Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 1, стр. 3 — 8 10 июля 1991 г.

НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ КАК ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ СО СВЯЗЯМИ

А.М.Семихатов

Физический институт им.П.Н.Лебедева АН СССР
117924, Москва

Поступила в редакцию 28 мая 1991 г.

Статья посвящена теории интегрируемых иерархий со связями и ее приложениям к матричным моделям непертурбативной квантовой гравитации и взаимодействующей с ней материи.

0. Непертурбативная квантовая гравитация, в том числе взаимодействующая с материей, описывается матричными моделями [1], которые, в свою очередь, порождают [2] решения интегрируемых иерархий, подчиненные некоторым дополнительным условиям [3–6]. При этом, однако, детали соответствия между конкретными матричными моделями и разнообразными (редуцированными) интегрируемыми иерархиями не очевдны. В то же время различные интегрируемые иерархии могут оказаться одинаково хороши для непертурбативного описания некоторого класса теорий с двумерной гравитацией, хотя бы даже их собственно матричная формулировака отсутствовала. В Качестве аргумента в поддержку этой точки зрения мы показываем ниже, каким образом соответствие с теоретико-полевым описанием может быть установлено путем чисто "иерархического" вывода рекурсионных [7] (в несколько ином контексте - петлевых [2,8]) уравнений. Метод основан на использовании процедуры одевания, скрытой в структуре интегрируемых систем.

Мы начинаем с иерархии Тоды [9], ограниченной условиями Вирасоро. Иерархия Тоды универсальна среди "дискретных" (решеточных) иерархий, а с другой стороны, для нее во всяком случае известна связь с матричными моделями [5,10]. Ее "непрервыным" аналогом оказывается КП иерархия. Мы предлагаем смотреть на иерархии Тоды и КП как на показательные примеры общих иерархий с r-матричной структурой [11]. Кажется очень правдоподобным, что выводимые ниже петлевые уравнения обобщаются на этот широкий класс интегрируемых систем и тем самым имеется соответствие (эквивалентность?) вида (интегрируемые иерархии со связями) $\longleftrightarrow$ (двумерные теории, взаимодействуюие с гравитацией), к которому мы и хотим привлечь внимание в настоящей работе.

1. Напомним очень кратко основные определения, относящиеся к иерархии Тоды [9]. Одевающий оператор $W(\hat{W}^{(\infty)}$ в обозначениях [9]) представляет собой $Z \times Z$-матрицу, действующую в пространстве векторов вида $\sum_{s\in Z} v(s)|s>$. Определим операторы $\hat{p}$ и Λ посредством $\hat{p}|s>=s|s>$, $\Lambda|s>=|s-1>$. Тогда

$$W=\sum_s |s><s|w(s;x,y;\Lambda),\quad W^{-1}=\sum_s w^*(s;x,y;\Lambda)|s><s|, \tag{1}$$

где $w(s;x,y;\lambda)$ и $w^*(s;x,y;\lambda)$ выражаются через тау-функцию как

$$w(s;x,y;\lambda)\equiv\sum_{j=0}^{\infty} w_j(s;x,y)\lambda^{-j}=\frac{\tau(s;x-[\lambda^{-1}],y)}{\tau(s;x,y)},\quad w^*(s;x,y;\lambda)=\frac{\tau(s;x+[\lambda^{-1}],y)}{\tau(s;x,y)}. \tag{2}$$

Здесь $x=(x_1,x_2,x_3,..)$ обозначает времена иерархии, и $x\pm[\lambda^{-1}]=(x_1\pm\lambda^{-1},x_2\pm\frac{1}{2}\lambda^{-2},x_3\pm\frac{1}{3}\lambda^{-3},...)$ (y обозначает еще один набор вермен, которым, однако, мы не будем интересоваться).

2. Исходными "динамическими" данными являются условия Вирасоро на тау-функцию, $L_n\tau(x,y)=0$, $n\geq 0$, в которых генераторы Вирасоро даются обычными формулами

$$L_{p>0}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_{p-k}}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{k\geq 1}kx_k\frac{\partial}{\partial x_{p+k}}+(\hat{p}+\frac{1}{2}(2J-1)+(J-\frac{1}{2})p)\frac{\partial}{\partial x_p},$$

$$L_0=\sum_{k\geq 1}kx_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\left(\hat{p}+\frac{1}{2}(2J-1)\right)^2-\frac{1}{24} \tag{3}$$

и подобными же выражениями для $L_{p<0}$, которые все вместе образуют алгебру $[L_p,L_q]=(p-q)L_{p+q}+\delta_{p+q,0}(-p^3)(J^2-J+\frac{1}{6})$, (откуда ясна роль параметра J). В терминах одевающих операторов условия Вирасоро эквивалентным образом переписывают как

$$\mathcal{L}_n\equiv\left(W\{[J(n+1)+\hat{p}]\Lambda^n+\sum_{r\geq 1}rx_r\Lambda^{r+n}\}W^{-1}\right)_-=0,\quad n\geq 0, \tag{4}$$

где $(...)_-$ означает проекцию на нижнетреугольную часть матрицы. В этой форме они допускают скейлинговый передел, являющийся "иерархической" версией [12] двойного скейлингового предела [1]. При $\epsilon\to 0$, пусть $s=\frac{t_1}{\epsilon}$, так что, формально, $\partial/\partial s=\epsilon D$, $D\equiv\partial/\partial t_1$ и $\Lambda=e^{\epsilon D}$. Введем следующий скейлинговый анзац:

$$w_j=\sum_{n\geq 1}\epsilon^n\begin{pmatrix} j+n-1\\ n-1\end{pmatrix}k_n,\quad j\geq 1,\quad w_i^*=\sum_{m\geq 1}\epsilon^m\begin{pmatrix} i+m-1\\ m-1\end{pmatrix}k_m^*,\quad i\geq 1, \tag{5}$$

где k_i станут в дальнейшем коэффициентами одевающего оператора КП иерархии. Временные параметры и генераторы Вирасоро также подвергаются секйлингу (ср. [10]):

$$x_r=\frac{1}{r}\sum_{s=r}^{\infty}\begin{pmatrix} s\\ r\end{pmatrix}(-1)^{s+r}(s+1)\frac{t_{s+1}}{\epsilon^{s+1}},\quad r\geq 1,\quad \tilde{\mathcal{L}}_{p-1}=\sum_{n=0}^{p}\begin{pmatrix} p\\ n\end{pmatrix}\mathcal{L}_n(-1)^{n+p}\epsilon^{-p+1},\quad p\geq 0, \tag{6}$$

где t - новые (конечные при $\epsilon \to 0$) времена, а $\tilde{\mathcal{L}}$ - комбинации связей, обладающие хорошим скейлинговым поведением. Полагая k_l и k^*_m конечными функциями от ϵ при $\epsilon \to 0$ и сдвигая дополнительно $t_1 \mapsto t_1 - \sum_{r\geq 2}(r+1)t_{r+1}(-1)^r\epsilon^{-r+1}$, получаем новые условия Вирасоро [12] :

$$\mathcal{L}_p^{(KP)} = \lim_{\epsilon\to 0} \tilde{\mathcal{L}}_p = (K(J(p+1) + \sum_{r\geq 1} rt_r D^r)D^p K^{-1})_- = 0, \;\; p \geq -1, \tag{7}$$

где $K = 1 + \sum_{n\geq 1} k_n D^{-n}$ - одевающий оператор КП иерархии [14]. Теперь $(...)_-$ обозначает проекцию из псевдодифференциальных операторов на чисто интегральные. (Отметим, что нет никакой априорно простой связи между двумя операциями $(...)_-$ в дискретном и континуальном случаях.) Выражения, зануление которых утверждается в (7), являются в точности генераторами Вирасоро на КП иерархии, полученными непосредственно в работе [13].

3. Итак, стартовав с "дискретной" иерархии, ограниченной условиями Вирасоро, мы осуществили ее скейлинговый предел, причем "непрерывная" иерархия оказалась подчиненной своим собственным условиям Вирасоро. Сейчас мы увидим, что последние доставляют аналогии (точнее - прототип для случая бесконечного числа примарных полей) петлевых/рекурсионных/puncture уравнений [3,7,8]. Именно, условия (7) на КП иерархии суммируются в производящее выражение

$$(K(P + lJ)e^{Dl}K^{-1})_- = 0, \;\; P \equiv \sum_{r\geq 1} rt_r D^{r-1}, \tag{8}$$

в котором l играет роль петлевого параметра - длины. Отметим попутно эквивалентную формулировку

$$K(x) \circ (x + lJ + \sum_{s\geq 2} st_s D^{s-1}) = A \circ K(x+l), \tag{9}$$

где $A = A(x,l)$ - дифференциальный оператор (порядка N, если времена t_r ненулевые только при $r \leq N+1$), удовлетворяющий системе нелокальных интегрируемых уравнений

$$\frac{\partial A}{\partial t_r} = Q(x)^r_+ A - AQ(x+l)^r_+. \tag{10}$$

Эволюционные уравнения подобного типа предлагалось рассматривать [16] как результат "квантования" спектрального параметра в обычных, локальных, иерархиях, что интересно сравнить с "квантовыми" римановыми поверхностями из работы [4].

Вернемся к (8). Помимо этого уравнения имеются еще "старшие" петлевые соотношения, отражающие наличие достаточно большой алгебры симметрии КП иерархии, ограниченной условиями Вирасоро. Эта алгебра совпадает с "борелевской"[1)] подалгеброй бесконечной W-алгебры $W_\infty(J)$ [18]. (Зависимость от J иллюстрируется тем обстоятельством, что характерная подалгебра - алгебра высших спинов $B_\lambda = Usl(2)/I_\lambda$ [19] - является фактором универсальной обертывающей $sl(2)$ по идеалу, порожденному соотношением (Casimir)$= \lambda \equiv J - J^2$.)

Полный набор W_∞-соотношений на одевающие операторы имеет при $J=0$ вид

[1)] т.е. порожденной генераторами старших спинов $W_n^{(s)}$ для которых $n \geq -s+1$.

$$\exp\left\{\sum_{r\geq 2} t_r \left[\left[\frac{\partial}{\partial l}+\epsilon\right]^r - \frac{\partial^r}{\partial l^r}\right]\right\}(Ke^{\epsilon x}e^{lD}K^{-1})_- = (Ke^{lD}K^{-1})_- . \qquad (11)$$

(Зависимость от J восстанавливается путем формального включения в операцию одевания сопряжения $e^{JlD}...e^{-JlD}$, что ясно при переписывании (8) в виде $(Ke^{JlD}Pe^{lD}e^{-JlD}K^{-1})_- = 0$.) Уравнение (11) есть не что иное как преобразование Лапласа от связей

$$\sum_{n\geq 0} v^{-n-1}\oint dz z^n \mathfrak{D}(z+\mathcal{E}, z) = 0,$$

где оператор

$$\mathfrak{D}(u,v) = \psi(t,u)\circ D^{-1}\circ\psi^*(t,v), \qquad (12)$$

в котором $\psi(t,u)$ и $\psi^*(t,u)$ - волновая функция и сопряженная волновая функция КП иерархии - имеет ясный геометрический смысл "bc вставки"[15] на фоне[20] оператора K. Более точно, вставка осуществляется асоциированным с $\mathfrak{D}(u,v)$ векторным полем $\hat{\mathfrak{D}}(u,v)$ на пространстве операторов K, осуществляющим инфинитезимальную вариацию $\delta K = \mathfrak{D}(u,v)K$.

4. Теории с конечным числом "примарных полей" следуют из предыдущего путем N-редукции. Напомним[14], что редукция КП иерархии самой по себе, без каких бы то ни было связей, к N-КдФ иерархии достигается наложением требования $(KD^N K^{-1})_- = 0$. Согласованность с этой редукцией симметрий КП иерархии[21], генерируемых билокальными операторами (12), определяется коммутатором соответствующих симметриям и связям векторных полей на пространстве операторов K. Коммутаторы сводятся[15] к коммутаторам "голых" генераторов:

$$(K[e^{(u-v)P}\frac{1}{v}\delta(v,D), D^N]K^{-1})_- = (Ke^{(u-v)P}(v^N - u^N)\frac{1}{v}\delta(v,D)K^{-1})_-,$$

где $\delta(u,v) = \sum_{n\in Z}\frac{u^n}{v^n}$ - формальная дельта функция[14]. Условие обращения в ноль, таким образом дает $u^N = v^N$, так что можно положить $u = z_a$, $v = z_b$, где $z_a = e_a z$ и $e_a = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{a}{N}\right)$. Вспомним еще, что спектральный параметр N–КдФ иерархии лежит на комплексной кривой $\{(z,E)\in C^2 | z^N = P(E)\}$, где P - полином. Проекция на $CP^1 \ni E$ является N-листным накрытием и позволяет ввести N волновых функций $\psi^{(a)} = \psi(t,(z_a,E))$ и аналогично $\psi^{(a)*} = \psi^*(t,(z_a,E))$. Тогда симметрии N-КдФ иерархии, индуцированные из КП иерархии, порождаются "токами" (отметим многозначительную аналогию с конформными теориями поля на Z_N-кривых[21]),

$$\mathcal{J}^{ab}(E) = \psi^{(a)}(t,E)\circ D^{-1}\circ\psi^{(b)*}(t,E). \qquad (13)$$

Векторные поля, ассоциированные с этими псевдодифференциальными операторами, удовлетворяют алгебре токов $sl(N)$:

$$[[\hat{\mathcal{J}}^{ab}(E), \hat{\mathcal{J}}^{cd}(E')]] = \delta^{bc}\frac{1}{z}\delta(z,z')\hat{\mathcal{J}}^{ad}(E) - \delta^{ad}\frac{1}{z}\delta(z,z')\hat{\mathcal{J}}^{cb}(E), \qquad (14)$$

где $[[,]]$ обозначает коммутатор векторных полей на операторах, а не просто операторов.

Эта алгебра токов $sl(N)$ может иметь важную интерпретацию в контексте W_N-гравитации. Поскольку токи (13) удовлетворяют (по отношению к $[[,]]$-скобке) стандартным коммутационным соотношениям с "тензором энергии-импульса"

$$\sum_{c=0}^{N-1} e_c^2 \frac{\partial \psi^{(c)}}{\partial z_c} \circ D^{-1} \circ \psi^{*(c)}, \tag{15}$$

индуцированным с КП иерархии (см. ниже), оказывается возможным одновремено наложить условия старшего веса и для алгебры Вирасоро, и для алгебры токов. Вообще, мы призываем к тому, чтобы постулировать подходящие дополнительные условия, не выводя их из других принципов, и лишь потом искать связь с теоретико-полевым описанием, используя для этого "петлевые" уравнения, выводимые в терминах иерархий с дополнительными условиями. Опыт последних десяти лет свидетельствует, что условия старшего веса по отношению к полупрямому произведению алгебр Вирасоро и Каца - Муди во всяком случае являются содержательными.

Полная алгебра симметрии N-КдФ иерархии, ограниченной условиями Вирасоро, может быть получена непосредственно из КП иерархии со связями (7): совместными с условиями N-редукции оказываются только генераторы $\mathcal{L}_n$ при $n = Nj$, $j \geq 0$ (а J следует положить равным нулю), так что необходимо ослабить условия Вирасоро на КП иерархии до $\mathcal{L}_{Nj} = 0$. Но кроме того, после наложения условия N-редукции можно непротиворечивым образом потребовать дополнительно, чтобы $\mathcal{L}_{-N} = 0$, что даст в итоге N-КдФ иерархию с $\mathcal{L}_{(\geq 1)}$-условиями Вирасоро, где собственно-N-КдФ генераторы Вирасоро имеют вид

$$\mathcal{L}_{(j)} = \frac{1}{N}(KPD^{Nj+1}K^{-1})_-, \quad P = \sum_{a,i}(Ni+a)t_{a,i}D^{Ni+a-1},$$

$$t_{a,i} = t_{Ni+a}, \quad i \geq 0, \quad a \in \{1, ..., N-1\}. \tag{16}$$

(Именно эти генераторы составляют тензор энергии-импульса (15).) Полная система связей, порожденных условиями Вирасоро $\mathcal{L}_{(j)} = 0$, $j \geq -1$, может быть записана в виде производящего соотношения, аналогичного (11):

$$(K(e^{\epsilon PD^{1-N}} - 1)e^{lD^N}K^{-1})_- = 0. \tag{17}$$

Отметим, что присутствие в "ядре" $\exp lD^N$ только оператора D^N выделяет в выражении $PD^{1-N} = \sum_{a,i}(Ni+a)t_{a,i}D^{n(i-1)+a}$ первые $N-1$ слагаемых, которые, как известно, соответствуют примарным полям.

Литература

1. Brezin E., Kazakov V.A. Phys. Lett., 1990, B236, 144; Douglas M.R., Shenker S.H. Nucl. Phys., 1990, B335, 635; Gross D.J., Migdal A.A. Phys. Rev. Lett., 1990, 64, 127.

2. Gross D.J., Migdal A.A. A Nonperturbative Treatment of Two Dimensional Quantum Gravity, PUPT-1159; Banks T., Douglas M.R., Seiberg N., Shenker S.H. Microscopic and Macroscopic Loops in Non-Perturbative Two Dimensional Gravity, RU-89-50; Douglas M.R. Phys. Lett., 1990, B238, 176.

3. Fukuma M., Kawai H., Nakayama R. Int. J. Mod. Phys., 1991, A6, 1385; Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. Nucl. Phys., 1991, B 348, 435.

4. Moore G. Comm. Math. Phys., 1990, 133, 261.

5. Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A. et al. Matrix Models of 2D Gravity and Toda theory, Lebedev Inst. prepr., July 1990; Martinec E.J. On the Origin of Integrability in Matrix Models, EFI-90-67; Mironov A., Morozov A. Phys.Lett., 1990, B252, 47; Itoyama H., Matsuo Y. Phys. Lett., 1991, B255, 202.

6. Fukuma M., Kawai H., Nakayama R. Infinite-Dimensional Grassmannian Structure of Two-Dimensional Quantum Gravity, UT-572/KEK-TH-272 (Nov. 1990); Goeree J. W-Constraints in 2-D Quantum Gravity, THU-16 (Oct. 1990); Awada M.A., Sin S.J.Twisted W_∞ Symmetry of the KP Hierarchy and the String Equations of $d = 1$ Matrix Models, UFIFT-HEP-90-33 (Nov. 1990); Yen T. Virasoro Constraints for D_{2n+1}, E_6, E_7, E_8 - Tyre Minimal Models Coupled to 2-D Gravity, CALT-68-1661; Itoyama H., Matsuo Y. $w_{1+\infty}$ - Type Constraints in Matrix Models at Finite N, ITP-SP-91-10 (March 1991); Dijkgraaf R., Witten E. Nucl. Phys., 1990, B342, 486.

7. Witten E. Two Dimensional Gravity and Intersection Theory on Moduli Space, IASSNS-HEP-90/45.

8. Moore G., Seiberg N., Staudacher M. From Loops To States in 2D Quantum Gravity

9. Ueno K., Takasaki K. Toda Lattice Hierarchy, in: Adv. Studies Pure Math. 4 (1984) 1.

10. Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A., Morozov A. Continuum Versus Discrete Virasoro in 1-Matrix Models. Lebedev Inst. preprint (Nov. 1990); Alvarez-Gaume L., Gomez C., Lacki J. Phys. Lett., B253 (1191) 56.

11. Семенов-Тянь-Шанский М.А. Функ. Ан. Прилож. 17 (1983) 17.

12. Semikhatov A.M. Continuum Reduction of Lattice Virasoro-Constrained Hierarchies, Lebedev Inst. Prepr. (Jan. 1991).

13. Semikhatov A.M. Int J. Mod. Phys. 1989, A4 , 467.

14. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. In: Proc RIMS Symp. on Non-Linear Integrable systems, M. Jimbo and T.Miwa (eds), World Science, Singapore 1983, p. 39.

15. Semikhatov A.M. Conformal Fields: from Riemann Surfaces to Integrable Hierarchies, Lebedev Inst. preprint (Nov. 1990).

16. Degasperis A., Lebedev D., Olshanetsky M. et al. Recent Development for Integrable-Differential Equations, BONN-HE-90-13.

17. Semikhatov A.M. Higher Spin and $W_\infty(J)$ Algebras in Virasoro-Constrained KP and N-KdV Hierarchies, ICTP publ. (March 1991).

18. Bergshoeff E., Vasiliev M. B. de Wit, The Super-$W_\infty(\lambda)$ Algebra, CERN-TH.5913/90.

19. Васильев М.А. Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, 344; Int. J. Mod. Phys., 1991, A6, 1115; Bordemann M., Hoppe J., Schaller P. Phys. Lett., 1989 B232, 199.

20. Semikhatov A.M. Nucl. Phys., 1989, B315, 222.

21. Orlov A.Yu. Hamiltonian Formalism and Gelfand-Dikii Identities for $(2+1)-D$ Integrable Systems, Moscow preprint (1988); Grinevich P.G., Orlov A.Yu. Flag Spaces in KP Theory and Virasoro Action on DET∂_j and Segal-Wilson Tau-Function, Moscow preprint (1990).

22. Bershadsky M., Radul A. Int J. Mod. Phys., 1987, A2, 165,Commun. Math. Phys., 1988, 116, 689.