Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 11, с. 729 – 734 © 2014 г. 10 июня

Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле

Н. М. Зубарев+1), Е. А. Кочурин**

*Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

+Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 апреля 2014 г.

Рассмотрена нелинейная динамика свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости со значительной проницаемостью в сильном горизонтальном электрическом поле. Продемонстрировано, что взаимодействие встречных уединенных волн произвольной геометрии является упругим: они сохраняют свою энергию и импульс. С использованием конформных переменных осуществлено численное моделирование взаимодействия волн. Показано, что в результате взаимодействия волны деформируются, причем для волн относительно малой амплитуды этот эффект является слабым: для встречных волн одинаковой формы деформация определяется четвертой степенью их амплитуды. При многократном столкновении сильно нелинейных волн наблюдается тенденция к формированию особенностей – точек со значительной плотностью энергии поля.

DOI: 10.7868/S0370274X14110046

1. Введение. В работах [1, 2] было обнаружено, что нелинейные волны произвольной геометрии могут распространяться без искажений по поверхности жидкого диэлектрика со значительной проницаемостью по направлению, либо по отдельности, против направления приложенного сильного горизонтального электрического поля. Взаимодействие возможно только между встречными волнами.

В настоящей работе продемонстрировано, что взаимодействие встречных уединенных волн обладает следующим фундаментальным свойством: энергия и импульс каждой волны остаются неизменными, т.е. их взаимодействие можно считать упругим. В результате столкновения форма волн меняется, причем степень их деформации определяется нелинейностью как минимум четвертого порядка (т.е. взаимодействие является весьма слабым). Аналитическое исследование волн с учетом нелинейностей столь высокого порядка затруднительно. Для анализа взаимодействия волн требуется прямое численное моделирование динамики жидкости без ограничений на амплитуду возмущений поверхности. Соответствующие уравнения движения интегрировались с использованием конформных переменных в рамках подхода, развиваемого в работах [3–5].

2. Исходные уравнения. Рассмотрим потенциальное течение несжимаемой идеальной диэлектрической (непроводящей) жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью, помещенной во внешнее однородное горизонтальное электрическое поле. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $y = 0$ (ось x прямоугольной системы координат лежит в этой плоскости, а ось y направлена по нормали к ней). Пусть функция $\eta(x,t)$ задает отклонение границы от плоской, т.е. уравнение $y = \eta$ определяет профиль поверхности. Положим, что напряженность электрического поля направлена по оси x и по абсолютной величине равна E.

Будем рассматривать случай, когда диэлектрическая проницаемость жидкости велика: $\varepsilon \gg 1$. Как было показано в [1, 2] и использовано, например, в [6], в этом пределе нормальная компонента электрического поля в жидкости оказывается много меньше тангенциальной компоненты. Это означает, что силовые линии поля внутри жидкости будут направлены по касательной к ее поверхности. Тогда задача о распределении поля в жидкости может быть решена без учета распределения поля над ней.

Выпишем соответствующие этой ситуации уравнения движения. Потенциал скорости жидкости ϕ и потенциал электрического поля φ удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2\phi = 0, \qquad \nabla^2\varphi = 0.$$

1)e-mail: nick@iep.uran.ru

Их следует решать совместно со следующими условиями на границе и на бесконечности:

$$\phi_t + (\nabla\phi)^2/2 = (P_E - P_0)/\rho, \qquad y = \eta(x,t), \qquad (1)$$

$$\varphi_y - \eta_x\varphi_x = 0, \qquad y = \eta(x,t),$$

$$\phi \to 0, \qquad \varphi \to -Ex, \qquad y \to -\infty,$$

где ρ – плотность жидкости, P_E – электростатическое давление, для которого в пределе $\varepsilon \gg 1$ имеем $P_E \approx \varepsilon(\nabla\varphi)^2/(8\pi)$, а $P_0 = \varepsilon E^2/(8\pi)$ – константа, совпадающая с плотностью энергии внешнего электрического поля в жидкости. Нестационарное уравнение Бернулли (1) приведено для предела сильного поля (подробнее см. [2]), в котором движение границы определяется электростатическими силами (капиллярные и гравитационные силы не учитываются). Уравнения движения замыкаются кинематическим соотношением:

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x\phi_x, \qquad y = \eta(x,t).$$

Важно отметить, что в рамках этих уравнений распространение линейных поверхностных волн будет бездисперсионным [1, 2]. Они распространяются без искажений со скоростью $c = \sqrt{2P_0/\rho}$. Для удобства дальнейшего рассмотрения перейдем к безразмерным обозначениям посредством замен

$$\phi \to \lambda c\,\phi, \qquad \varphi \to \lambda E\,\varphi, \qquad \eta \to \lambda\,\eta,$$

$$x \to \lambda\,x, \qquad y \to \lambda\,y, \qquad t \to \lambda c^{-1}\,t,$$

где λ – характерная длина волны. В новых переменных скорость линейных волн будет равна единице.

3. Конформные переменные. Уравнения движения, приведенные выше, имеют размерность $2+1$. Эффективным способом понизить их размерность является использование конформных переменных. По аналогии с работами [1, 3–5] совершим конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в параметрическую полуплоскость $-\infty < v \le 0$ и $-\infty < u < +\infty$. В исследуемой задаче вспомогательные переменные u и v имеют конкретный физический смысл: u с точностью до знака совпадает с потенциалом поля φ, а условие $v = \text{const}$ определяет силовые линии электрического поля. В новых переменных уравнения Лапласа для потенциалов электрического поля и скорости могут быть решены аналитически. В результате исходная задача на движение жидкости может быть сведена к задаче о движении ее свободной поверхности, имеющей более низкую размерность $(1+1)$.

Поверхность жидкости в новых переменных задается параметрическими выражениями

$$y = Y(u,t), \qquad x = X(u,t) = u - \hat{H}Y, \qquad (2)$$

где $\hat{H}$ – оператор Гильберта, определяемый как

$$\hat{H}f(u) = \frac{1}{\pi}\,\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{u-u'}\,du'.$$

Связь между функциями $\eta(x,t)$ и $Y(u,t)$ задается неявным соотношением

$$Y(u,t) = \eta\left(u - \hat{H}Y,\, t\right).$$

Уравнения движения границы могут быть представлены в следующем виде (см. также [1, 7]):

$$Y_tX_u - Y_uX_t = -\hat{H}\Psi_u, \qquad (3)$$

$$\Psi_tX_u - \Psi_uX_t - \hat{H}(Y_u\Psi_t - Y_t\Psi_u) = \hat{H}Y_u, \qquad (4)$$

где функция $\Psi(u,t)$ определяет значение потенциала скорости на границе $v = 0$. За влияние электрического поля в этой системе отвечает линейный член в правой части второго уравнения.

Для дальнейшего рассмотрения важно, что для уравнений (3) и (4) интегралами движения являются полная энергия системы H и импульс вдоль горизонтальной оси P (без электрического поля см. [4, 5]):

$$H = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\Psi\hat{H}\Psi_u + Y\hat{H}Y_u)\,du, \quad P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi Y_u\,du.$$

Для удобства численного решения систему (3) и (4) следует разрешить относительно производных по времени от функций Y и Ψ (применительно к капиллярно-гравитационным волнам эта процедура описана в [3]). Для этого введем комплексные функции

$$Z = X + iY = u + 2i\hat{P}Y, \qquad \Phi = 2\hat{P}\Psi,$$

аналитические в нижней полуплоскости комплексной переменной u (здесь $\hat{P} = (1+i\hat{H})/2$ – проектор). В итоге уравнения движения границы примут вид

$$Z_t = iUZ_u, \qquad (5)$$

$$\Phi_t = iU\Phi_u - B + \hat{P}\,(1/J - 1)\,. \qquad (6)$$

Здесь $J = X_u^2 + Y_u^2$ – якобиан конформного преобразования, кроме того, введены обозначения

$$U = -2\hat{P}\left(\hat{H}\Psi_u/J\right), \qquad B = \hat{P}\left(\Phi_u\overline{\Phi}_u/J\right),$$

где $\overline{\Phi}$ – комплексное сопряжение Φ. Отметим, что за действие электрического поля ответственно последнее слагаемое в правой части (6). В конформных переменных электростатическое давление (с точностью до постоянного множителя) совпадает с обратным якобианом преобразования $1/J$.

Применительно к численному анализу недостатком системы уравнений (5) и (6) является наличие в знаменателях якобиана J, что может служить источником численной неустойчивости. Если, следуя [4], ввести новые переменные

$$R = 1/Z_u, \qquad V = i\Phi_u/Z_u,$$

то данная система примет следующий симметричный вид:

$$R_t = i(UR_u - U_uR), \qquad V_t = i(UV_u - D_uR), \quad (7)$$

где

$$U = \hat{P}(V\overline{R} + \overline{V}R), \qquad D = \hat{P}(V\overline{V} - R\overline{R}).$$

Эти интегродифференциальные уравнения являются кубически нелинейными. Они оказываются удобными для численного моделирования сильно нелинейной динамики свободной поверхности жидкости в горизонтальном электрическом поле.

4. Упругое взаимодействие встречных волн. Важнейшим свойством системы (3) и (4) является то, что она допускает пару точных частных решений:

$$Y = \pm\hat{H}\Psi = Y^{\pm}(u \mp t), \quad (8)$$

где $Y^{\pm}$ – произвольные функции. Эти решения соответствуют волнам произвольной геометрии, распространяющимся без искажений по направлению (верхние знаки) либо против направления (нижние знаки) внешнего электрического поля с постоянной скоростью. Для функций R и V частные решения (8) записываются как

$$R = 1 \pm iV = R^{\pm}(u \mp t),$$

где

$$R^{\pm} = \left(1 - \hat{H}Y_u^{\pm} + iY_u^{\pm}\right)^{-1}.$$

То обстоятельство, что нелинейные волны, по отдельности распространяющиеся в положительном либо отрицательном направлении оси x, ведут себя подобно линейным, конечно, не означает, что не будет происходить взаимодействия встречных волн. Рассмотрим столкновение уединенных волн, для которых $Y \to 0$ и $\Psi \to 0$ при $u \to \pm\infty$.

Понятно, что взаимодействие волн существенно только в момент столкновения. Остальное время оно пренебрежимо мало, волны распространяются без искажений. До и после встречи волн, т.е. когда они разделены в пространстве, каждой волне можно сопоставить некие энергию и импульс. Рассмотрим, как ведут себя эти величины при столкновении. Введем вспомогательные функции

$$F^{\pm}(u,t) = (Y \pm \hat{H}\Psi)/2, \quad (9)$$

которые можно считать соответствующими распространяющимся в противоположных направлениях волнам. Действительно, для частного решения (8), соответствующего движущейся направо волне, имеем $F^+ = Y^+$ и $F^- = 0$, а для волны, движущейся налево, $F^+ = 0$ и $F^- = Y^-$.

В терминах $F^{\pm}$ энергия системы H и импульс P перепишутся как

$$H = H^+ + H^-, \qquad P = P^+ + P^-,$$

$$H^{\pm} = \mp P^{\pm} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{\pm}\hat{H}F_u^{\pm}\,du.$$

Видно, что для H и P произошло разделение на два слагаемых, первое из которых содержит лишь функцию F^+, а второе – функцию F^-. Это позволяет интерпретировать $H^{\pm}$ и $P^{\pm}$ как энергии и импульсы распространяющихся в противоположных направлениях волн.

Оказывается, что каждая из величин $H^{\pm}$ и $P^{\pm}$ является интегралом движения. Действительно, несложно заметить, что

$$H^{\pm} = (H \pm P)/2, \qquad P^{\pm} = \mp(H \mp P)/2,$$

то есть энергии и импульсы отдельных волн записываются как комбинации инвариантов H и P. Это означает, что при столкновении энергия и импульс встречных уединенных нелинейных волн произвольной геометрии сохраняются, т.е. их взаимодействие упругое.

Следует отметить, что данная ситуация во многом сходна с альфвеновскими волнами в идеальной жидкости. Волновые пакеты произвольной формы могут без искажений распространяться по направлению либо против направления внешнего магнитного поля. Взаимодействие возможно только между встречными волнами, причем аналогично рассматриваемой задаче, оно является упругим [8].

5. Численное моделирование взаимодействия встречных волн. В работах [2, 7] аналитически исследовалось взаимодействие локализованных слабо нелинейных волн. В рамках простейшей модели, учитывающей лишь квадратичные по амплитуде волн нелинейности, было показано, что после взаимодействия волны восстанавливают свою форму и фазу. Возникает вопрос: обладают ли этим свойством сильно нелинейные волны, т.е. волны, для которых характерные углы наклона поверхности не являются малыми? Для ответа на него осуществим численное моделирование столкновения встречных уединенных волн в рамках уравнений (7).

Согласно (9) функции Y и Ψ связаны с функциями $F^{\pm}$ соотношениями

$$Y = F^{+} + F^{-}, \qquad \Psi = \hat{H}(F^{-} - F^{+}).$$

Рассмотрим взаимодействие волн, соответствующих следующим начальным условиям:

$$F^{\pm}(u, 0) = a^{\pm} \exp[-2(u \pm u_0)^2], \tag{10}$$

где $a^{\pm}$ – амплитуды волн, а параметр u_0 определяет их начальное положение.

Для численного решения уравнений (7) удобно использовать спектральные методы. Это обусловлено следующим свойством входящего в них оператора Гильберта: $\hat{H}e^{iku} = i\,\mathrm{sign}(k)e^{iku}$ (см. также [5]). Зададим расчетную область как $-h/2 \le u \le h/2$ с периодическими условиями на границах $u = \pm h/2$. Пространственный период h должен выбираться достаточно большим для того, чтобы волны можно было считать локализованными.

На рис. 1 показан результат численного расчета взаимодействия встречных волн с амплитудами

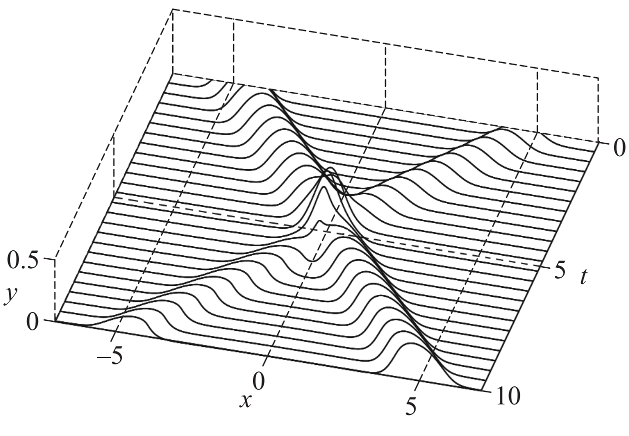

Рис. 1. Эволюция поверхности жидкости при столкновении уединенных волн с амплитудами $a^{+} = 0.3$ и $a^{-} = 0.15$

$a^{+} = 0.3$ и $a^{-} = 0.15$. Здесь полагалось, что $u_0 = 5$ и $h = 20$. Отметим, что максимальная крутизна поверхности $s = \eta_x$ в момент $t = 0$ составляет 0.34, т.е. исследуемые волны являются существенно нелинейными. Полное число гармоник в вычислениях равнялось $N = 2048$. В силу аналитичности в нижней комплексной полуплоскости функции R и V содержали $N/2$ отрицательных гармоник. Интегрирование по времени проводилось с шагом $\tau = 10^{-3}$.

Видно, что до и после момента встречи в точке $x = 0$ волны распространяются без искажений. При столкновении происходит интенсивное взаимодействие волн. В результате форма каждой волны меняется: они несколько наклоняются в стороны, противоположные их движению.

Изучим это явление более подробно. Для того чтобы оценить степень деформации волн, следует ввести некоторые параметры, характеризующие различие их профиля до и после встречи. Удобно определить их как

$$S^{\pm} = \min(\partial F^{\pm}/\partial u) + \max(\partial F^{\pm}/\partial u),$$

причем вычислять $S^{\pm}$ в момент, когда волны находятся на максимальных расстояниях друг относительно друга, т.е. в нашем случае вблизи точек $u = \pm h/4$ (в окрестности этих точек волны практически не взаимодействуют и их профиль определяется функциями F^{+} и F^{-} по отдельности). Поскольку при относительно малых амплитудах $a^{\pm}$ имеем $u \approx x$, можно считать, что приведенные формулы определяют разницу между крутизной переднего и заднего фронтов рассматриваемых волн. Для исходных симметричных волн справедливо равенство $S^{\pm} = 0$. В результате же их взаимодействия, приводящего к потере симметрии, абсолютные значения этих параметров будут расти.

Рассмотрим для простоты взаимодействие волн равной амплитуды ($a = a^{+} = a^{-}$), меняющейся в диапазоне $0 \le a \le 0.2$ с шагом 0.005. Серия численных экспериментов по однократному столкновению волн (параметры расчета прежние) позволила определить зависимость $S^{\pm}$ от амплитуды a (см. рис. 2). Для интервала $0 \le a \le 0.135$ она с высокой точностью аппроксимируется зависимостью

$$S^{+} = -S^{-} \approx 63.2\, a^{4.03}.$$

Это дает основание полагать, что деформация волн в результате их взаимодействия (на рис. 2 для сравнения показан профиль волны с $a = 0.2$ до и после столкновения) определяется нелинейностью четвертого порядка по амплитуде, т.е. $S^{\pm} \sim a^4$.

Как видно из рисунка, при относительно малых амплитудах ($0 < a < 0.05$) параметры $S^{\pm}$ близки к нулю. Это означает, что после столкновения волны

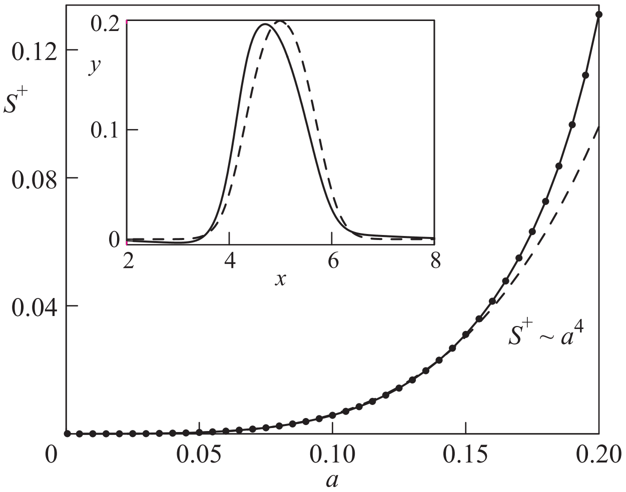

Рис. 2. Зависимость параметра S^+ от амплитуды a. Точками на сплошной линии показаны результаты серии численных экспериментов. Штриховая линия соответствует зависимости $S^+ = 60\,a^4$. На вставке показан профиль волны с $a = 0.2$ до (штриховая линия) и после (сплошная линия) столкновения

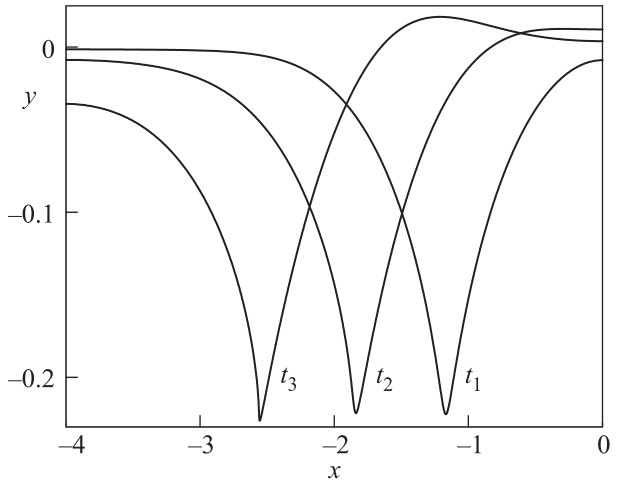

Рис. 3. Профиль движущейся налево уединенной волны с $a^- = -0.2$ после одного, трех и пяти столкновений со встречной волной той же формы (моменты времени $t_1 = 1.2$, $t_2 = 10.1$ и $t_3 = 19.05$)

восстанавливают свою форму. Можно считать, что на данном интервале взаимодействие волн удовлетворительно описывается слабо нелинейной теорией [2, 7]. На интервале $0.05 \le a \le 0.15$, несмотря на сохранение энергии и импульса каждой из взаимодействующих волн, их деформация уже становится заметной. При этом параметры $S^\pm$ определяются лишь четвертой степенью амплитуды a, т.е. остаточный эффект взаимодействия волн оказывается весьма слабым. При дальнейшем росте амплитуды волн обсуждаемая зависимость отклоняется от степенной. Это обусловлено влиянием нелинейностей более высокого порядка.

Таким образом, углы наклона поверхности при взаимодействии волн увеличиваются. Можно предположить, что при многократном взаимодействии эта тенденция способна привести к формированию особенностей. Рассмотрим в качестве примера столкновение встречных волн значительной отрицательной амплитуды (в отличие от волн с положительной амплитудой для них происходит укручение переднего фронта). Выберем начальные условия (10) с $a^+ = a^- = -0.2$ и $u_0 = 0$, что соответствует волнам, исходно совмещенным в пространстве: $F^+ = F^-$. Отметим, что в момент $t = 0$ крутизна волн достигает весьма большого значения, $s \approx 0.69$. Для параметров расчета положим $h = 8$, $N = 4096$ и $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$.

Результаты численного решения представлены на рис. 3. Видно, что вследствие столкновений подошва каждой волны заостряется. В точках заострения многократно увеличивается напряженность электрического поля, абсолютное значение которой в конформных переменных есть $J^{-1/2} = |R|$. Если в момент t_1 (см. подпись к рисунку) обратный якобиан отображения, характеризующий плотность энергии электрического поля, достигал значения $1/J \approx 6.3$ (на периферии $1/J \approx 1$), то после двух столкновений (момент t_2) имеем $1/J \approx 7.8$, а еще после двух (момент t_3) – уже $1/J \approx 21.7$. Наблюдаемая тенденция к локализации энергии поля может приводить к пробою жидкого диэлектрика. Отметим, что в процессе эволюции крутизна поверхности увеличилась до экстремально высоких значений $s \approx 2.9$ (это соответствует углу наклона $\sim 71°$). Последнее, однако, не приводит к сложностям при расчетах в конформных переменных.

6. Заключение. Основным результатом настоящей работы является демонстрация того, что при взаимодействии распространяющихся в противоположных направлениях уединенных волн произвольной геометрии энергия и горизонтальный импульс каждой из них сохраняются, т.е. взаимодействие оказывается упругим. При этом, как показало численное решение уравнений движения с использованием конформных переменных, форма волн меняется. В частности, для волн с положительной амплитудой происходит укручение заднего фронта. Продемонстрировано, что деформация волн определяется нелинейностью четвертого порядка. Этот процесс носит накопительный характер: при многократном столкновении волн наблюдается тенденция к формированию особенностей – точек со значительной кривизной поверхности.

Авторы благодарны В.Е. Захарову, указавшему на аналогию с альфвеновскими волнами. Данная работа выполнялась в рамках программы президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках". Работа одного из авторов (Н.М.З.) выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Свердловской области (грант # 13-08-96010). Работа другого автора (Е.А.К.) выполнена при поддержке фонда "Династия" и РФФИ (грант # 14-08-31194).

1. Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Письма в ЖТФ **32**(20), 40 (2006).
2. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **89**, 317 (2009).
3. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
4. А. И. Дьяченко, ДАН **376**, 27 (2001).
5. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Eur. J. Mech. B: Fluids **21**, 283 (2002).
6. B. Tao and D. L. Guo, Comput. Math. Appl. **67**, 627 (2014).
7. N. M. Zubarev and O. V. Zubareva, Phys. Rev. E **82**, 046301 (2010).
8. P. Goldreich and S. Sridhar, Astrophys. J. **438**, 763 (1995).