Письма в ЖЭТФ, том 100, вып. 5, с. 385 – 389 10 сентября

Связанные фермионные состояния в поле солитона нелинейной $O(3)$ σ-модели

А. Ю. Логинов[1)]

Томский политехнический университет, 634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 14 июля 2014 г.

Исследована $(2+1)$-мерная нелинейная $O(3)$ σ-модель, $\mathbf{n}$-поле которой связано с фермионным полем юкавским взаимодействием. Рассмотрены случаи изосинглетного и изодублетного по отношению к группе внутренней симметрии фермионного поля. Показано, что для некоторых вариантов юкавского взаимодействия существуют связанные состояния фермиона в $\mathbf{n}$-поле солитона нелинейной $O(3)$ σ-модели. Установлено отсутствие фермионных нулевых мод в $\mathbf{n}$–поле солитона. Выполнено численное исследование свойств основного состояния фермиона. В частности, показано, что рост пространственного размера солитона ведет к уменьшению энергии основного состояния. Это приводит к нестабильности солитона в определенной области параметров модели.

DOI: 10.7868/S0370274X14170111

Топологические солитоны $(2+1)$-мерных полевых моделей играют важную роль в различных областях физики: теории поля, физике конденсированного состояния, астрофизике и гидродинамике. Среди двумерных топологических солитонов прежде всего надо отметить вихревые решения эффективной теории сверхпроводимости [1] и $(2+1)$-мерной релятивистской абелевой модели Хиггса [2]. Другим важным примером является статическое солитонное решение $(2+1)$-мерной нелинейной $O(3)$ σ-модели [3], эффективно описывающей поведение ферромагнетика в критической области. Инвариантность функционала статической энергии σ-модели относительно масштабных преобразований координат приводит к наличию у солитона соответствующей нулевой моды. Поэтому вместо солитонного решения фиксированного размера существует однопараметрическое семейство решений, в котором величина параметра определяет размер солитона. В соответствии с теоремой Деррика [4] размер солитона нелинейной $O(3)$ σ-модели может быть фиксирован несколькими способами. Один из них [5] заключается во введении в лагранжиан нелинейной σ-модели потенциала взаимодействия, нарушающего исходную $O(3)$-симметрию модели до абелевой $U(1)$-подгруппы, калибровке этой остаточной $U(1)$-симметрии и включении в лагранжиан кинетического слагаемого калибровочного поля. Другим способом фиксации размера солитона является включение в лагранжиан σ-модели наряду с потенциалом слагаемого четвертого порядка по производным $\mathbf{n}$-поля [6, 7].

В настоящей работе рассмотрен вопрос о наличии связанных фермионных состояний в $\mathbf{n}$-поле солитона нелинейной $O(3)$ σ-модели и о возможном влиянии этих состояний на размер солитона и его стабильность. Интерес к данному вопросу также связан с тем, что взаимодействие фермионов с топологическими солитонами других моделей приводит к ряду важных эффектов: дроблению фермионного числа и электрического заряда [8], целочисленному угловому моменту фермиона в поле монополя [8–10], несохранению фермионных чисел при рассеянии безмассовых фермионов на монополе [11, 12].

Рассмотрим $(2+1)$-мерную нелинейную $O(3)$ σ-модель, $\mathbf{n}$-поле которой связано с фермионным полем юкавским взаимодействием. Будем использовать систему единиц, в которой скорость света c, постоянная Планка $\hbar$ и квадрат модуля изотриплета скалярных полей $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ равны 1. В качестве γ-матриц в $(2+1)$-измерениях используем матрицы 2×2, приведенные в [13]. Рассмотрим сначала изосинглетное по отношению к $O(3)$ фермионное поле. В этом случае лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{n}\cdot\partial^\mu \mathbf{n} + \overline{\psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - hn_3\overline{\psi}\psi, \qquad (1)$$

где n_3 – z-компонента $\mathbf{n}$-поля, h – юкавская константа связи. Очевидно, что исходная группа симметрии $O(3)$ понижается в (1) до $O(2)$-подгруппы. Уравнение Дирака, записанное в гамильтоновой форме, имеет вид

$$i\partial_0\psi = H\psi, \qquad (2)$$

[1)]e-mail: aloginov@tpu.ru

где

$$H = -i\alpha^k \partial_k + h n_3 \beta \tag{3}$$

есть гамильтониан фермиона во внешнем бозонном **n**-поле, $\alpha^1 = \sigma_2$, $\alpha^2 = -\sigma_1$, $\beta = \sigma_3$, σ_i – матрицы Паули.

Солитоны нелинейной $O(3)$ σ-модели имеют топологическую природу и характеризуются целочисленным топологическим зарядом. Поле солитона, расположенного в начале координат и имеющего единичный топологический заряд, записывается как

$$\mathbf{n}\left(r,\theta\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda r}{r^2+\lambda^2}\cos(\theta) \\ \dfrac{2\lambda r}{r^2+\lambda^2}\sin(-\theta) \\ \dfrac{r^2-\lambda^2}{r^2+\lambda^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Характерной особенностью **n**-поля солитона (4) является зависимость от параметра λ, определяющего размер солитона. Масса солитона не зависит от λ и в используемой системе единиц равна 4π. Наличие параметра λ приводит к появлению дополнительной нулевой моды: помимо двух трансляционных и одной вращательной солитон (4) имеет также дилатационную нулевую моду, связанную с изменением его пространственного размера.

Оператор углового момента фермиона в $(2+1)$-измерениях, коммутирующий с гамильтонианом (3), имеет вид

$$J = -i\epsilon_{kl} x_k \partial_l + \frac{1}{2}\sigma_3, \tag{5}$$

где ϵ_{kl} – двумерный антисимметричный тензор. Оператор J имеет полуцелые собственные значения, $m = k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$, и соответствующие им собственные функции

$$\psi_m = \begin{pmatrix} c_1\left(r\right) e^{i(m-1/2)\theta} \\ c_2\left(r\right) e^{i(m+1/2)\theta} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Проведем замену радиальной переменной $r = \lambda\rho$. Выраженное в терминах переменной ρ **n**-поле (4) не зависит от параметра λ. Подставляя (4), (6) в (2), получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка для радиальных функций $c_1(\rho), c_2(\rho)$:

$$dc_i/d\rho = \Lambda_{ik} c_k. \tag{7}$$

Здесь

$$\Lambda_{ik} = \begin{pmatrix} \dfrac{2m-1}{2\rho} & \varepsilon\lambda + h\lambda n_3 \\ -\varepsilon\lambda + h\lambda n_3 & -\dfrac{2m+1}{2\rho} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$n_3 = \left(\rho^2 - 1\right) / \left(\rho^2 + 1\right), \tag{9}$$

где ε – энергия фермиона.

Рассмотрим фермион, обладающий наименьшим положительным угловым моментом $m = 1/2$. Из (8) следует, что при $m = 1/2$ для радиальной функции $c_1(\rho)$ отсутствует центробежный барьер. Следовательно, $c_1(\rho)$ принимает ненулевое значение при $\rho = 0$. Используя однородность системы (7), фиксируем это значение равным 1. Из (6) следует, что при $m = 1/2$ нижняя компонента двухкомпонентного спинора $\psi_{1/2}$ имеет нетривиальную угловую зависимость $e^{i\theta}$. Из условия однозначности волновой функции фермиона следует, что радиальная функция $c_2(\rho)$ обращается в нуль при $\rho = 0$. Физически это обусловлено наличием в (8) центробежного барьера для $c_2(\rho)$ при $m = 1/2$. Итак, мы имеем при $\rho = 0$ граничные условия

$$c_1(0) = 1,\ c_2(0) = 0. \tag{10}$$

Система (7) может быть сведена к одному однородному дифференциальному уравнению второго порядка для радиальной функции $c_1(\rho)$ или $c_2(\rho)$. Точка $\rho = 0$ оказывается регулярной особой точкой этого дифференциального уравнения. Используя стандартные методы [14], можно установить характер поведения $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$ в окрестности $\rho = 0$:

$$c_1(\rho) \underset{\rho\to 0}{\to} 1 + \frac{h^2-\varepsilon^2}{4}\lambda^2\rho^2 + O[\rho^4], \tag{11}$$

$$c_2(\rho) \underset{\rho\to 0}{\to} -\frac{\varepsilon+h}{2}\lambda\rho + \left[\frac{(h+\varepsilon)(\varepsilon^2-h^2)}{16} + \frac{h}{2\lambda^2}\right]\lambda^3\rho^3 + O[\rho^5]. \tag{12}$$

Из (7)–(9) получим асимптотику радиальных волновых функций $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$, убывающих при $\rho \to \infty$:

$$c_1(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\to} c_\infty \exp\left(-\lambda\rho\sqrt{h^2-\varepsilon^2}\right), \tag{13}$$

$$c_2(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\to} -c_\infty\sqrt{\frac{h-\varepsilon}{h+\varepsilon}}\exp\left(-\lambda\rho\sqrt{h^2-\varepsilon^2}\right). \tag{14}$$

Систему дифференциальных уравнений (7) не удается решить аналитически. Численное решение задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка для любой из радиальных функций $c_1(\rho)$ или $c_2(\rho)$ также сталкивается с трудностями, эти уравнения имеют особую точку внутри интервала $\rho \in [0, \infty)$. Поэтому гораздо легче вместо численного решения задачи Штурма–Лиувилля для одного дифференциального уравнения второго порядка численно решать задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (7) и начальных условий (10). Из (13), (14) ясно, что для волновых функций связанных состояний $|\varepsilon| < h$. Для произвольного $\varepsilon \in (-h, h)$ решение экспоненциально возрастает при $\rho \to \infty$. Лишь для дискретного ряда значений ε, соответствующих энергиям связанных состояний фермиона, решение (11), (12) в окрестности $\rho = 0$ непрерывно и гладко переходит при $\rho \to \infty$ в экспоненциально убывающее решение (13), (14). Для того чтобы найти эти энергии, необходимо решать задачу Коши для ряда последовательных значений ε и наблюдать за тем, как ведет себя это решение в зависимости от ε. Когда ε приближается к одному из собственных значений, поведение решения резко меняется. Поэтому собственные значения и собственные функции могут быть определены с высокой степенью точности. В качестве примера на рис. 1 представлены нормированные радиальные волновые функции основного и первого возбужденного состояния.

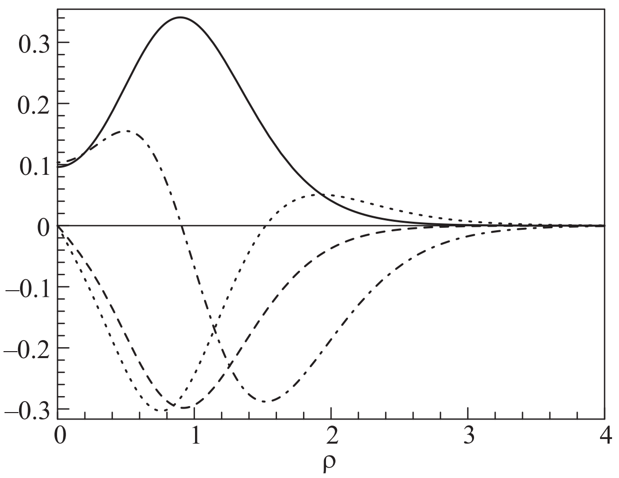

Рис. 1. Нормированные радиальные волновые функции основного и первого возбужденного состояния фермиона, соответствующие $h = 5$, $\lambda = 1$. Сплошная и штриховая линии – радиальные волновые функции $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$ основного состояния ($\varepsilon_1 = 0.538$), штрихпунктирная и пунктирная линии – радиальные волновые функции $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$ первого возбужденного состояния ($\varepsilon_2 = 3.005$)

Перечислим некоторые установленные свойства собственных функций и собственных значений. Из (7), (8) следует, что если c_1, c_2 – решение, соответствующее параметрам ε, m, h, то $c_1, -c_2$ – решение, соответствующее параметрам $-\varepsilon, m, -h$. Также из (7), (8) следует, что если c_1, c_2 – решение, соответствующее параметрам ε, m, h, то $c_1^c = c_2$, $c_2^c = c_1$ – решение, соответствующее параметрам $-\varepsilon, -m, h$. Эти свойства можно записать в сжатом виде:

$$\varepsilon, m, h, c_1, c_2 \longrightarrow -\varepsilon, m, -h, c_1, -c_2, \tag{15}$$

$$\varepsilon, m, h, c_1, c_2 \longrightarrow -\varepsilon, -m, h, c_2, c_1. \tag{16}$$

Свойство (16) является следствием инвариантности уравнения Дирака (2) относительно операции зарядового сопряжения $\psi^c = i\gamma^1\psi^*$. Из (15), (16) следует, что наличие связанного состояния фермиона при $h > 0$, $m > 0$ означает существование еще трех связанных состояний при $-h,\ m,\ \ h,\ -m$ и $-h,\ -m$.

Численно установлено, что при $h > 0$ и $m = 1/2$ все собственные значения ε являются положительными. Согласно (15), (16) из этого следует, что во внешнем **n**-поле солитона с единичным топологическим зарядом фермионные нулевые моды с $m = \pm 1/2$ отсутствуют при любом значении h. Можно предположить, что если фермионные нулевые моды отсутствуют при $m = \pm 1/2$, то они также будут отсутствовать и при $|m| > 1/2$.

Из (8), (9) и (10) следует, что при данном значении m зависимость энергии n-го связанного состояния от параметров h, λ имеет общий функциональный вид:

$$\varepsilon = \lambda^{-1} F_{m,n}(\lambda h). \tag{17}$$

Заметим, что $F_{m,n}$ является функцией лишь одной переменной $t = \lambda h$. В силу (15) функция $F_{m,n}(t)$ антисимметрична: $F_{m,n}(-t) = -F_{m,n}(t)$. На рис.2 представлена зависимость функции $F_{1/2,1}(t)$, соответствующей основному ($n = 1$) состоянию с $m = 1/2$, от переменной t. Основные свойства функции $F_{\frac{1}{2},1}(t)$ можно представить в виде соотношений

$$F_{1/2,1}(t) < t,\ F_{1/2,1}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} t,\ F_{1/2,1}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1/2. \tag{18}$$

При $\varepsilon \to h$ фермион переходит в квазиклассический режим. Его радиальные волновые функции становятся осциллирующими с периодом осцилляций много меньшим области локализации фермиона. Заметим, что в квазиклассическом режиме размер области локализации фермиона много больше размера солитона. Используя стандартные методы квазиклассического приближения [15], можно показать, что при $m = \pm 1/2$ количество связанных уровней фермиона в поле единичного солитона является бесконечным.

Рассмотрим, наконец, поведение радиальных волновых функций основного состояния в режиме $t = \lambda h \gg 1$. Из (7), (8) следует, что при $m = 1/2$ радиальная волновая функция $c_1(\rho)$ достигает своего максимума при $\rho_{\max} = \sqrt{\frac{h-\varepsilon}{h+\varepsilon}} \approx 1-\varepsilon/h$. Разлагая радиальные волновые функции $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$ в ряд Тэйлора в окрестности $\rho_{\max}$, подставляя их в (7), (8) и приравнивая нулю коэффициенты разложения, получим в главном порядке по t^{-1}:

$$c_2(\rho_{\max}) \underset{t\to\infty}{\to} -c_1(\rho_{\max}), \\ dc_2/d\rho|_{\rho_{\max}} \underset{t\to\infty}{\to} 0,\ \varepsilon\lambda \underset{t\to\infty}{\to} 1/2. \tag{19}$$

Заметим, что последнее соотношение в (19) соответствует последнему соотношению в (18).

Рассмотрим теперь изодублетное фермионное поле, связанное с $\mathbf{n}$-полем солитона юкавским взаимодействием. В данной работе были исследованы два варианта юкавского взаимодействия изодублета фермионов с изотриплетом $\mathbf{n}$-поля. Первый из них, $V_{\text{int}} = h\mathbf{n}\cdot\overline{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$, сохраняет исходную $O(3)$-инвариантность σ-модели, в то время как второй, $V_{\text{int}} = hn_3\overline{\psi}\tau_3\psi$, понижает ее до $O(2)$-подгруппы. Для обоих случаев оператор углового момента, коммутирующий с фермионным гамильтонианом, имеет вид

$$J = -i\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\epsilon_{kl}x_k\partial_l + \frac{1}{2}\sigma_3\otimes\mathbb{I} - \mathbb{I}\otimes\frac{1}{2}\tau_3, \tag{20}$$

где первая матрица в прямых произведениях действует на спинорные индексы, а вторая – на изоспинорные . Наличие дополнительного слагаемого $-\mathbb{I}\otimes\tau_3/2$ в (20) приводит к тому, что собственные значения оператора J углового момента изодублета фермионов во внешнем $\mathbf{n}$-поле единичного солитона являются целочисленными. Появление дополнительного слагаемого в (20) связано с тем, что $\mathbf{n}$-поле единичного солитона (4) инвариантно относительно комбинации пространственного вращения на угол δ и вращения вокруг оси Oz в изотопическом пространстве на угол $-\delta$. Собственные функции оператора (20), соответствующие собственному значению $m\in\mathbb{Z}$, имеют вид

$$\psi_m = \begin{pmatrix} c_{11}(r)\,e^{im\theta} & c_{12}(r)\,e^{i(m-1)\theta} \\ c_{21}(r)\,e^{i(m+1)\theta} & c_{22}(r)\,e^{im\theta} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Численное исследование системы дифференциальных уравнений для радиальных функций $c_{ij}(r)$ показало, что фермион-солитонная система имеет связанные состояния в случае $O(2)$-инвариантного юкавского взаимодействия $hn_3\overline{\psi}\tau_3\psi$ и не имеет связанных состояний в случае $O(3)$-инвариантного юкавского взаимодействия $h\mathbf{n}\cdot\overline{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$. Это, очевидно, связано с тем, что взаимодействие $h\mathbf{n}\cdot\overline{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$ не имеет удерживающего характера. Действительно, существование связанных состояний изосинглетного фермиона и изодублета фермионов во внешнем $\mathbf{n}$-поле единичного солитона можно объяснить тем, что юкавские взаимодействия $hn_3\overline{\psi}\psi$ и $hn_3\overline{\psi}\tau_3\psi$, играющие для этих двух случаев роль эффективных массовых членов, обращаются в нуль при $\rho = 1$. Поэтому фермионам энергетически выгодно быть локализованными в окрестности $\rho = 1$, образуя связанные состояния. Юкавское же взаимодействие $h\mathbf{n}\cdot\overline{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$ во внешнем $\mathbf{n}$-поле единичного солитона нигде не обращается в нуль.

В случае $O(2)$-инвариантного взаимодействия $hn_3\overline{\psi}\tau_3\psi$ система дифференциальных уравнений для четырех радиальных функций c_{ij} может быть записана в виде

$$dc_{ij}/d\rho = \Lambda_{ij,kl}c_{kl}, \tag{22}$$

где матрица Λ имеет блочно-диагональную форму:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

а парные индексы берутся в фиксированной последовательности: $ij = \{11, 21, 22, 12\}$. Матрицы $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ в (23) имеют вид

$$\Lambda^{(1)}(\varepsilon, m, h) = \begin{pmatrix} \dfrac{m}{\rho} & \varepsilon\lambda + h\lambda n_3 \\ -\varepsilon\lambda + h\lambda n_3 & -\dfrac{m+1}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\Lambda^{(2)}(\varepsilon, m, h) = \Lambda^{(1)}(-\varepsilon, -m, -h). \tag{25}$$

Мы видим, что система (22) расщепляется на две независимые системы дифференциальных уравнений, соответствующие z-проекциям изоспина фермиона $\pm 1/2$. Заметим, что между матрицами $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и матрицей Λ в (8) имеют место соотношения

$$\Lambda^{(1)}(\varepsilon, m, h) = \Lambda(\varepsilon, m+1/2, h), \tag{26}$$

$$\Lambda^{(2)}(\varepsilon, m, h) = \Lambda(-\varepsilon, -m+1/2, -h). \tag{27}$$

Из выражений (15), (16), (26) и (27) следует, что связанные состояния изосинглетного фермиона с угловыми моментами $m = \pm 1/2$ соответствуют связанным состояниям изодублета фермионов с угловым моментом $m = 0$.

Рассмотрим вопрос о том, как наличие связанного состояния фермиона влияет на стабильность солитона с единичным топологическим зарядом. В данной работе фермион-солитонная система исследуется в приближении внешнего поля. Условием применимости этого приближения является малость массы фермиона $m_\psi = h$ в сравнении с массой солитона $M_{\text{sol}} = 4\pi$. Далее, для того чтобы описание солитона в терминах классической полевой конфигурации (4) имело смысл, он должен находиться в квазиклассическом режиме. В этом режиме комптоновская длина волны солитона $\lambda_{\mathrm{sol}} = 1/M_{\mathrm{sol}}$ должна быть много меньше его линейных размеров ($\sim \lambda$). Таким образом, условия применимости приближения внешнего поля и квазиклассического приближения имеют вид

$$h \ll 1, \ \lambda \gg 1. \tag{28}$$

Порядок по h возмущающего действия фермиона на энергию солитона следует из выражения

$$\delta_\psi E = \frac{1}{2}\int \frac{\delta^2 E}{\delta\phi\,(\mathbf{r}_1)\,\delta\phi\,(\mathbf{r}_2)}\delta_\psi\phi\,(\mathbf{r}_1)\delta_\psi\phi\,(\mathbf{r}_2)d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 \sim h^2, \tag{29}$$

так как $\delta E/\delta\phi\,(\mathbf{r}) = 0$ в силу уравнений поля, а возмущающее действие фермиона на бозонное поле солитона $\delta_\psi\phi \sim h$. В выражении (29) ϕ символически означает набор независимых бозонных полей солитона. Из (29) следует, что в режиме приближения внешнего поля, $h \ll 1$, влияние фермиона на энергию солитона очень мало. Заметим, что $\delta_\psi E$ с необходимостью является положительной величиной, так как масса невозмущенного солитона $M_{\mathrm{sol}} = 4\pi$ служит нижней границей функционала энергии в классе **n**-полей с единичным топологическим зарядом. Энергию фермион-солитонной системы можно представить в виде

$$E_{\text{f-sol}} = 4\pi + \delta_\psi E + \varepsilon. \tag{30}$$

Из (17) и рис. 2 следует, что при $m = 1/2$ и $t = \lambda h \gtrsim 1$ для энергии основного состояния имеет место при-

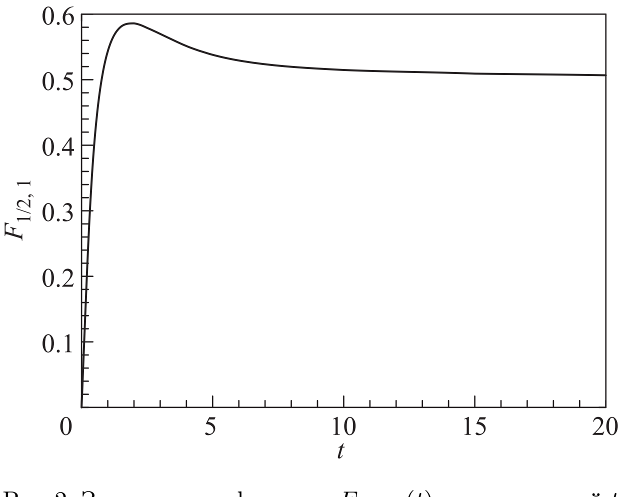

Рис. 2. Зависимость функции $F_{1/2,1}\,(t)$ от переменной t

ближенное соотношение $\varepsilon \approx 1/2\lambda$. Из (29), (30) следует, что в области параметров $h \ll 1$, $\lambda \gtrsim h^{-1} \gg 1$ можно пренебречь вкладом $\delta_\psi E$ в энергию фермион-солитонной системы:

$$E_{\text{f-sol}} \approx 4\pi + 1/2\lambda\,. \tag{31}$$

Выражение (31) будет справедливым в области параметров

$$h \ll 1, \ h^{-1} \lesssim \lambda \lesssim h^{-2}, \tag{32}$$

где выполнены условия квазиклассичности и приближения внешнего поля (28). Из (31) следует, что наличие связанного фермиона в основном состоянии снимает вырождение энергии солитона по параметру λ. В области параметров (32) энергия фермион-солитонной системы (31) уменьшается с ростом λ, поэтому увеличение размера солитона становится энергетически выгодным.

Работа выполнена при поддержке программы повышения конкурентоспособности ТПУ и Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 12-02-00560-а).

---

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
3. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
4. G. H. Derrick, J. Math. Phys. **5**, 1252 (1964).
5. B. J. Schroers, Phys. Lett. B **356**, 291 (1995).
6. B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, and W. J. Zakrzewski, Z. Phys. C **65**, 165 (1995).
7. B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, and W. J. Zakrzewski, Nucl. Phys. B **439**, 205 (1995).
8. R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
9. T. Dereli, J. H. Swank, and L. J. Swank, Phys. Rev. D **12**, 3541 (1975).
10. P. Hasenfratz and G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **36**, 1119 (1976).
11. В. А. Рубаков, Письма в ЖЭТФ **33**, 658 (1981); Nucl. Phys. B **203**, 311 (1982).
12. C. G. Callan, Phys. Rev. D **25**, 2141 (1982); Phys. Rev. D **26**, 2058 (1982); Nucl. Phys. B **212**, 391 (1983).
13. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля: Теории с фермионами. Некоммутативные теории*, КомКнига, М. (2005).
14. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, М. (2001).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, М. (1989).