

Об оптимальных условиях фокусировки гигантских морских волн

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 31 октября 2014 г.

Динамика волнового пакета на двумерной морской поверхности, определяемая нелинейным уравнением Шредингера $2i\psi_t + \psi_{xx} - \psi_{yy} + |\psi|^2\psi = 0$, проанализирована в рамках гауссова вариационного анзаца применительно к проблеме образования аномальных волн (*rogue waves*). Продольный $X(t)$ и поперечный $Y(t)$ размеры пакета описываются системой дифференциальных уравнений: $\dot{X} = 1/X^3 - N/(X^2Y)$ и $\dot{Y} = 1/Y^3 + N/(Y^2X)$. При этом параметр N пропорционален интегралу движения $\int |\psi|^2 dx dy$. Данная система интегрируется в квадратурах при произвольном N , что позволяет понять различия между линейным и нелинейным режимами фокусировки волнового пакета, а также сформулировать оптимальные начальные условия, приводящие к заметно большей амплитуде волны в максимуме по сравнению с линейным случаем.

DOI: 10.7868/S0370274X14230131

Введение. В наше время аномальные волны на поверхности океана и в других физических системах (также известные как гигантские волны, волны-убийцы, *rogue waves*, *freak waves*) стали популярным объектом исследований (см., например, обзоры [1–3] и ссылки в них). Наиболее часто используемая для этого явления математическая модель – (1+1D)-мерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с фокусирующей нелинейностью. Такое уравнение, в частности, описывает комплексную амплитуду квазимонохроматической слабонелинейной волны над плоскими потенциальными течениями идеальной жидкости [4]. За счет нелинейной самофокусировки развивается модуляционная неустойчивость [4, 5]. В результате и образуются одномерные аномальные волны. Данный сценарий подтверждается численными и лабораторными экспериментами [6–9]. Полная интегрируемость делает 1+1D НУШ привлекательным для аналитического исследования и позволяет получать точные решения. Если же мы рассматриваем возмущения двумерной свободной поверхности жидкости, зависящие от обеих горизонтальных координат, то ситуация становится намного сложнее. Во-первых, соответствующее (1+2D)-мерное нелинейное уравнение Шредингера не является интегрируемым. Во-вторых, пространственный дифференциальный оператор в нем оказывается гиперболическим:

$$i\frac{A_t}{\omega_0} = \frac{A_{xx}}{8k_0^2} - \frac{A_{yy}}{4k_0^2} + \frac{k_0^2}{2}|A|^2A, \quad (1)$$

где k_0 – волновое число, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{gk_0}$ – частота несущей волны (здесь используется система отсчета, движущаяся с групповой скоростью $v_{gr} = (1/2)\sqrt{g/k_0}$ вдоль оси x). Удобно перейти к безразмерным переменным $k_0A^* \rightarrow \psi$, $\omega_0 t \rightarrow t$, $2k_0x \rightarrow x$, $\sqrt{2}k_0y \rightarrow y$. Это дает нам уравнение

$$2i\psi_t + \psi_{xx} - \psi_{yy} + |\psi|^2\psi = 0. \quad (2)$$

Таким образом, в поперечном направлении нелинейность действует дефокусирующим образом, а в продольном стремится сфокусировать волновой пакет. К этому добавляется линейная дисперсия. В результате действия трех факторов поведение нелинейной группы волн на двумерной свободной поверхности жидкости оказывается более разнообразным по сравнению с одномерным. Чтобы придать этим качественным соображениям конкретный смысл, представляется разумным рассмотреть динамику идеализированного уединенного волнового пакета, имеющего характерный продольный размер $X(t)$ и поперечный размер $Y(t)$. Подобное рассмотрение и является целью данной работы.

Вариационный анализ. Наиболее удобно вывести упрощенные уравнения движения для X и Y , действуя в рамках так называемого гауссова вариационного приближения, широко используемого в нелинейной оптике (см., например, [10–14]):

$$\psi = \sqrt{\frac{4N}{XY}} \exp \left[-\frac{x^2}{2X^2} - \frac{y^2}{2Y^2} + i\frac{Ux^2}{2X} - i\frac{Vy^2}{2Y} + i\gamma \right]. \quad (3)$$

Помимо X и Y , такой пакет характеризуется еще четырьмя действительными величинами: $U, V, N > 0$

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

и γ . Параметр N от времени не зависит, поскольку $4\pi N = \int |\psi|^2 dx dy$ является точным интегралом движения НУШ, а сопряженная по отношению к нему переменная γ является циклической. Параметры U и V описывают модуляцию фазы. При этом положительному значению U или V соответствует дефокусирующая конфигурация по соответствующему направлению, а отрицательному – фокусирующая.

Зависимость неизвестных величин X , Y , U и V от времени следует из подстановки вариационного анзаца (3) в лагранжиан нелинейного уравнения Шредингера:

$$\mathcal{L} = \int (i\psi_t \psi^* - i\psi \psi_t^* - |\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 + |\psi|^4/2) dx dy. \quad (4)$$

После вычисления интегралов и составления уравнений движения оказывается, что $U = \dot{X}$, $V = \dot{Y}$. В результате мы приходим к следующей системе дифференциальных уравнений ньютоновского типа:

$$\ddot{X} = \frac{1}{X^3} - \frac{N}{X^2 Y}, \quad \ddot{Y} = \frac{1}{Y^3} + \frac{N}{Y^2 X}. \quad (5)$$

Отметим, что уравнения (5) представляют собой лагранжеву систему с лагранжианом

$$2L = \dot{X}^2 - \dot{Y}^2 - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{2N}{XY}, \quad (6)$$

в котором кинетическая энергия не является положительно определенной (вторая “частица” имеет отрицательную массу). “Сила” в правой части любого из двух уравнений (5) состоит из отталкивающего слагаемого, обусловленного дисперсией, и “нелинейной” добавки. При этом для продольного направления добавка оказывается притягивающей, а для поперечного отталкивающей. В целом при больших отрицательных t мы имеем две “свободные частицы” на полупрямой, движущиеся в отрицательном направлении, что соответствует начальной стадии фокусировки волнового пакета. При больших положительных временах эти две частицы, отразившись и провзаимодействовав между собой, свободно улетают от начала координат в положительном направлении, что описывает конечную стадию дефокусировки (см. численный пример на рис. 1–3). Начальные и конечные скорости, вообще говоря, не совпадают.

Гауссов вариационный анализ активно используется в нелинейной оптике при исследованиях решений НУШ в двух и трех пространственных измерениях (см. статьи [10–14] и ссылки в них). Однако, насколько известно автору, он пока еще не применялся к проблеме морских аномальных волн. Также

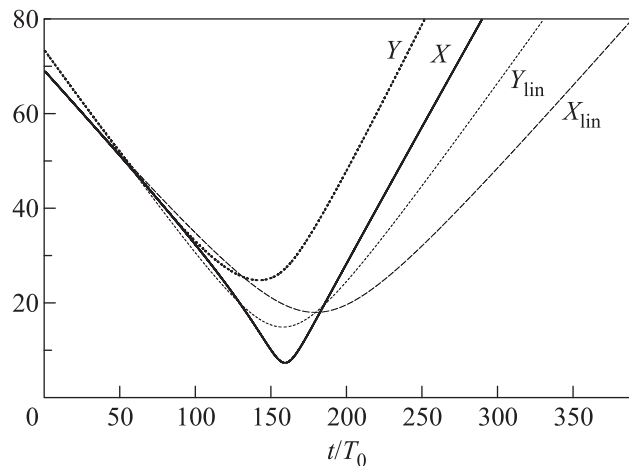


Рис. 1. Пример временных зависимостей $X(t)$ и $Y(t)$ при $N = 2.0$. Для сравнения показаны также решения для линейного пакета с теми же начальными условиями

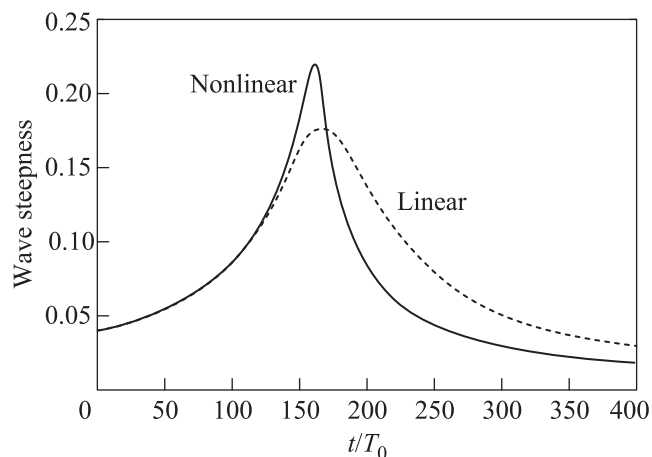


Рис. 2. Нормированные на k_0 амплитуды нелинейного и линейного волновых пакетов в зависимости от времени. В данном примере нелинейность увеличила максимальную высоту волны и заметно сократила ее “время жизни”

отметим, что гауссова форма является одним из точных решений соответствующего *линейного* уравнения Шредингера. Поэтому при малых N приближение (3) заведомо справедливо. С практической точки зрения интересны значения N порядка единицы. В этом случае мы имеем право надеяться лишь на качественное согласие результатов вариационной модели (3) с решениями НУШ (и тем более, с полностью нелинейной динамикой волн на воде). Несомненная польза данного приближения заключается в том, что оно, будучи минимальным по числу вовлеченных параметров, тем не менее дает полуколичественное описание процесса пространственно-временной фо-

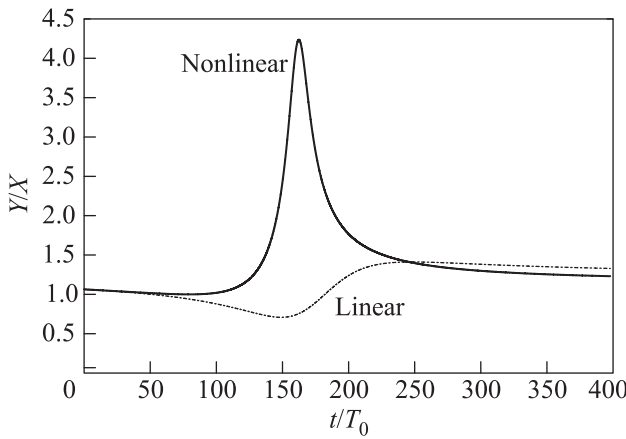


Рис. 3. Отношение поперечного размера пакета к продольному. Нелинейность сильно удлинит гребень аномальной волны

кусировки, являющейся одним из наиболее вероятных механизмов образования волн-убийц в реальных условиях [15, 16].

Другое немаловажное достоинство уравнений (5) — их точная интегрируемость (система допускает разделение переменных). Это характерно именно для НУШ в двумерном пространстве. В трехмерном пространстве в упрощенном лагранжиане вместо $2N/(XY)$ стояло бы $2\tilde{N}/(XYZ)$, что нарушило бы однородность уравнений. Как известно, для интегрирования системы указанного выше типа следует перейти к гиперболическим координатам:

$$X = Q \operatorname{sh} \xi, \quad Y = Q \operatorname{ch} \xi. \quad (7)$$

Эти координаты описывают сектор $X < Y$. Данный сектор наиболее интересен применительно к проблеме морских волн-убийц, длина гребня которых обычно в несколько раз превышает длину волны. Лагранжиан (6) принимает вид

$$2L = Q^2 \dot{\xi}^2 - \dot{Q}^2 - \frac{F(\xi)}{Q^2}, \quad (8)$$

где функция $F(\xi)$ определена формулой

$$F(\xi) = \frac{4}{\operatorname{sh}^2(2\xi)} - \frac{4N}{\operatorname{sh}(2\xi)}. \quad (9)$$

Соответствующие уравнения движения есть

$$\ddot{Q} + Q\dot{\xi}^2 + \frac{F(\xi)}{Q^3} = 0, \quad (10)$$

$$2Q\dot{Q}\dot{\xi} + Q^2\ddot{\xi} + \frac{F'(\xi)}{2Q^2} = 0. \quad (11)$$

Умножив уравнение (11) на $2Q^2\dot{\xi}$, получим в его левой части полную производную по времени. Отсюда следует интеграл движения:

$$Q^4\dot{\xi}^2 + F(\xi) = C = \text{const}. \quad (12)$$

Поскольку минимальное значение функции $F(\xi)$ равно $-N^2$, константа C может принимать любое значение из интервала $[-N^2, +\infty)$. При этом “точки поворота” определяются уравнением $F(\xi_*) = C$, которое имеет один корень при $C \geq 0$ и два корня при $C < 0$.

Уравнение (10) упрощается до $\ddot{Q} = -C/Q^3$. Его общее решение записывается в явном виде как

$$Q(t) = \sqrt{I(t - t_0)^2 - C/I}, \quad (13)$$

где t_0 и I — еще две константы интегрирования. Нетрудно проверить, что $I = -2E$, где E — интеграл энергии системы: $E = [Q^2\dot{\xi}^2 - \dot{Q}^2 + F(\xi)/Q^2]/2$. С учетом (13) из (12) следует равенство

$$\int_0^t \frac{dt}{I(t - t_0)^2 - C/I} = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{C - F(\xi)}}, \quad (14)$$

где ξ_0 — четвертая (последняя) константа интегрирования. Формулы (13) и (14) дают решение задачи. При $I > 0, C < 0$ зависимость (14) может быть представлена в виде

$$\operatorname{sh} 2\xi(t) = P\left(a_0 + \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{arctg} \left[\frac{I(t - t_0)}{\sqrt{-C}} \right], N, C\right). \quad (15)$$

Здесь четная периодическая по a функция $P(a, N, C)$ (имеющая максимум при $a = 0$) является обратной по отношению к эллиптическому интегралу:

$$P\left[\pm \int_{s_2}^s \frac{z dz}{2\sqrt{(1+z^2)(Cz^2+4Ns-4)}}, N, C\right] \equiv s, \quad (16)$$

где s_2 — больший корень уравнения $Cs^2 + 4Ns - 4 = 0$. Амплитуда волнового пакета, равная $\sqrt{4N/XY}$, дается формулой

$$A(t) = \sqrt{8N} / \sqrt{[I(t - t_0)^2 - C/I] \operatorname{sh} 2\xi(t)}. \quad (17)$$

Результаты. Абсолютная точность при решении вариационной задачи требуется редко. Поэтому удобно по крайней мере часть результатов получать численно, избегая работы со специальными функциями. Проведя численное моделирование исходной системы (5) с различными начальными условиями, легко убедиться в том, что максимальная амплитуда нелинейной волны может как превысить амплитуду линейного пакета (с теми же начальными условиями) по причине продольной самофокусировки, так и

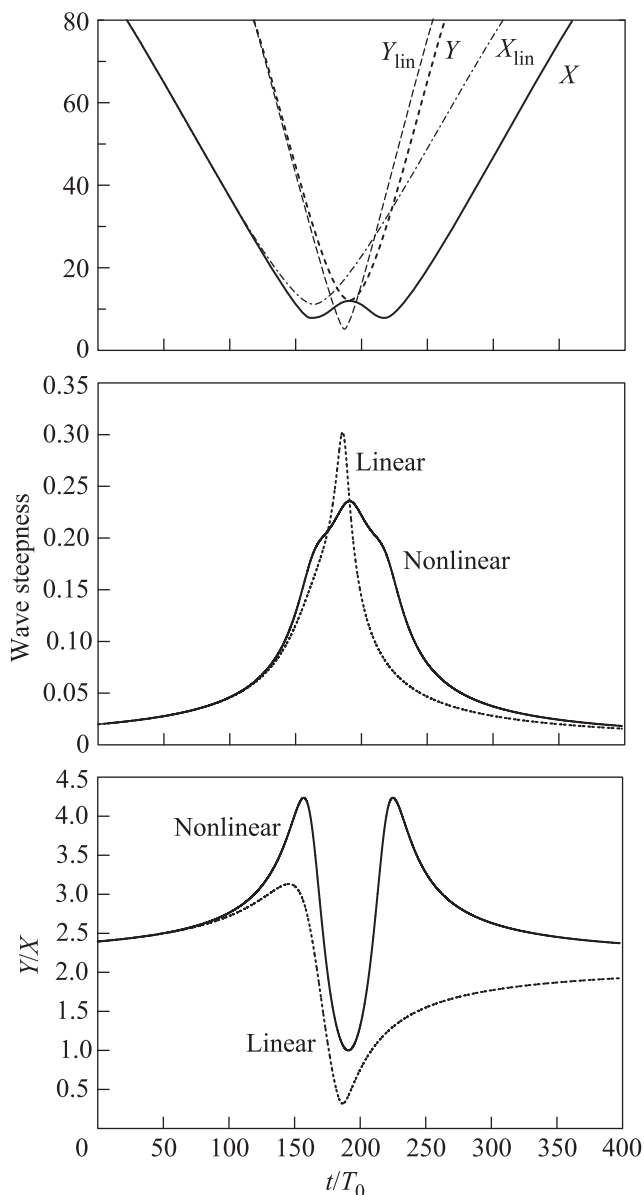


Рис. 4. Другой численный пример (параметр $N = 2.0$). Здесь за счет подбора начальных условий динамика нелинейного пакета обладает симметрией по отношению к обращению хода времени. Максимальная высота волны в нелинейном случае заметно меньше, чем в линейном. Вместе с тем anomальная волна существует в течение достаточно большого времени без значительного изменения амплитуды. Заметим, что для формирования такой “долгоживущей” волны потребовалось существенно большее по абсолютной величине начальное значение $\dot{Y}(0)$, чем в первом примере

оказаться меньшей из-за действия поперечной нелинейной дефокусировки. Важное наблюдение состоит в том, что нелинейное увеличение амплитуды сфокусированной волны наиболее существенно при значе-

ниях C вблизи нуля, когда графики функций $X(t)$ и $Y(t)$ почти соприкасаются в некоторой точке t_0 . При этом важно, чтобы касание имело место на начальном этапе фокусировки, пока $\dot{X}(t_0) = \dot{Y}(t_0) < 0$. В результате динамика оказывается резко асимметричной по отношению к обращению хода времени. Соответствующий типичный пример для $N = 2.0$ приведен на рис. 1–3, где момент касания $t_0 \approx 75T_0$. Безразмерные значения всех величин характерны для морских волн.

Качественно иной тип anomальных волн получается, когда зависимости $X(t)$ и $Y(t)$ приблизительно симметричны по отношению к обращению хода времени. Мы получаем такие решения, подбирая начальные условия так, чтобы при $t = t_0$ было $\dot{X} = \dot{Y} = 0$, $X_0 = Y_0$ (см. пример на рис. 4). Для создания волн этого типа требуется значительно большая начальная модуляция фазы по поперечному направлению, чем для асимметричных волн первого типа. Поэтому вероятность наблюдения волн второго типа в природе должна быть многократно меньшей, чем волн первого типа. Нелинейность при этом уменьшает амплитуду волны, но приводит к увеличению времени ее существования. На рис. 5 показано, как

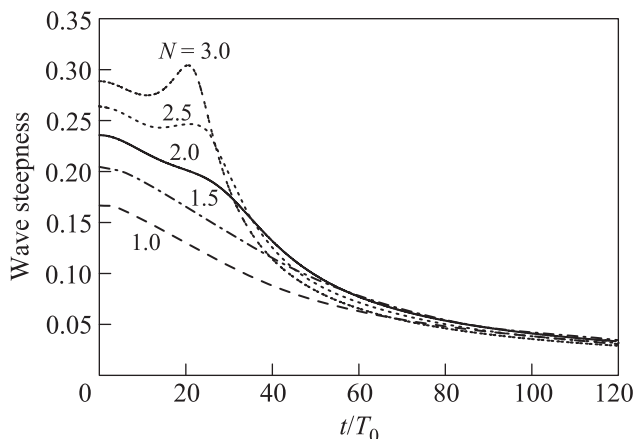


Рис. 5. Амплитуды симметричных по времени нелинейных волн для различных значений параметра N . Точка симметрии соответствует значениям $X_0 = Y_0 = 12$, $\dot{X} = \dot{Y} = 0$

меняется временная зависимость амплитуды волнового пакета второго типа при изменении параметра N . Видно, что с ростом N амплитуда растет, а характерное время существования большой волны остается практически неизменным (около 50 волновых периодов при $X_0 = Y_0 = 12$). Кроме того, у амплитуды появляется симметричная по времени пара дополнительных максимумов. Если же при $t = 0$ по-прежнему $\dot{X} = \dot{Y} = 0$, но $Y_0 = NX_0$, то получаются

временные зависимости амплитуды, показанные на рис. 6. Здесь с ростом N максимальная амплитуда

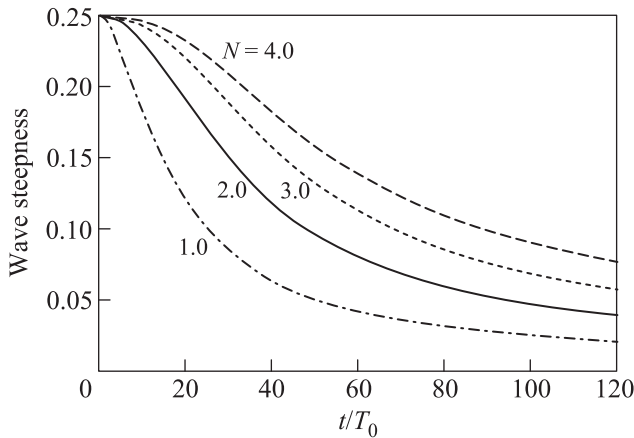


Рис. 6. Амплитуды волн при $X_0 = 8$, $Y_0 = NX_0$, $\dot{X} = \dot{Y} = 0$

остается неизменной, но сильно увеличивается время жизни аномальной волны. Следует, однако, отметить, что применимость вышеприведенных результатов к реальным волнам при больших N обоснована слабо по причине, во-первых, некорректности гауссова вариационного анзаца, а во-вторых, неприменимости самого НУШ в сильно нелинейном режиме.

Заключение. Таким образом, вариационный анализ динамики двумерного волнового пакета с продольным размером X_{phys} и поперечным размером Y_{phys} приводит нас к следующим выводам. Аномальные морские волны бывают различных типов в зависимости от начальных условий фокусировки. Наиболее “эффективными” с точки зрения нелинейного увеличения амплитуды являются волны, у которых на начальном этапе фокусировки графики безразмерных параметров $X(t) = 2k_0 X_{\text{phys}}$

и $Y(t) = \sqrt{2}k_0 Y_{\text{phys}}$ соприкасаются в некоторой точке t_0 . Длина гребня такой волны в максимуме оказывается сильно увеличенной по сравнению с чисто линейным случаем, что наблюдалось ранее в численных экспериментах [16].

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi, *Phys. Rep.* **528**, 47 (2013).
4. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
5. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
6. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
7. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **81**, 255 (2005).
8. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
9. A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
10. M. Desaix, D. Anderson, and M. Lisak, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 2082 (1991).
11. L. Bergé, *Phys. Lett. A* **189**, 290 (1994).
12. L. Bergé and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **53**, 4476 (1996).
13. L. Bergé, J. J. Rasmussen, E. A. Kuznetsov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn, *J. Opt. Soc. Am. B* **13**, 1879 (1996).
14. L. Berge, *Phys. Rep.* **303**, 259 (1998).
15. C. Fochesato, S. Grilli, and F. Dias, *Wave Motion* **44**, 395 (2007).
16. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 788 (2013).