

Солитон в стационарной и динамической ловушках

Н. Н. Розанов^{++×1)}, Н. В. Высотина⁺

⁺ Государственный оптический институт им. Вавилова, 199053 С.-Петербург, Россия

^{*} Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

[×] Физико-технический институт им. Иоффе, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 29 августа 2014 г.

После переработки 11 сентября 2014 г.

На примере атомного бозе-эйнштейновского конденсата выполнен анализ динамики солитона в одномерной ловушке с неподвижными и осциллирующими стенками. Продемонстрировано согласие следствий упрощенного ньютоновского уравнения, описывающего взаимодействие солитона с его противофазными зеркальными отражениями, и исходного уравнения Гросса–Питаевского. Проведено сравнение с динамикой точечной классической частицы в задаче Ферми–Улама.

DOI: 10.7868/S0370274X14200065

В настоящее время в различных разделах физики широко используются модели Ферми [1] и Улама [2] движения классической частицы между осциллирующими стенками. Анализ модели Ферми–Улама привел в том числе к глубоким результатам в статистической физике [3, 4]. В данной работе рассматривается подобная модель с заменой точечной классической частицы на солитон на примере атомного бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК). Как показывает прямое решение уравнения Гросса–Питаевского, при указанных ниже условиях солитон в одномерной ловушке с осциллирующими стенками не разрушается, что и делает правомерным его сопоставление с частицей. Основное различие здесь связано с пространственной протяженностью солитона. Отметим, что “идеальный” солитон отвечает локализованной волновой структуре в бесконечном однородном пространстве различной размерности. Однако если размер системы существенно превышает протяженность солитона, то понятие “солитон” физически оправдано. Выяснению подлежит вопрос о соотношении частицеподобных и волновых свойств солитона и об отличиях его динамики от динамики классической частицы. Некоторые свойства нелинейных структур БЭК в динамических ловушках (с осциллирующими стенками) изучались в [5, 6]. Здесь же, по-видимому впервые, рассматривается задача Улама [2] применительно к солитонам.

Атомарный БЭК в сигарообразной (эффективно одномерной) ловушке описывается уравнением

Гросса–Питаевского для коллективной волновой функции $\psi(z, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + U_0 |\psi|^2 \psi, \quad (1)$$

$$\psi[z = L_{\text{left}}(t), t] = \psi[z = L_{\text{right}}(t), t] = 0.$$

Здесь \hbar – приведенная постоянная Планка, m_p – масса атомов, U_0 – постоянная межатомного взаимодействия (далее считается, что $U_0 < 0$), t – время, z – продольная координата (вдоль оси ловушки). Уравнение (1) оправдано для разреженного газа при нулевой температуре. Граничные условия отвечают отсутствию проникновения атомов через стенки ловушки, положение которых $L_{\text{left/right}}$ зависит от времени. Для непроникновения атомов необходимо создать для них достаточно глубокую потенциальную яму, что вполне доступно для хорошо изученных магнитных ловушек [7]. Резкость изменения потенциала в области стенок ловушки не имеет столь принципиального значения. При этом малая вероятность туннелирования атомов через барьеры обеспечивает большое время жизни конденсата в ловушке, ограничивающее доступное экспериментально время наблюдения.

В неограниченной среде уравнение (1) решается методом обратной задачи рассеяния [8]. В безразмерной форме, $t' = t/T$, $z' = z/Z$, $\psi' = \psi/n$, $Z^2 = \hbar T / (2m_p)$, $n^2 = \hbar / (T|U_0|)$ (1) принимает вид (штрихи опускаем)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2)$$

¹⁾ e-mail: nnrosanov@mail.ru

Неподвижные стенки, $L_{\text{left}} = -L_0/2$, $L_{\text{right}} = L_0/2$. В отличие от классической точечной частицы, которая может покоиться в любом положении внутри ловушки длиной L_0 , даже узкий солитон (с характерной шириной $W \ll L_0$) из-за взаимодействия его хвостов со стенками может быть неподвижным только при расположении в центре ловушки ($z = z_c = 0$). Для неподвижного стационарного солитона $\psi(z, t) = e^{ivt}\Psi(z)$. Тогда для вещественной функции $\Psi(z)$ из (2) следует сохранение величины

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}v\Psi^2 + \frac{1}{4}\Psi^4 \right) = W = \text{const.} \quad (3)$$

В неограниченной среде (предел $L_0 \rightarrow \infty$) солитон имеет стандартный профиль:

$$\Psi_0(z) = \frac{A}{\text{ch}(z/w)}, \quad v = \frac{1}{w^2}, \quad A^2 = \frac{2}{w^2}. \quad (4)$$

В ловушке конечной длины (граничное условие $\Psi(\pm L_0/2) = 0$) профиль солитона отвечает горбу кноидальной волны:

$$\Psi = b \text{cn} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} z, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad (5)$$

$$a^2 = \sqrt{v^2 + 4W} - v, \quad b^2 = \sqrt{v^2 + 4W} + v, \quad (6)$$

$$L_0 = 2\sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \mathbf{K} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Здесь \mathbf{K} – полный эллиптический интеграл, cn – эллиптическая функция Якоби. Таким образом, при фиксированной длине ловушки имеется однопараметрическое семейство локализованных решений со спектральным параметром v , связанным с шириной солитона w , причем при $w \ll L_0$ форма солитона хорошо описывается соотношениями (4). При этом согласно (4) граничные условия можно удовлетворить, сведя задачу к отталкивательному взаимодействию солитона с его противофазными зеркальными отражениями в неограниченной среде. Хотя таких отражений бесконечно много, при принимаемом далее условии $w \ll L_0$ с солитоном существенно взаимодействуют только два наиболее близких “отраженных” солитона – от левой и от правой стенки.

Движение узкого солитона в стационарной ловушке. Замена задачи о “солитоне в ящике” на задачу о взаимодействии этого солитона с двумя его противофазными зеркальными изображениями оправдана при дополнительном условии, согласно которому удаление солитона от стенок значительно превышает

его ширину w , т.е. $|z_c(t) \pm L_0/2| \gg w$. Тогда движение центра солитона $z_c(t)$ можно описать ньютоновыми уравнениями движения [9] при соответствующем потенциале взаимодействия. Так как взаимодействие солитона с его изображениями является отталкивательным и происходит за счет перекрывания их далеких хвостов, амплитуда которых убывает экспоненциально с удалением от центра солитона, уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = -\frac{w}{2}\omega_0^2 \sinh \left(\frac{2}{w} z_c \right). \quad (7)$$

Смысл величины ω_0 выявляется в случае малых осцилляций солитона около середины ловушки ($z_c \ll w/2$). Тогда

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = -\omega_0^2 z_c, \quad z_c = z_{c0} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (8)$$

(амплитуда z_{c0} и фаза φ_0 произвольны). Таким образом, ω_0 – частота малых (гармонических) осцилляций солитона около середины ловушки. Эту величину можно найти в подходе Горшкова–Островского [9]. С прямым решением уравнения Гросса–Питаевского (1) хорошо согласуется следующее выражение:

$$\omega_0 = \frac{8L_0^2}{w^2} \exp \left(-\frac{L_0}{2w} \right). \quad (9)$$

Отметим, что для точечной классической частицы малые колебания типа (8) невозможны. Нормируя отклонение центра солитона и время: $y = z_c/(w/2)$, $t' = \omega_0 t$, приводим (7) к универсальному (не содержащему параметров) виду (штрих опускаем):

$$\frac{d^2 y}{dt'^2} = -\sinh y. \quad (10)$$

Решения (10) с начальными условиями $y(0) = 0$, $V_0 = y'(0) = \sqrt{2(W-1)}$, $W > 1$ являются периодическими с периодом

$$T = 4\sqrt{\frac{2}{W+1}} \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{W-1}{W+1}} \right). \quad (11)$$

Траектория центра солитона имеет вид

$$y(t) = \text{Arch} \left[1 + (W-1) \text{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{W+1}{2}} (t - t_0), \sqrt{\frac{W-1}{W+1}} \right) \right]. \quad (12)$$

При $W - 1 \ll 1$ колебания оказываются гармоническими с периодом 2π . С ростом W период уменьшается, амплитуда колебаний возрастает, а траектория приближается к пилообразной (при больших начальных значениях скорость слабо изменяется почти на всей траектории за исключением окрестностей точек поворота, где она резко меняет знак). На рис. 1 представлены фазовая плоскость уравнения (10) и

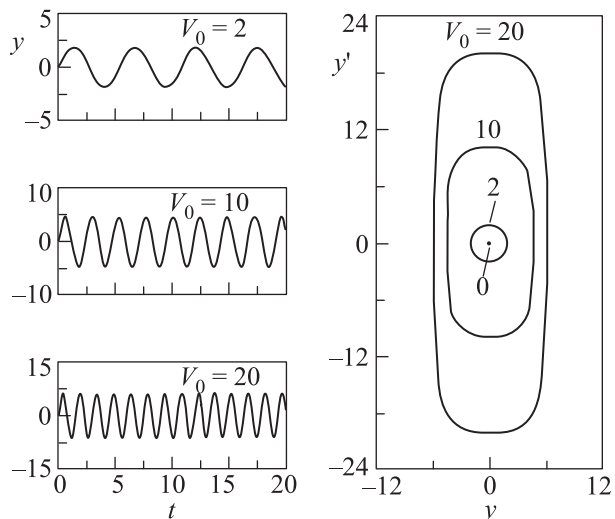


Рис. 1. Зависимости $y(t)$ при различных начальных скоростях солитона V_0 в статической ловушке (слева) и фазовая плоскость уравнения (10) (справа)

несколько траекторий. Их расчет по уравнениям (10) и (1) с графической точностью совпадает.

Движущиеся стенки ловушки. Дополнительно к предыдущим ограничениям будем считать, что частота осцилляций стенок мала по сравнению с частотой невозмущенного солитона v (см. (4)) и глубина модуляции положения стенок тоже мала, $|\delta L_{\text{left/right}}|/L_0 \ll 1$. Тогда ньютоновское уравнение движения для центра солитона имеет вид:

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = -\frac{w}{4}\omega_0^2 \exp\left\{\frac{L_0}{w}\left(\exp\left\{-\frac{2}{w}[L_{\text{right}}(t) - z_c]\right\} - \exp\left\{-\frac{2}{w}[z_c - L_{\text{left}}(t)]\right\}\right)\right\}. \quad (13)$$

Конкретизируем закон движения стенок:

$$\begin{aligned} L_{\text{right}} &= L_0 \left[\frac{1}{2} + \mu \cos(\Omega t) \right], \\ L_{\text{left}} &= L_0 \left[-\frac{1}{2} + \mu \cos(\Omega t) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} = -\frac{w}{c}\omega_0^2 \sinh\left\{\frac{2}{w}[z_c - \mu L_0 \cos(\Omega t)]\right\}. \quad (15)$$

Введем безразмерную “движущуюся” координату центра солитона и безразмерное время: $y = (2/w)[z_c - \mu L_0 \cos(\Omega t)]$, $t' = \Omega t$. Тогда (штрих опускаем)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \sinh y + B \cos t, \quad A = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}, \quad B = \frac{2}{w}\mu L_0. \quad (16)$$

При $B = 0$ это уравнение совпадает с (10). При малых отклонениях центра солитона ($y^2 \ll 1$) из (16) следует консервативный вариант уравнения Дюффинга [10]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay = -\frac{A}{6}y^3 + B \cos t. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) в зависимости от параметров A и B и начальных условий имеют различные решения. Вдали от основного резонанса ($|B/(A - 1)| \ll 1$) решение является гармоническим с периодом 2π : $y = [B/(A - 1)] \cos t$. Периодические решения с различными периодами возможны, когда величина A близка к квадрату рациональной дроби с небольшими целочисленными числителем и знаменателем. Вне резонансов типичны почти периодические колебания, а также режимы динамического хаоса, как в классической задаче Улама [2–4] (см. также [11]). На рис. 2а и б приведен пример периодической динамики, а на

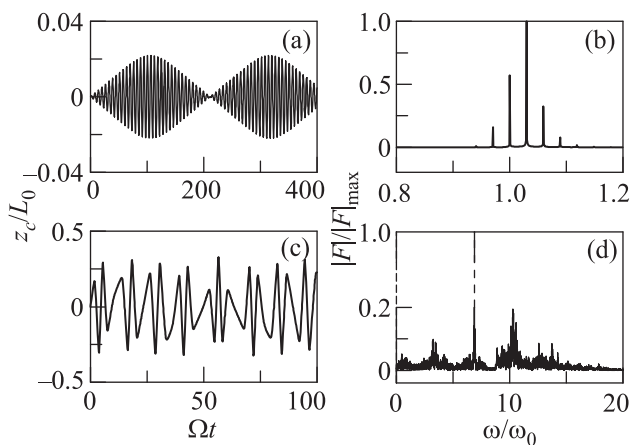


Рис. 2. Временная зависимость координаты центра солитона (а, с) и спектр (фурье-преобразование этой зависимости) (б, д) для периодического режима (а, б; $\mu = 0.0005$, $\Omega/\omega_0 = 1$, $V_0 = 0$) и для режима динамического хаоса (с, д; $\mu = 0.1$, $\Omega/\omega_0 = 6.88$, $V_0 = 4$); $w/L_0 = 0.0663$

рис. 2с и д – пример хаотической динамики. (Последовательный анализ различных режимов послужит предметом отдельной статьи.) Решения (16) при принятых условиях хорошо согласуются с прямым решением уравнения Гросса–Питаевского (1). Различия

возникают при нарушении основного условия применимости ньютоновского уравнения, когда солитон приближается к своему зеркальному изображению на расстояния, сравнимые с его шириной, и утрачивается четкий смысл разделения солитона и его изображения. При достаточно малых начальных скоростях солитона такого сближения не происходит ни при каких временах. Вместе с тем при достаточно высоких скоростях солитона на части траектории солитон и его изображение перекрываются, что лишает определенности понятие скорости центра солитона. В этих условиях возникают различия динамики солитона по ньютоновскому уравнению и по уравнению Гросса–Питаевского (рис. 3). Однако даже тогда

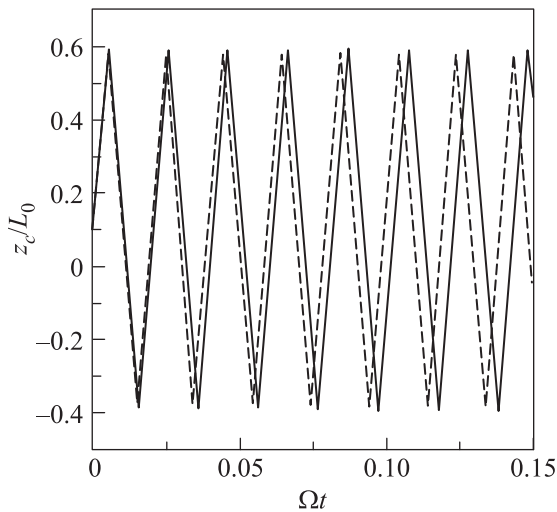


Рис. 3. Сравнение динамики центра солитона по “ньютоновскому” уравнению (сплошная кривая) и по уравнению Гросса–Питаевского (штриховая кривая, $\mu = 0.1$, начальная ширина солитона $w = 0.03$, его начальная скорость $V_0 = 100$)

хорошее согласие можно получить, введя в выражение для ω_0 (9) поправочный численный множитель. Отметим также, что предполагавшаяся при выводе ньютоновского уравнения (16) неизменность ширины солитона в центре ловушки в процессе столкновений со стенками подтверждается прямым решением уравнения Гросса–Питаевского (w сохраняется с относительной точностью не хуже 10^{-4} при $\mu = 0.1$ и $w = 0.03$ на протяжении десятков и сотен столкновений). Как указывалось выше, при приближении к стенкам быстрого солитона его форма претерпевает серьезные изменения, не учитываемые в рамках

ньютоновского уравнения. Однако длительность таких изменений мала (обратно пропорциональна исходной скорости солитона).

Таким образом, узкий солитон не разрушается при столкновениях с медленно осциллирующими стенками ловушки (условия сформулированы выше) и потому может быть эффективно уподоблен частице. Волновые свойства солитона ярко проявляются при малых скоростях его движения. Примером служит режим малых колебаний солитона около центра ловушки, невозможный для классической частицы. При больших скоростях динамика солитона приближается к динамике классической частицы. Как и для классической частицы в задаче Улама [2], регулярного ускорения солитона не происходит. Имеет место периодическое, почти периодическое и хаотическое движение солитона в динамической ловушке. Ньютоновское уравнение в модели отталкивающего взаимодействия солитона с его противофазными зеркальными отражениями хорошо описывает динамику солитона в статических и динамических ловушках.

Авторы благодарны участникам VII конференции “Солитоны, коллапс и турбулентность” (Черноголовка, август 2014 г.), а также Л.А. Нестерову за полезные обсуждения. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект # 14-12-00894).

1. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
2. S. Ulam, in *Proceedings of the Fourth Berkley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability*, California University Press, Berkeley – Los Angeles (1961), v. 3, p. 315.
3. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, М. (1984).
4. А. Ю. Лоскутов, УФН **177**, 989 (2007).
5. N. N. Rosanov, Phys. Rev. A **88**, 063616 (2013).
6. N. N. Rosanov, Phys. Rev. A **89**, 035601 (2014).
7. П. Э. Тошек, УФН **158**, 451 (1989).
8. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
9. К. А. Gorshkov and L. A. Ostrovsky, Physica D **3**, 428 (1981).
10. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гос. изд. технико-теоретической литературы, М. (1956).
11. В. Д. Винокурова, Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ **40**(21), 21 (2014).