7] изучался $\mathcal{PT}$-симметричный оптический каплер. Он представляет собой пару взаимодействующих волноводов, в одном из которых происходит усиление, а в другом имеют место сбалансированные потери. Для данной модели, описываемой системой двух нелинейных уравнений Шредингера, для различных начальных значений входящего сигнала исследовано распространение света, а также определен порог нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии. В нелинейном случае под порогом нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии понимаются критические значения параметров решения, при которых начинает наблюдаться неустойчивая динамика данного решения, выраженная в безграничном росте суммарной интенсивности. Таким образом, порог нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии

1)e-mail: sergey.v.suchkov@gmail.com

определяется для каждой отдельно взятой нелинейной моды. Позднее в работах [8–10] исследовалась более сложная модель плоского $\mathcal{PT}$-симметричного каплера. Было показано, что она допускает бризерные решения. В работе [11] получены аналитические приближения для бризерных решений в плоском $\mathcal{PT}$-симметричном каплере и приведены некоторые способы их возбуждения.

Известно, что результат столкновения солитонов, описываемых нелинейным уравнением Шредингера, в присутствии неинтегрируемых возмущений существенно зависит от относительной фазы сталкивающихся солитонов [17 18]. Бризеры в плоском $\mathcal{PT}$-симметричном каплере могут двигаться. Возникает естественный вопрос о результате их столкновения друг с другом. Столкновение бризеров способно вызывать локальное повышение интенсивности света. Это, в свою очередь, может приводить к неустойчивой динамике, связанной с превышением порога $\mathcal{PT}$-симметрии.

В данной работе анализируется результат столкновения бризеров в плоском $\mathcal{PT}$-симметричном каплере в зависимости от их относительной фазы. Численно оценивается вероятность превышения порога $\mathcal{PT}$-симметрии для бризеров, сталкивающихся со случайно выбранной относительной фазой.

2. Описание модели. Рассматриваемая модель представляет собой две взаимосвязанные прозрачные плоскости, в одной из которых происходит усиление светового сигнала, а в другой присутствуют потери энергии. Свет распространяется вдоль направления t и испытывает дисперсию в направлении x. Данная структура схематично изображена на рис. 1.

Рис. 1. Плоский $\mathcal{PT}$-симметричный каплер. В верхней плоскости происходит оптическое усиление, в нижней имеют место потери

Распространение света в такой модели описывается системой двух связанных нелинейных уравнений Шредингера:

$$u_t = \gamma u + iu_{xx} + 2i|u|^2 u + iv\,,$$
$$v_t = -\gamma v + iv_{xx} + 2i|v|^2 v + iv\,. \qquad (1)$$

Здесь γ – коэффициент усиления и потерь, u и v – огибающие электрического поля в волноводе с усилением и потерями соответственно.

3. Бризерные решения. В работе [11] было получено следующее приближенное бризерное решение:

$$u(x,t) = a + b,$$
$$v(x,t) = e^{i\theta} b - e^{-i\theta} a,$$
$$a = \sqrt{\epsilon}(A_0 + \epsilon A_1), \quad b = \sqrt{\epsilon}(B_0 + \epsilon B_1). \qquad (2)$$

Здесь

$$A_0 = \frac{\epsilon^{-i(\omega_0-\epsilon)t}}{\sqrt{3}} \mathrm{sech}(\sqrt{\epsilon}x)\left\{1 - \frac{\epsilon}{102\omega_0}[6 + sech^2(\sqrt{\epsilon}x)]\right\},$$

$$B_0 = \frac{\epsilon^{-i(\omega_0+\epsilon)t}}{\sqrt{3}} \mathrm{sech}(\sqrt{\epsilon}x)\left\{1 + \frac{\epsilon}{102\omega_0}[6 + \mathrm{sech}^2(\sqrt{\epsilon}x)]\right\},$$

$$A_1 = \frac{e^{i\epsilon t}}{6\sqrt{3}\omega_0} \mathrm{sech}^3(\sqrt{\epsilon}x)[e^{i(3\omega_0 t + 2\theta)} - 4i\gamma e^{-i(3\omega_0 t+\theta)}],$$

$$B_1 = \frac{e^{i\epsilon t}}{\sqrt{3}\omega_0} \mathrm{sech}^3(\sqrt{\epsilon}x)[e^{i(3\omega_0 t + 2\theta)} + 4i\gamma e^{-i(3\omega_0 t+\theta)}], \quad (3)$$

где $\theta = \arcsin\gamma$, $\omega_0 = \cos\theta$, параметр ϵ определяет амплитуду колебания бризера. С использованием преобразования Галилея решение для неподвижного бризера (2), (3) можно трансформировать в решение, описывающее бризер, движущийся со скоростью V. При исследовании столкновений между бризерами в нулевой момент времени задавались два бризера, находящиеся на достаточно большом расстоянии друг от друга и движущиеся навстречу друг другу со скоростями $\pm V$.

Бризерные решения в $\mathcal{PT}$-симметричных моделях интересны тем, что их интенсивность периодически изменяется как функция t, что в принципе может нарушить $\mathcal{PT}$-симметрию данной моды и привести к бесконечному росту интенсивности света. Однако при определенных значениях параметров модели и бризера энергия бризера в среднем сохраняется благодаря балансу между усилением и потерями. Это позволяет бризерному решению распространяться на большие расстояния без заметного изменения своей формы. В рассматриваемой модели бризерное решение является более общим, чем солитонное решение [11]. В процессе передачи информации интересным вопросом оказывается динамика взаимодействия сигналов в системе. Для $\mathcal{PT}$-симметричных систем она приобретает особую важность в силу возможности нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при взаимодействии бризеров.

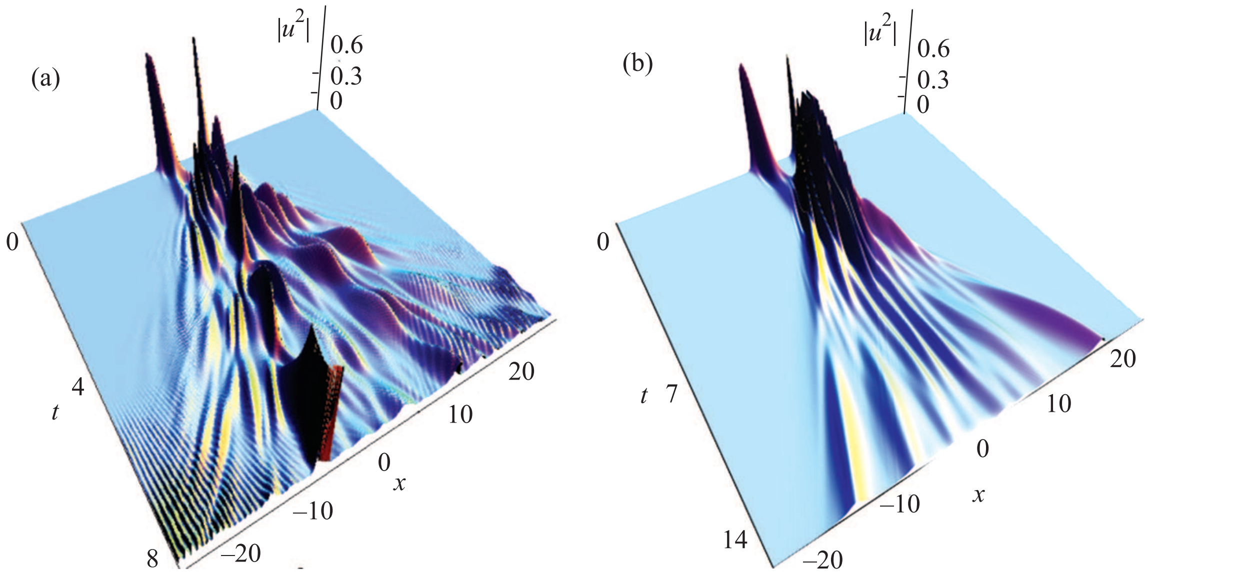

Рис. 2. Примеры взаимодействия пары бризеров в $\mathcal{PT}$-симметричном планарном волноводе с параметром усиления/потерь $\gamma = 0.5$ (a) и 0.9 (b). Разности фаз бризеров равны нулю. Их начальные скорости и амплитуды составляют $V = \pm 3$, $A = 0.5$ (a) и $V = \pm 2$, $A = 0.3$ (b)

В численных расчетах разность фаз сталкивающихся бризеров контролировалась путем задания в формулах (2), (3) начальных значений времени $t = t_1$ и $t = t_2$ для двух бризеров.

На рис. 2 приведены примеры взаимодействия двух бризерных сигналов, имеющих следующие значения разности фаз, начальных скоростей и амплитуд: $t_2 - t_1 = 1701$, $V = \pm 3$, $A = 0.5$ (a) и $t_2 - t_1 = 1399$, $V = \pm 2$, $A = 0.3$ (b). Величина коэффициента усиления и потерь в модели равнялась $\gamma = 0.95$ (a) и $\gamma = 0.9$ (b). На панели (a) в результате взаимодействия двух бризеров происходит спонтанное нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии. Оно выражается в безграничном росте интенсивности света. На панели (b) образовалось несколько бризеров с меньшей амплитудой. На данном рисунке приведена динамика света (т.е. как распределение интенсивности света в прозрачной среде) в волноводе с усилением. В волноводе с потерями наблюдается подобная же картина за исключением точки перехода системы в режим с нарушенной $\mathcal{PT}$-симметрией, когда вслед за вре́менным уменьшением интенсивности происходит ее неограниченный рост, как и в волноводе с усилением.

Как отмечалось выше, результат столкновения бризеров существенно зависит от относительной фазы взаимодействующих сигналов. Однако в реальных физических системах ее весьма сложно контролировать. Поэтому естественно оценивать вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при взаимодействии бризерных объектов, считая их относительную фазу случайной величиной. Отметим, что хотя амплитуда бризерного сигнала обладает периодом $T = \pi/\omega_0$, решение (2), (3), вообще говоря, апериодично из-за несоразмерности периода изменения амплитуды бризера и периода несущего поля. Выбирая t_1, t_2 случайным образом из интервала, содержащего большое количество T, можно оценить вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при случайном выборе относительной фазы бризеров. В данной работе начальная фаза каждого из взаимодействующих бризеров выбиралась случайным образом из интервала $[0, 2000]$. При этом величина T лежала в диапазоне от 3 до 10.

4. Результаты и выводы. Вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при взаимодействии двух бризеров со случайными фазами как функция параметра усиления/потерь γ была определена для трех значений скоростей бризеров ($V = \{1, 2, 3\}$) и двух значений амплитуд ($A = \{0.3, 0.5\}$). Для каждого набора параметров было проведено по 1000 численных экспериментов со случайным выбором фаз бризеров. В результате получены зависимости, представленные на рис. 3. (Здесь вероятность P нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии выражена в процентах.)

При увеличении скорости столкновения бризеров вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии снижается (рис. 3), поскольку время взаимодействия бризеров при этом уменьшается. При увеличении амплитуды бризеров вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии возрастает (ср. рис. 3a и b), так как амплитуда каж-

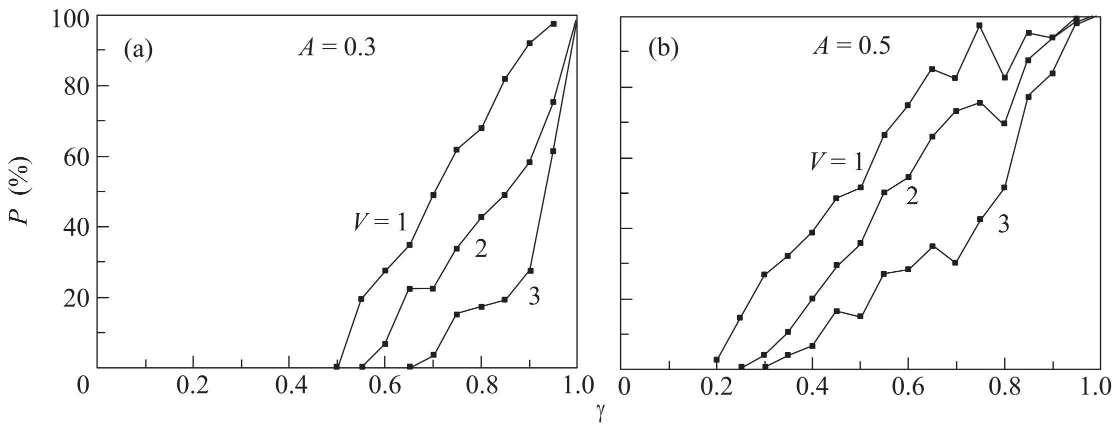

Рис. 3. Зависимости вероятности нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии от коэффициента усиления и потерь γ для амплитуд сталкивающихся бризеров $A = 0.3$ (a) и $A = 0.5$ (b) для различных значений скоростей бризеров, указанных для каждой кривой

дого бризера приближается к критическому значению $\gamma_{\rm crit} = 1$, при котором $\mathcal{PT}$-симметрия отдельных бризерных сигналов нарушается [11]. Для выбранных значений V и A вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии растет с увеличением параметра усиления/потерь γ, начиная с некоторого порогового значения, ниже которого $P = 0$. Пороговое значение параметра γ зависит от V и A. Немонотонность роста P с ростом γ на рис. 3b, по-видимому, связана с недостаточно большой статистической выборкой. Определив таким образом параметры, при которых $\mathcal{PT}$-симметрия мод не нарушается для любых относительных фаз ($P = 0$), можно гарантировать сохранение передаваемой в системе информации. Построенные зависимости также дают важную информацию о поведении системы при значениях γ, близких к критическим, ($\gamma_{\rm crit} = 1$), при которых нарушается $\mathcal{PT}$-симметрия линейного аналога системы (1). Оказывается, что при данных значениях γ существует ненулевая вероятность сохранения $\mathcal{PT}$-симметрии. Такое поведение характерно для узкого интервала параметров бризеров, при которых их взаимодействие является практически упругим. Последнее позволяет им проходить друг через друга, не испытывая усиления интенсивности.

В результате моделирования были определены следующие возможные сценарии столкновения бризеров: нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии (см. рис. 2a), образование нескольких бризеров (см.рис. 2b), разрушение бризеров, объединение в один импульс и практически упругое взаимодействие.

Иакт, в данной работе путем численного решения системы уравнений (1) исследовано взаимодействие бризерных сигналов для различных параметров модели и параметров сигналов. Оценена вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при взаимодействии бризерных сигналов, имеющих случайную относительную фазу. Для выбранных значений V и A данная вероятность монотонно растет с увеличением γ, начиная с некоторого порогового значения, ниже которого она равна нулю. Пороговое значение параметра γ зависит от V и A. При фиксированном γ вероятность нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии растет с увеличением A и с уменьшением V. Определены основные сценарии взаимодействия бризеров. Полученные результаты показывают существенное влияние относительной фазы на динамику взаимодействия бризеров, что для $\mathcal{PT}$-симметричных систем приобретает особую важность в связи с возможностью нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии при столкновении бризеров.

Авторы признательны А.А. Сухорукову, И.В. Барашенкову и Ю.С. Кившарю за плодотворные обсуждения данной работы. Сучков С.В. также благодарит некоммерческий фонд “Династия” за оказанную финансовую поддержку.

1. C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
2. C. E. Ruter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, and D. Kip, Nat. Phys. **6**, 192 (2010).
3. A. Guo, G. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. Siviloglou, and D. Cristodoulides, Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2011).
4. Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. **100**, 244019 (2008).
5. K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Chistodoulides, and Z. H. Musslimani, Phys. Rev. A **81**, 63807 (2010).

6. M. Kulishov and B. Kress, Opt. Express **21**, 22327 (2013).
7. A. A. Sukhorukov, Z. Y. Xu, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **82**, 043818 (2010).
8. S. V. Suchkov, B. A. Malomed, S. V. Dmitriev, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. E **84**, 046609 (2011).
9. R. Driben and B. A. Malomed, Opt. Lett. **36**, 4323 (2011).
10. N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **85**, 063837 (2012).
11. I. V. Barashenkov, S. V. Suchkov, A. A. Sukhorukov, S. V. Dmitriev, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **86**, 053809 (2012).
12. K. Li, D. A. Zezyulin, P. G. Kevrekidis, V. V. Konotop, and F. K. Abdullaev, Phys. Rev. A **88**, 053820 (2013).
13. J. Schindler, A. Li, M. Zheng, F. Ellis, and T. Kottos, Phys. Rev. A **84**, 040101 (2010).
14. J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, A. Saxena, and A. Khare, Phys. Rev. A **88**, 032108 (2013).
15. C. M. Bender, B. Berntson, D. Parker, and E. Samuel, Am. J. Phys. **81**, 173 (2013).
16. P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **89**, 010102(R) (2014).
17. S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. E **68**, 056603 (2003).
18. S. V. Dmitriev and T. Shigenari, Chaos **12**, 324 (2002).