Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 12, с. 827 – 831 © 2014 г. 25 июня

Нелинейная сигма-модель, метод Захарова–Шабата и новые точные формы минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$

Е. Ш. Гутшабаш[1)]

Физический факультет С.-Петербургского государственного университета, 198504 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 2014 г.

Для уравнения минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$, встречающегося в различных физических задачах, методом "одевания" Захарова–Шабата найдены общие формулы, позволяющие на их основе строить точные решения. Приведены конкретные примеры.

DOI: 10.7868/S0370274X14120091

1. Во многих актуальных задачах теоретической и математической физики важную роль играет функционал "площади". Так, например, согласно существующим представлениям [1] свободная релятивистская струна представляет собой континуум точек, каждая из которых движется вдоль собственной мировой линии в D-мерном пространстве-времени. Подобное движение осуществляется таким образом, что площадь заметаемого такой струной мирового листа оказывается минимальной (содержательная физическая и геометрическая интерпретация данного явления приведена в [2]).

Будем исходить из выражения для функционала площади вида [3]

$$S[f] = \int d^{D-1}y\sqrt{|\det g^{(0)}|}, \qquad (1)$$

где $g^{(0)} = ||g_{ij}^{(0)}(y)||$, $g_{ij}^{(0)}(y)$ – индуцированная риманова метрика на гиперповерхности, $y = (y^1, y^2, ..., y^{D-1})$, $d^{D-1}y = dy^1 \bigwedge dy^2 \bigwedge ... \bigwedge dy^{D-1}$, $(y,\ y^D) \in \Omega \subset \mathbb{R}^D$, а $y^D = f(x)$ – гладкая гиперповерхность (функция $f(y)$ предполагается вещественнозначной).

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа (критическая точка) для (1) запишется как

$$\operatorname{div} \frac{f_{y^i}}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^{D-1}(f_{y^l})^2}} = 0. \qquad (2)$$

В случае произвольного D это уравнение, по-видимому, не интегрируемо. В случае $D = 3$, как будет показано ниже, оно обладает лаксовым представлением и, следовательно, принадлежит к классу вполне интегрируемых систем. Цель данной работы – построить его новые точные решения.

Перепишем уравнение (2) для $D = 3$ в более наглядной форме, полагая $y^1 = t$, $y^2 = x$:

$$(1 + f_t^2)f_{xx} - 2f_{xt}f_xf_t + (1 + f_x^2)f_{tt} = 0. \qquad (3)$$

Это двумерное нелинейное уравнение эллиптического типа давно и хорошо известно в дифференциальной геометрии. Оно совпадает с условием обращения в нуль средней кривизны поверхности и носит название уравнения минимальной поверхности (МП) (в $\mathbb{R}^3$)[2)]. Уравнение (3) возникает, например, при некоторых редукциях модели **n**-поля [7], в стационарном и бездисперсионном пределе системы связанных нелинейных уравнений Шредингера [8] и ряде других задач физики. В этом смысле оно имеет определенное универсальное значение. Подчеркнем, кроме того, что так называемые интегральные представления Эннепера–Вейерштрасса [9], а также линеаризация (3) с помощью преобразований Лежандра или годографа [10] дают, вообще говоря, лишь некоторые параметризации решения либо их ограниченный набор (среди уже известных решений (3) можно указать плоскость в $\mathbb{R}^3$, геликоид, катеноид, поверхность Шерка, поверхность Эннепера [11] и некоторые другие). Поэтому развиваемый ниже подход, основанный на непосредственном интегрировании (3), представляется нам единственно возможным для решения поставленной задачи.

Отметим также, что из геометрических соображений очевидно, что образ МП инвариантен относительно вращения, сдвига и преобразования подобия.

1)e-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

2)Если контур $\partial\Omega$, на который "натянута" поверхность, замкнут, то естественно рассмотреть задачу Дирихле для этого уравнения. В математической литературе такая граничная задача известна как проблема Плато [4]. Дальнейшие подробности, касающиеся (3), можно найти, в частности, в [5], а ряд его различных представлений, а также серию локальных законов сохранения – в [6].

2. Представим уравнение (3) в виде условия совместности следующей лаксовой пары [12]:

$$\Psi_x = \frac{1}{\lambda^2+1}[\lambda(g^{11}I_1 + g^{12}I_2) - I_2]\Psi \equiv U\Psi, \quad (4a)$$

$$\Psi_t = -\frac{1}{\lambda^2+1}[\lambda(g^{21}I_1 + g^{22}I_2) + I_1]\Psi \equiv V\Psi, \quad (4b)$$

где

$$g = \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{tx} & u_{xx} \end{pmatrix}, \det g = 1, g = g^{\mathrm{T}}, g^2 \neq I, g^{-1} = \{g^{kl}\}, \quad (5)$$

$$u_{xx} = \frac{1+f_x^2}{\mathcal{L}}, \quad u_{tt} = \frac{1+f_t^2}{\mathcal{L}}, \qquad u_{xt} = \frac{f_x f_t}{\mathcal{L}}, \quad \mathcal{L} = \sqrt{1+f_x^2+f_t^2}, \quad (6)$$

$I_1 = g^{-1}g_t$, $I_2 = g^{-1}g_x$, $\Psi = \Psi(x,t,\lambda) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\mathcal{L}$ – лагранжева плотность уравнения (3). Условие унимодулярности матрицы g эквивалентно тому, что функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению эллиптического типа из класса Монжа–Ампера:

$$u_{tt}u_{xx} - u_{tx}^2 = 1, \quad (7)$$

так что $\mathrm{Tr}I_1 = \mathrm{Tr}I_2 = 0$ и I_1, $I_2 \in \mathrm{sl}(2)$, где $\mathrm{sl}(2)$ – алгебра Ли группы $SL(2)$. Тогда требование совместности (4) с учетом тождества

$$I_{2t} - I_{1x} - [I_2, I_1] = 0 \quad (8)$$

приводит к нелинейной сигма-модели вида (α, $\beta = 1,2$)

$$\partial_\alpha(g^{\alpha\beta}g^{-1}\partial_\beta g) = 0, \quad (9)$$

которая, в свою очередь, эквивалентна уравнению (3).

Для построения точных решений (3), ограничившись дискретным спектром ассоциированной линейной системы (4a), применим процедуру одевания Захарова–Шабата [13] (в варианте, использовавшемся в [14–15], а также, в [16])[3].

Прежде всего отметим, что из (4a) легко получить, что

$$g = \Psi^{-1}(0). \quad (10)$$

Далее предположим, что нам известно некоторое затравочное (фоновое) решение $f_0 = f_0(x,t)$ уравнения (3), которому согласно (4) отвечает матричное решение $\Psi_0 = \Psi_0(x,t,\lambda)$, причем $g = g_0(x,t)$. Положим $\Psi = \chi\Psi_0$, где $\chi = \chi(x,t,\lambda) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, считая, что имеет место каноническая нормировка $\chi(\infty) = I$ (где I – единичная 2×2-матрица). Из свойств матрицы U (σ_i, $i = 1,3$ – стандартные матрицы Паули, звездочка обозначает эрмитово сопряжение):

$$U(\lambda) = \bar{U}(\bar{\lambda}), \; U(\lambda) = -\sigma_2 U^{\mathrm{T}}(\lambda)\sigma_2, \; gU(\lambda) = U^*(\bar{\lambda})g, \quad (11)$$

следуют инволюции (симметрии) для функций Ψ и χ:

$$\bar{\Psi}(\bar{\lambda}) = \Psi(\lambda)D_1(\lambda), \; \Psi^{\mathrm{T}}(\lambda)\sigma_2\Psi(\lambda) = D_2(\lambda), \qquad g\Psi(\lambda)D_3(\lambda) = \Psi^{-1\mathrm{T}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right), \quad (12)$$

$$\bar{\chi}(\bar{\lambda}) = \chi(\lambda), \; \chi^T(\lambda) = \sigma_2\chi^{-1}(\lambda)\sigma_2, \qquad \chi^{-1}(0)\chi(\lambda)\Psi_0(0) = \Psi_0(0)\sigma_2\chi\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\sigma_2, \quad (13)$$

где $D_i(\lambda)$ – произвольные матрицы ($i = 1,3$), $D_1(\lambda)\bar{D}_1(\bar{\lambda}) = I$, $D_2^{\mathrm{T}}(\lambda) = -D_2(\lambda)$. Принимая во внимание (13), будем искать χ и χ^{-1} в виде

$$\chi = I + \frac{P_1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{\bar{P}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_1} + \frac{R_1}{\lambda+\lambda_1^{-1}} + \frac{\bar{R}_1}{\lambda+\bar{\lambda}_1^{-1}}, \quad (14)$$

$$\chi^{-1} = I + \frac{\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}}\sigma_2}{\lambda-\lambda_1} + \frac{\sigma_2 P_1^*\sigma_2}{\lambda-\bar{\lambda}_1} + \frac{\sigma_2 R_1^{\mathrm{T}}\sigma_2}{\lambda+\lambda_1^{-1}} + \frac{\sigma_2 R_1^*\sigma_2}{\lambda+\bar{\lambda}_1^{-1}},$$

где $P_1 = P_1(x,t)$, $R_1 = R_1(x,t) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ – некоторые пока неизвестные функции, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ – фиксированное число, представляющее собой простой полюс функции χ, причем $\lambda_1 = \lambda_{1R} + \lambda_{1I}$, $\lambda_{1R} \neq 0$, $\lambda_{1I} \neq 0$. Положим $P_1 = a >< p\sigma_2$, $R_1 = b >< q\sigma_2$. В терминах этих величин условие $\chi\chi^{-1} = I$ после приравнивания нулю комбинации вычетов при одинаковых полюсах дает следующую линейную систему уравнений относительно векторов $a >$, $\bar{a} >$, $b >$ и $\bar{b} >$:

$$\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\bar{a} >< \bar{p}\sigma_2 p > - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_1^{-1}} b >< q\sigma_2 p > + \frac{1}{\lambda_1+\bar{\lambda}_1^{-1}}\bar{b} >< \bar{q}\sigma_2 p >= p >,$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1} a >< p\sigma_2\bar{p} > + \frac{1}{\bar{\lambda}_1+\lambda_1^{-1}} b >< q\sigma_2\bar{p} > - \frac{1}{\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_1^{-1}}\bar{b} >< \bar{q}\sigma_2\bar{p} >= -\bar{p} >, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\lambda_1+\lambda_1^{-1}} a >< p\sigma_2 q > - \frac{1}{\bar{\lambda}_1+\lambda_1^{-1}}\bar{a} >< \bar{p}\sigma_2 q > +$$

[3] Граничная задача для нелинейных уравнений эллиптического типа на полуплоскости решалась с помощью метода обратной задачи рассеяния в [16–17], для всей плоскости – в [18], а для четверти – в [19].

$$+\frac{1}{\bar{\lambda}_1^{-1}-\lambda_1^{-1}}\bar{b} >< \bar{q}\sigma_2 q >= q >,$$

$$-\frac{1}{\lambda_1+\bar{\lambda}_1^{-1}}a >< p\sigma_2\bar{q} > +\frac{1}{\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_1^{-1}}\bar{a} >< \bar{p}\sigma_2\bar{q} > -$$

$$-\frac{1}{\bar{\lambda}_1^{-1}-\lambda_1^{-1}}b >< q\sigma_2\bar{q} >= -\bar{q} > .$$

Требование же отсутствия двойных полюсов сведется к условиям

$$< p\sigma_2 p > = < q\sigma_2 q > = 0. \tag{16}$$

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что

$$<p\sigma_2\bar{p}> = -<\bar{p}\sigma_2 p> = 0, <q\sigma_2\bar{q}> = - <\bar{q}\sigma_2 q> = 0,$$

$$< p\sigma_2 q >= \overline{< q\sigma_2 p >}, \quad < p\sigma_2\bar{q} >= -\overline{< \bar{p}\sigma_2 q >}. \tag{17}$$

Решая систему (15) с учетом (16), (17), для матриц P_1, R_1 получаем

$$P_1 = \frac{1}{|d_1|^2|l_1|^2-|d_2|^2|l_2|^2}[\bar{d}_1 l_1 q >< p - \bar{d}_2 l_2 \bar{q} >< p]\sigma_2, \tag{18}$$

$$R_1 = -\frac{1}{|d_1|^2|l_1|^2-|d_2|^2|l_2|^2}[\bar{d}_1\bar{l}_1 p >< q + d_2 l_2 \bar{p} >< q]\sigma_2,$$

где

$$l_1 =< q\sigma_2 p >, \quad l_2 =< \bar{q}\sigma_2 p >,$$

$$d_1 = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_1^{-1}}, \quad d_2 = \frac{1}{\lambda_1+\bar{\lambda}_1^{-1}}.$$

При этом $p >< q = (q >< p)^*$, $\bar{q} >< p = (\bar{p} >< q)^{\mathrm{T}}$ и с учетом (16), (17) $P_1|p >= 0$, $R_1|q >= 0$, так что $|p >\in \mathbb{K}\mathrm{er}P_1$, $|q >\in \mathbb{K}\mathrm{er}R_1$.

Следующий шаг метода одевания – определение зависимости векторов $|p >$ и $|q >$ от переменных x и t. Для этого перепишем систему (4) в терминах решений χ, χ^{-1} и, поскольку функции $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ имеют полюса только в точках $\pm i$, потребуем выполнения условий ($U_0 = \Psi_{0x}\Psi_0^{-1}$, $V_0 = \Psi_{0t}\Psi_0^{-1}$)

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{|\lambda=\lambda_1}\{\chi[-\partial_x + U_0(\lambda)]\chi^{-1}\} = 0,\\ &\mathrm{Res}_{|\lambda=\lambda_1}\{\chi[-\partial_t + V_0(\lambda)]\chi^{-1}\} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Из (14) видно, что в окрестности точки λ_1

$$\chi(\lambda) = \frac{P_1}{\lambda-\lambda_1} + A_0(\lambda), \quad \chi^{-1}(\lambda) = \frac{\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}}\sigma_2}{\lambda-\lambda_1} + B_0(\lambda), \tag{20}$$

где $A_0(\lambda)$, $B_0(\lambda)$ – функции, аналитические в точке λ_1, причем $B_0(\lambda) = \sigma_2 A_0^{\mathrm{T}}(\lambda)\sigma_2$. Подставляя (20) в (19), получим

$$A_0(\lambda_1)(\partial_x - U_0)B_0 = 0, \tag{21}$$

$$A_0(\lambda_1)(\partial_x - U_0)\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}}\sigma_2 + P_1(\partial_x - U_0)\sigma_2 A_0^{\mathrm{T}}(\lambda_1)\sigma_2 = 0, \tag{22}$$

$$A_0(\lambda_1)(\partial_t - V_0)\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}}\sigma_2 + P_1(\partial_t - V_0)\sigma_2 A_0^{\mathrm{T}}(\lambda_1)\sigma_2 = 0.$$

Эти равенства, очевидно, будут иметь место, если $(\partial_x - U_0)\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}} = (\partial_t - V_0)\sigma_2 P_1^{\mathrm{T}} = 0$. Сравнивая их с (4a) и (4b), найдем ($|\alpha_1 >$ – постоянный комплексный вектор)

$$p >= \Psi_0(x,t,\bar{\lambda}_1)|\alpha_1 > . \tag{23}$$

Этот же результат можно получить, повторяя предыдущие вычисления в окрестности точки $\bar{\lambda}_1$. Аналогично находим зависимость вектора $q >$, применяя те же соображения в окрестности точки $-1/\lambda_1$ или $-1/\bar{\lambda}_1$. Тогда ($|\alpha_2 >$ – постоянный комплексный вектор)

$$q >= \Psi_0\left(x,t,-\frac{1}{\bar{\lambda}_1}\right)|\alpha_2 > . \tag{24}$$

Для замыкания развитой выше процедуры необходимо получить формулу восстановления “потенциала” f, а также построить решение $\Psi_0(x,t,\lambda)$. Для этого заметим, что из соотношений Бьянки (6) и формулы (10) нетрудно вывести уравнение на лагранжеву плотность “одетого” решения:

$$\mathcal{L}^2 - [\mathrm{Tr}\Psi(0)]\mathcal{L} + 1 = 0. \tag{25}$$

Отсюда находим (в предположении, что $|\mathrm{Tr}\Psi(0)| \geq 2$)

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Psi(0)\Big[\mathrm{Tr}\Psi(0) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}^2\Psi(0)-4}\Big] - 2. \tag{26}$$

Введем скалярные функции $Q_1 = Q_1(x,t,\lambda_1)$, $Q_2 = Q_2(x,t,\lambda_1)$:

$$Q_1 = \Psi_{11}(0) = \frac{(1+f_{0x}^2)\chi_{11}(0) - f_{0x}f_{0t}\chi_{12}(0)}{\mathcal{L}_0} = $$

$$= \frac{E^{(0)}\chi_{11}(0) - F^{(0)}\chi_{12}(0)}{\sqrt{E^{(0)}G^{(0)} - F^{(0)2}}}, \tag{27}$$

$$Q_2 = \Psi_{22}(0) = \frac{(1+f_{0t}^2)\chi_{22}(0) - f_{0x}f_{0t}\chi_{21}(0)}{\mathcal{L}_0} = $$

$$= \frac{G^{(0)}\chi_{22}(0) - F^{(0)}\chi_{21}(0)}{\sqrt{E^{(0)}G^{(0)} - F^{(0)2}}},$$

где $\Psi(0) = \{\Psi_{ij}(0)\}$, $\chi(0) = \{\chi_{ij}(0)\}$, $\mathcal{L}_0^2 = 1 + f_{0x}^2 + f_{0t}^2 = E^{(0)}G^{(0)} - F^{(0)2}$, $E^{(0)}$, $F^{(0)}$, $G^{(0)}$ – коэффициенты первой квадратичной формы “начальной” ("затравочной") поверхности. Если $\Psi_0(0)$ вещественнозначно, то Q_1 и Q_2 также являются вещественнозначными, поскольку согласно (14) $\chi(0)=\bar{\chi}(0)$. С учетом (10) и (26) имеем

$$f_x^2 = \frac{Q_1}{2}[Q_1+Q_2+\sqrt{(Q_1+Q_2)^2-4}]-1\equiv \equiv 2Q_1e^{Q_3}-1\equiv\Delta_1^2, \tag{28}$$

$$f_t^2 = \frac{Q_2}{2}[Q_1+Q_2+\sqrt{(Q_1+Q_2)^2-4}]-1\equiv \equiv 2Q_2e^{Q_3}-1\equiv\Delta_2^2,$$

где $Q_1+Q_2=4\cosh Q_3$. При этом непосредственным вычислением можно убедиться в том, что $\Delta_{1t}=\Delta_{2x}$. Это означает, что дифференциальная 1-форма $\omega = \Delta_1 dx + \Delta_2 dt$ точна. Следовательно, криволинейный интеграл

$$f(x,t)=\pm\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)}\Delta_1(x',t)\,dx'+\Delta_2(x,t')\,dt' =$$

$$=\pm\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)}\sqrt{2Q_1e^{Q_3}-1}dx'+\sqrt{2Q_2e^{Q_3}-1}dt', \tag{29}$$

где $(x_0,t_0)\in\Omega$ – некоторая фиксированная точка, не зависит от пути интегрирования, а присутствие обоих знаков соответствует инвариантности (3) относительно замены $f\to -f$. Соотношения (27), (28) совместно с (29) дают "односолитонное" решение уравнения (3) на фоне решения $f_0(x,t)$. При этом с геометрической точки зрения процедура "одевания" сводится к нелинейному преобразованию коэффициентов первой квадратичной формы начальной поверхности.

Для определения $\Psi_0(x,t,\lambda)$ заметим, что система (4) после некоторых вычислений может быть переписана как

$$\Psi_{0x}=\frac{1}{\lambda^2+1}[-\lambda G_{0x}-G_0^{-1}G_{0x}]\Psi_0,$$
$$\Psi_{0t}=\frac{1}{\lambda^2+1}[-\lambda G_{0t}-G_0^{-1}G_{0t}]\Psi_0, \tag{30}$$

где $G_0=i\sigma_2 g_0$, так что $G_0^2=-I$ (в силу связи (7)). Она имеет решение вида

$$\Psi_0(x,t,\lambda)=ic_0(\lambda)[G_0^{-1}+(\lambda-\lambda^3)I+\lambda^2G_0]\sigma_2, \tag{31}$$

где $c_0(\lambda)$ – множитель, фиксируемый требованием $\det\Psi_0(\lambda)=1$. Тогда с учетом тождества $\sigma_2 g_0\sigma_2=g_0^{-1}$ можно записать (31) в терминах производных функции u_0 (начального решения уравнения (7)):

$$\Psi_0(\lambda)=\{\Psi_{0ij}(\lambda)\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} u_{0xx} & \lambda-u_{0tx}\\ -(\lambda+u_{0tx}) & u_{0tt}\end{pmatrix},\ \Psi_0(0)=\bar{\Psi}_0(0). \tag{32}$$

3. Определим вектора $|\alpha_i>$, $i=1,2$, входящие в (23) и (24), как $|\alpha_i>=(\mu_i,\nu_i)^{\mathrm T}$, где $\mu_i,\ \nu_i\in\mathbb{C}$ – произвольные числа. При этом с целью упрощения формул удобно считать, что $|\alpha_1>=\mu_{10}(1+i\mu_0)(1,-i)^{\mathrm T}$, $|\alpha_2>=\mu_{20}(1+i\mu_0)(1,i)^{\mathrm T}$, где $\mu_{i0},\ \mu_0\in\mathbb{R}$ – параметры. Кроме того, ограничимся значениями параметра λ_1 на единичной окружности, полагая $\lambda_1=e^{i\theta_1}$, $\theta_1\neq 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$, что в спектральной задаче (4a) соответствует возбуждениям типа "кинков" [17]. Тогда в общей ситуации, т.е. для любой МП $f_0=f_0(x,t)$, согласно (23), (24), (32) получим ($d_1=1/(2\cos\theta_1)$, $d_2=(1/2)e^{-i\theta_1}$)

$$|p>=(p_1,p_2)^{\mathrm T}=\frac{\mu_{10}(1+i\mu_0)e^{i\theta_1/2}}{\mathcal{L}_0\sqrt{2|\cos\theta_1|}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0-ie^{-i\theta_1})+f_{0t}(f_{0x}-1)\\ -e^{-i\theta_1}\mathcal{L}_0-f_{0x}f_{0t}(1+i)\end{pmatrix},$$
$$|q>=(q_1,q_2)^T=\frac{\bar{\lambda}_1\mu_{10}(1+i\mu_0)e^{i\theta_1/2}}{\mathcal{L}_0\sqrt{2|\cos\theta_1|}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\mathcal{L}_0[1+e^{-2i\theta_1}(1-i)]+i(e^{-i\theta_1}f_{0x}f_{0t}-1-f_{0x}^2)\\ e^{-i\theta_1}[i\mathcal{L}_0(2\cos\theta_1-e^{-i\theta_1})-f_{0x}f_{0t}]-1-f_{0t}^2\end{pmatrix},$$
$$l_1=-l_{10}\frac{1+\mathcal{L}_0^2-2\mathcal{L}_0\sin\theta_1}{\mathcal{L}_0|\cos\theta_1|},$$
$$l_2=l_{10}\frac{f_{0x}^2-f_{0t}^2+2if_{0x}f_{0t}}{\mathcal{L}_0}, \tag{33}$$
$$l_{10}=\mu_{10}\mu_{20}(1+\mu_0^2),$$
$$\Delta=\Delta(\mathcal{L}_0,\ \theta_1)=|d_1|^2|l_1|^2-|d_2|^2|l_2|^2=$$
$$=\frac{l_{10}^2}{4\mathcal{L}_0^2}\frac{(1+\mathcal{L}_0^2-2\mathcal{L}_0\sin\theta_1)^2-(1-\mathcal{L}_0^2)^2\cos^4\theta_1}{\cos^4\theta_1}\neq 0,$$
$$A_1=q><p=(\bar{p}_1|q>,\ \bar{p}_2|q>),$$
$$A_2=\bar{q}><p=(\bar{p}_1|\bar{q}>,\bar{p}_2|\bar{q}>),$$
$$A_1,\ A_2\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}),$$
$$\chi(0)=I-\frac{2}{\Delta}\mathrm{Re}\{[e^{-i\theta_1}(\bar{d}_1l_1A_1-\bar{d}_2l_2A_2)-$$
$$-e^{i\theta_1}(\bar{d}_1\bar{l}_1A_1^*+d_2l_2A_2^{\mathrm T})]\sigma_2\}.$$

В итоге решение (29) оказывается чрезвычайно громоздким. Поэтому в более явной форме мы его не приводим. Оно носит несингулярный характер и зависит от четырех вещественных параметров: $\mu_0,\ \mu_{10},\mu_{20},\ \theta_1$.

Приведем два конкретных примера реализаций полученных соотношений.

1. Пусть $f_0(x,t) = 0$, т.е. рассматривается процедура "одевания" тривиального решения ("горизонтальной" плоскости). В этом случае $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = 1$, $u_{0xx} = u_{0tt} = 1$, $u_{tx} = 0$, $g_0 = I$, $I_1 = I_2 = 0$, $\Psi_0(\lambda_1) = (1/\sqrt{2|\cos\theta_1|})e^{-i\theta_1/2}[I + i(\cos\theta_1\sigma_2 + \sin\theta_1\sigma_1)]$. Матрица $\chi(0)$, а значит, и функции Q_1, Q_2 оказываются постоянными величинами. Согласно (29) отсюда следует, что решение $f(x,t)$ является линейной функцией x и t, т.е. "наклонной" плоскостью, которую с помощью преобразований поворота и сдвига можно перевести в исходное положение. Этот результат отвечает классическому результату Бернштейна [20]: образом МП над всей плоскостью является сама плоскость. Таким образом, мы имеем своего рода "принцип запрета" для новых решений над всей плоскостью.

Совершенно аналогично обстоит дело и для затравочного решения в виде "наклонной" плоскости, т.е. $f_0(x,t) = a_0x + b_0t + c_0$, где a_0, b_0, $c_0 \in \mathbb{R}$ – константы.

2. Пусть $f_0(x,t)$ – МП, отличная от плоскости, например геликоид $f_0 = x\tan t$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}\backslash(\pi/2)(2k+1)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. В данной ситуации $f_{0x} = \tan t$, $f_{0t} = x/\cos^2 t$, $\mathcal{L}_0 = (\sqrt{x^2 + \cos^2 t})/\cos^2 t$, а эволюция по x и t окажется нетривиальной (по крайней мере для f_x^2 и f_t^2) и будет определяться согласно двум первым формулам (33). При этом

$$l_1 = -l_{10}\frac{x^2 + \cos^2 t(1+\cos^2 t) - 2\sin\theta_1\cos^2 t\sqrt{x^2+\cos^2 t}}{|\cos\theta_1|\sqrt{x^2+\cos^2 t}},$$

$$l_2 = l_{10}\frac{\sin^2 t - x^2 + 2ix\tan t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2}}, \qquad (34)$$

$$\Delta = \frac{l_{10}^2}{\cos^6 t\cos^4\theta_1}\times$$
$$\times\big((\cos^4 t + \cos^2 t + x^2 - 2\sin\theta_1\sqrt{\cos^2 t + x^2})^2 -$$
$$-(\cos^4 t - \cos^2 t - x^2)^2\cos^4\theta_1\big)/(\cos^2 t + x^2).$$

В заключение отметим, что использованная выше процедура, по существу, позволяет одновременно решать три уравнения: уравнение МП (3), сигма-модель (9) и уравнение Монжа–Ампера (7).

Автор признателен А.Р. Итсу и П.П. Кулишу за полезные дискуссии и поддержку.

1. Л. Бринк, М. Энно, *Принципы теории струн*, Мир, М. (1991).
2. Л.Д. Никитина, И.Н. Никитин, С.В. Клименко, Электр. журнал "Исследовано в России" **6**, 404 (2003).
3. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М. (1986).
4. А.А. Тужилин, А.Т. Фоменко, *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*, Наука, М. (1991).
5. *Geometry V, Minimal Surfaces*, ed. by R. Osserman, Springer (1997).
6. Е.Ш. Гутшабаш, Записки научных семинаров ПОМИ **374**, 121 (2010).
7. А.Б. Борисов, ДАН **389**, 1 (2003).
8. A. Moro, arXiv: 0808.1235 (2008).
9. В. Бляшке, *Введение в дифференциальную геометрию*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск (2007).
10. А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, Физматлит, М. (2005).
11. U. Dierkes, S. Hildebrant, F. Sauvigny, *Minimal surfaces. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*, Springer (2010), v. 239.
12. J.C. Brunelli, M. Gurses, and K. Zheltukhin, Rev. Math. Phys. **13**, 529 (2001).
13. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, Функц. анализ и его прилож. **8**, 43 (1974).
14. A.V. Mikhailov and A.I. Jaremchuk, Nucl. Phys. B **202**, 508 (1982).
15. F. Combes, H.J. de Vega, A.V. Mikhailov, and N. Sanchez, Phys. Rev. D **50**(4), 2754 (1994); arXiv:hep-th/9310073.
16. Е.Ш. Гутшабаш, В.Д. Липовский, С.С. Никуличев, ТМФ **115**, 323 (1998).
17. Е.Ш. Гутшабаш, В.Д. Липовский, Записки научных семинаров ПОМИ **180**, 53 (1990).
18. A.B. Borisov and V.V. Kiseliev, Inverse Probl. **5**, 959 (1998).
19. B. Pelloni, ТМФ **160**, 189 2009.
20. С.Н. Бернштейн, *Собр. соч.*, Изд-во АН СССР, М. (1960), т. 3.