

# Об упрощенном моделировании нелинейных волн на течениях

В. П. Рубан<sup>1)</sup>

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черногоровка, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2014 г.

Предложено несколько новых математических моделей, дающих качественно верное описание динамики нелинейных морских волн на неоднородных течениях. Эти модели характеризуются более или менее огрубленным видом коэффициента четырехволнового взаимодействия по сравнению с эталонным уравнением Захарова. Новые системы весьма эффективны для численного счета, хотя и проигрывают в учете деталей нелинейности. В качестве примера промоделировано распространение волн против струйного течения, которое действует подобно волноводу и препятствует нелинейной дефокусировке волн в поперечном направлении, тем самым создавая благоприятные условия для развития модуляционной неустойчивости и формирования волн-убийц (*rogue waves*).

DOI: 10.7868/S0370274X14120030

**Введение.** Аномальные волны на поверхности океана (также известные как волны-убийцы, *rogue waves*, *freak waves*) активно изучаются на протяжении последних двух десятилетий (см., например, обзоры [1–3] и ссылки в них). Известно, что в формировании волн-убийц важную роль играет модуляционная неустойчивость, обусловленная фокусирующим характером действия нелинейности в направлении распространения волн [4, 5]. В случае одного горизонтального пространственного измерения этот механизм срабатывает наиболее четко, чему были получены весьма надежные численные подтверждения [6–8]. С другой стороны, в поперечном направлении нелинейность действует дефокусирующим образом. Поэтому поведение нелинейных волн на двумерной свободной поверхности жидкости оказывается более сложным. В частности, модуляционная неустойчивость развивается через образование специфических когерентных структур [9, 10]. Кроме того, воздействие со стороны неоднородного крупномасштабного морского течения способно существенным образом изменить характеристики двумерного волнового поля и способствовать образованию аномальных волн [11–13]. Отдельного рассмотрения заслуживает ситуация, когда нелинейные волны распространяются в среднем против струйного течения. Такого рода течение действует на волну как “потенциальный желоб”, способный удерживать ее от поперечной дефокусировки, но не препятствующий продольной самофокусировке. При этом для создания эффекта достаточно лишь небольшой скорости струи (в сравнении с характерной фазовой скоростью волн),  $U \sim 0.05v_{ph}$ ,

что в несколько раз меньше, чем в случае рефракции на одномерных потенциальных течениях [14] либо при пересечении струи под углом [15]. В недавних работах [16, 17] рассматривались когерентные группы волн, захваченные струей. Были численно продемонстрированы как их квазистационарное распространение в виде уединенных структур, так и возникновение аномальных волн в таких группах.

В природе морское волнение, как правило, некогерентно. Поэтому вероятность возникновения аномальных волн невелика. Соответственно, чтобы пронаблюдать близкий к реалистическому процесс спонтанного зарождения волны-убийцы в численном эксперименте, требуются большие вычислительные области и долгие периоды симуляции. Такого рода прямое моделирование в рамках исходных уравнений движения жидкости в настоящее время не представляется возможным. В результате большое значение приобретают разного рода приближенные модели, которые в вычислительном отношении намного более эффективны и в то же время содержат в себе основные механизмы взаимодействия, присущие реальным волнам.

**Новые модели.** В данной работе предложены некоторые новые упрощенные математические модели, которые призваны дать качественно верное описание динамики нелинейных волн на стационарных крупномасштабных неоднородных горизонтальных течениях вида  $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = (U(x, y), V(x, y))$ . Далее приняты следующие обозначения:  $g$  – ускорение свободного падения,  $\hat{K} = (-\Delta)^{1/2}$  – линейный псевдодифференциальный оператор, который в двумерном фурье-представлении сводится к умножению на  $(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ . Будем описывать состояние системы ка-

<sup>1)</sup>e-mail: ruban@itp.ac.ru

ноническим комплексным волновым полем (приближение, справедливое в силу малости градиентов течения)

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = \int \alpha_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} / (2\pi)^2. \quad (1)$$

Поле  $\alpha$ , в частности, определяет вертикальное отклонение свободной поверхности по формуле

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[g^{-1/4} \hat{K}^{1/4} \alpha(\mathbf{r}, t)] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2)$$

В качестве своеобразного “эталоны” для оценки качества новых моделей нами будет использоваться уравнение Захарова, дополненное пространственно-неоднородным доплеровским эффектом, который имеет место благодаря течению:

$$i\alpha_t + \frac{i}{2} [\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{U} \alpha)] = \sqrt{g} \hat{K}^{1/2} \alpha + \frac{\delta H^{(4)}}{\delta \bar{\alpha}}. \quad (3)$$

Данное уравнение обладает привычной гамильтоновской структурой. Функционал  $H^{(4)}\{\alpha, \bar{\alpha}\}$  (черта над буквой обозначает комплексное сопряжение) представляет собой гамильтониан нелинейного волнового взаимодействия  $2 \leftrightarrow 2$ , которое остается после исключения нерезонансных процессов путем слабонелинейного канонического преобразования (влиянием течения на  $H^{(4)}$  мы пренебрегаем):

$$H^{(4)} = \frac{1}{4} \int T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \alpha_{\mathbf{k}_1} \alpha_{\mathbf{k}_2} \bar{\alpha}_{\mathbf{k}_3} \bar{\alpha}_{\mathbf{k}_4} \times \\ \times (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4}{(2\pi)^8}. \quad (4)$$

Заметим еще, что на крупномасштабных течениях с хорошей точностью сохраняется волновое действие  $I = \int \bar{\alpha} \alpha d\mathbf{r}$  [18]. В уравнении (3) это учтено.

Матричный элемент (вершина) взаимодействия  $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  определяется довольно сложным выражением (см., например, [19]), которое не позволяет “расцепить” многомерный интеграл. Идея данной работы в том и состоит, чтобы вместо точной вершины использовать некоторую приближенную, которая была бы представима как сумма небольшого числа слагаемых вида

$$F_+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) f_1(\mathbf{k}_1) f_2(\mathbf{k}_2) f_3(\mathbf{k}_3) f_4(\mathbf{k}_4) \quad (5)$$

либо  $F_-(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{3,4}) f_1 f_2 f_3 f_4$  (для каждого слагаемого функции  $F_{\pm}$  и  $f_a$  свои; здесь также учтено наличие в  $H^{(4)}$   $\delta$ -функции). При этом гамильтониан взаимодействия оказался бы квазилокальным и уравнение движения не представляло бы проблемы для численного счета с использованием алгоритмов быстрого

преобразования Фурье. Что интересно, для одномерных волн на глубокой воде подобная идея оказалась вполне строго математически обоснованной и позволила получить не только качественно, но и количественно верную модель [20]. К сожалению, в двумерном случае можно рассчитывать лишь на качественное согласие. Следует все же отметить, что в отличие от так называемой ММТ-модели [21, 22] (когда все  $f_a$  одинаковы, а  $F_{\pm} = 1$ ) предлагаемые далее формулы позволяют в какой-то мере учесть нетривиальную внутреннюю структуру матричного элемента уравнения Захарова.

Чтобы определиться с выбором приближения, следует понять, какие свойства точной вершины желательнее сохранить. Поскольку аномальная волна на конечной стадии характеризуется достаточно широким спектром в продольном направлении, представляется разумным сохранить следующее “одномерное” свойство диагональной части  $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ :

$$T(\varkappa_1 \mathbf{e}, \varkappa_2 \mathbf{e}) = \frac{|\varkappa_1 \varkappa_2|}{2} (|\varkappa_1 + \varkappa_2| - |\varkappa_1 - \varkappa_2|). \quad (6)$$

В соответствии с этим мы предлагаем упрощенные модели с вершинами следующих видов, обозначенные как А, В и С:

$$\tilde{T}_A = \frac{(k_1 k_2 k_3 k_4)^{1/2}}{2} (|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|), \quad (7)$$

$$\tilde{T}_B = \frac{(k_1 k_2 + k_3 k_4)}{4} (|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|), \quad (8)$$

$$\tilde{T}_C = \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)}{2(k_1 k_2 k_3 k_4)^{1/2}} (|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|) \quad (9)$$

и т.п. плюс их линейные комбинации с единичной суммой коэффициентов. Стоит заметить, что модель В является простейшим формальным двумерным обобщением одномерной компактной модели Дьяченко и Захарова [20]. Модель А была впервые кратко (без обсуждения ее свойств) упомянута в более ранней работе автора данной статьи в несколько ином контексте [23]. Насколько данные модели отличаются от точной вершины при неколлинеарных волновых векторах, можно оценить по угловой зависимости их диагональных частей при равных по модулю  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ . Для точной вершины  $T(k\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_2) = k^3 \Theta(\phi)$ , где  $\phi$  – угол между единичными векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , причем

$$\Theta(\phi) = \frac{1}{4} \left[ 8 \cos \phi - 3 - \cos^2 \phi + \frac{8(1 - \cos \phi)^2}{4 - \sqrt{2(1 + \cos \phi)}} \right], \quad (10)$$

тогда как для моделей А и В имеем

$$\tilde{\Theta}_{A,B}(\phi) = \sqrt{(1 + \cos \phi)/2} - \sqrt{(1 - \cos \phi)/2}, \quad (11)$$

а для модели С получаем  $\tilde{\Theta}_C(\phi) = \tilde{\Theta}_{A,B}(\phi) \cos^2 \phi$ . Соответствующие графики представлены на рис. 1. Качественное согласие в случаях А и В оказывается

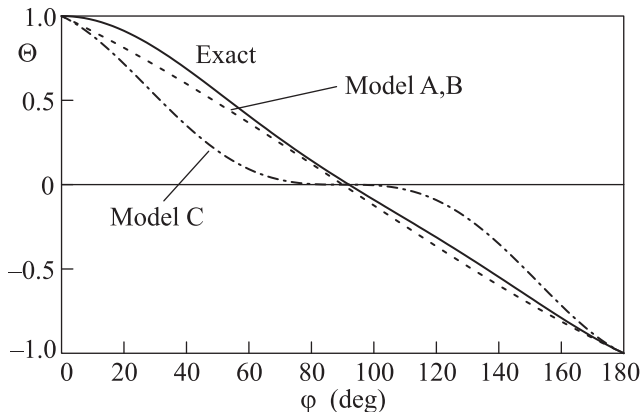


Рис. 1. Сравнение угловых зависимостей диагональных частот вершин взаимодействия

достаточно неплохим, что и делает данную работу осмысленной. Поведение модели С при конфигурациях, близких к ортогональным, заметно отличается от случая точной вершины.

Более тонкое свойство точной вершины – ее обращение в нуль на резонансной четверке коллинеарных волновых векторов

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}(1 + \zeta)^2/4, \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{q}(1 + \zeta)^2\zeta^2/4, \quad (13)$$

$$\mathbf{k}_3 = -\mathbf{q}\zeta^2/4, \quad (14)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{q}(1 + \zeta + \zeta^2)^2/4 \quad (15)$$

при произвольном векторе  $\mathbf{q}$  и при  $0 < \zeta \leq 1$  [19, 20]. В предложенных моделях оно, вообще говоря, не выполняется. Можно грубо добиться этого свойства путем составления линейной комбинации  $(\tilde{T}_A + \tilde{T}_C)/2$ . Однако тогда существенно пострадала бы угловая зависимость  $\tilde{\Theta}(\phi)$ . Имеются и другие простые способы обратить в нуль матричный элемент на указанной резонансной четверке, правда только при  $\zeta = 1$  (это значение особенно важно для корректного описания модуляционной неустойчивости плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{q}$ ). Например, можно взять линейную комбинацию  $25\tilde{T}_A - 24\tilde{T}_B$  либо прибавить к  $\tilde{T}_A$  выражение  $(3/8)(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)^2|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$ , которое не меняет диагональную часть вершины. Но с точки зрения практических вычислений даже и этого делать необязательно. Дело в том, что уже в самих по

себе моделях А и В имеется численная малость отношения значения  $\tilde{T}_{A,B}$  на коллинеарной резонансной четверке при  $\zeta = 1$  к величине  $\tilde{T}_{A,B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}; \mathbf{q}, \mathbf{q}) = q^3$ . Указанное отношение равно  $-3/16$  для модели А и  $-25/128$  для модели В. Очевидно, что подобная малость имеет место и в некотором диапазоне при  $\zeta < 1$ . Поскольку в инкременте неустойчивости плоской волны фигурируют абсолютные значения матричных элементов, соответствующие “нефизические” неустойчивые моды вблизи концов так называемой восьмерки Филлипа в  $\mathbf{k}$ -плоскости не успевают вырасти на фоне быстрее растущих модуляционных возмущений, сосредоточенных вблизи  $\mathbf{q}$ . Во всяком случае, в описанных далее численных экспериментах эти “нефизические” моды фактически никак себя не проявили.

**Численные результаты.** Ниже в качестве примера приведены результаты расчета динамики волн на струйном течении с использованием модели А. В этом случае гамильтониан взаимодействия может быть записан как

$$H_A^{(4)} = \frac{1}{8} \int [\bar{\beta}^2 \hat{K} \beta^2 - 2\bar{\beta}\beta \hat{K}(\bar{\beta}\beta)] dr, \quad (16)$$

где для краткости введено обозначение  $\beta = \hat{K}^{1/2}\alpha$ .

Вычислительная область представляла собой квадрат  $2\pi \times 2\pi$  с периодическими граничными условиями. Профиль струйного течения задавался формулой

$$U(y) = -U_0 \exp[-4(1 + \cos y)]. \quad (17)$$

Численные эксперименты проводились для нескольких значений параметра  $U_0$ , чтобы оценить степень влияния течения на динамику волн. В качестве начального условия бралась профилированная в направлении  $y$  волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_0 = (100, 0)$ , сосредоточенная на середине струи (длина волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , ее период  $T_0 = 2\pi/\sqrt{gk_0}$ , фазовая скорость  $v_{ph} = \sqrt{g/k_0}$ , параметр  $g$  безразмерен на единицу). К этой когерентной волне добавлялось квазислучайное начальное возмущение. Затем уравнение движения

$$i[\alpha_t + U(y)\alpha_x] = \sqrt{g}\beta + \hat{K}^{1/2}[\bar{\beta}\hat{K}\beta^2 - 2\bar{\beta}\hat{K}(\bar{\beta}\beta)]/4 \quad (18)$$

интегрировалось по времени методом Рунге–Кутты четвертого порядка с применением библиотеки FFTW [24] для быстрого преобразования Фурье, необходимого при вычислении действия оператора  $\hat{K}$  и его степеней. Пространственное разрешение при этом достигало  $4096 \times 1024$ . В результате на одну характерную длину волны приходилось около

40 точек. Энергия и волновое действие сохранялись с точностью до пяти десятичных знаков на протяжении примерно тысячи волновых периодов.

На рис. 2 показано распределение модуля комплексной амплитуды волны  $A = g^{-1/4} \hat{K}^{1/4} \alpha(\mathbf{r}, t)$  на

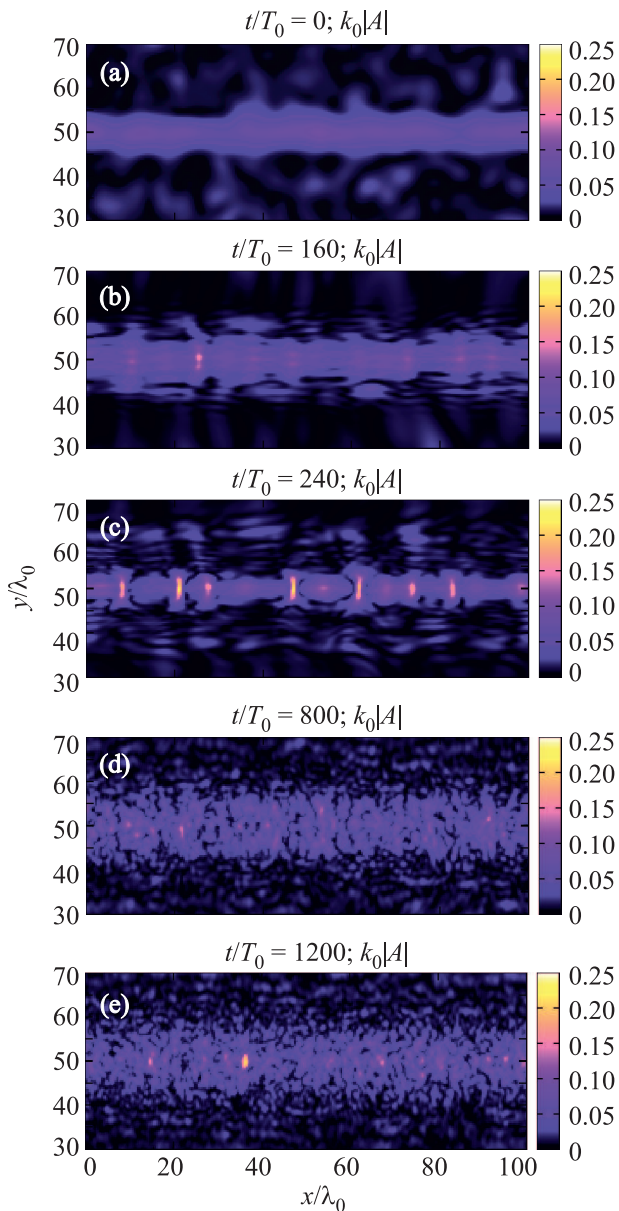


Рис. 2. Динамика нелинейных волн на струйном течении при  $U_0 = 0.06\sqrt{g/k_0}$

плоскости  $(xy)$  при  $U_0 = 0.06\sqrt{g/k_0}$  для нескольких моментов времени. Видно, что в результате развития модуляционной неустойчивости на середине струи образуются аномальные волны. Затем волновое поле теряет когерентность. Однако струя все равно удерживает волны в поперечном направлении и на ней

имеются отдельные группы с повышенной амплитудой. Время от времени взаимодействие таких групп приводит к появлению довольно больших волн. Соответствующая зависимость максимальной амплитуды волн от времени приведена на рис. 3. Для сравне-

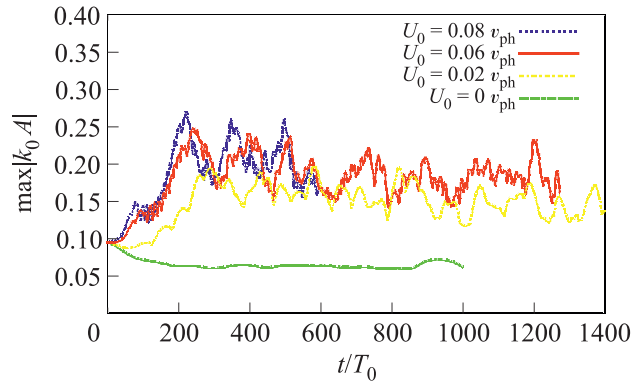


Рис. 3. Зависимости максимальной амплитуды главной гармоники волны от времени для различных скоростей струи

ния там же показаны аналогичные зависимости при некоторых других значениях  $U_0$ . Из рисунка, в частности, видно, что в отсутствие течения аномальные волны при заданных начальных условиях вообще не появляются. Рассматривая рис. 2 и 3, следует иметь в виду, что поле  $A$  непосредственно описывает только главную гармонику волны. При учете старших гармоник максимальная высота гребней оказывается заметно (примерно на 20 %) больше, чем  $\max A$ . Максимальная же глубина впадин будет примерно на столько же меньше, когда величина  $k_0 A$  принимает значения около 0.25.

**Заключение.** Таким образом, предложенные в данной работе упрощенные модели нелинейных морских волн позволяют быстро получать достаточно интересные численные результаты. Разумеется, упрощенные матричные элементы взаимодействия нуждаются в дальнейшем сравнении их свойств со свойствами точной вершины уравнения Захарова. Особенно важно, чтобы качественное согласие имело место вблизи резонансной поверхности. Вместе с тем уже сейчас ясно, что такого рода модели имеют право на существование. Автор выражает надежду на то, что их преимущества (компактность, простота и удобство для численного моделирования) позволят им внести весомый вклад в дальнейшее понимание процессов, происходящих в реальных волновых системах.

Что касается результатов наших численных экспериментов, то они подтверждают способствующее

воздействие струйного течения на формирование аномальных волн в захваченных волновых модах. Однако вопрос о физических механизмах, приводящих в природных условиях к возбуждению захваченных мод, остается открытым. Также неисследованной пока остается и задача о взаимодействии захваченных и проходящих мод.

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B: Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi, *Phys. Rep.* **528**, 47 (2013).
4. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
5. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
6. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B: Fluids* **21**, 283 (2002).
7. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **81**, 255 (2005).
8. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B: Fluids* **25**, 677 (2006).
9. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).
10. V. P. Ruban, *Pis'ma v ZhETF* **94**, 194 (2011).
11. D. H. Peregrine, *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9 (1976).
12. B. S. White and B. Fornberg, *J. Fluid Mech.* **355**, 113 (1998).
13. I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, *Eur. J. Mech. B: Fluids* **25**, 574 (2006).
14. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 550 (2012).
15. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 215 (2013).
16. V. I. Shrira and A. V. Slunyaev, *J. Fluid Mech.* **738**, 65 (2014).
17. V. I. Shrira and A. V. Slunyaev, *Phys. Rev. E* **89**, 041002(R) (2014).
18. F. P. Bretherton and C. J. R. Garrett, *Proc. R. Soc. Lond. A* **302**, 529 (1968).
19. V. E. Zakharov, *Eur. J. Mech. B: Fluids* **18**, 327 (1999).
20. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Pis'ma v ZhETF* **93**, 782 (2011).
21. A. J. Majda, D. W. McLaughlin, and E. G. Tabak, *J. Nonlin. Sci.* **6**, 9 (1997).
22. A. Pushkarev and V. E. Zakharov, *Physica D* **248**, 55 (2013).
23. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **80**, 065302(R) (2009).
24. <http://www.fft.w.org>.