Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 2, стр. 71 — 74 25 июля 1991 г.

АВТОДУАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА - МИЛЛСА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППЫ

А.Д.Попов

Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР
117966, Москва

Поступила в редакцию 15 мая 1991 г.

Для калибровочных полей произвольной полупростой группы Ли G уравнения автодуальности редуцированы к системе уравнений, распадаюйщейся на уравнения $\Box\varphi = 0$ для скалярного поля φ и уравнения Нама (обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения).

1. В данной работе мы введем обобщение известного анзаца Корригана - Фэрли - 'т Хофта - Вилчека (КФТВ) [1] и опишем соответствующие этому анзацу новые классы решений.

В евклидовом пространстве $R^{4,0}$ рассмотрим калибровочное поле A_μ произвольной полупростой группы Ли G с напряженностью $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\ A_\nu]$, $\mu, \nu, ... = 1, ..., 4$. Для автодуальных калибровочных полей по определению $F_{\mu\nu}$ переходят в себя при действии оператора $*$ дуального сопряжения:

$$*F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = f_{\mu\nu}, \tag{1}$$

и A_μ автоматически удовлетворяют уравнениям Янга - Миллса (ЯМ) в силу тождеств Бьянки.

Более удобной для использования является следующая форма записи уравнений автодуальности [2]

$$\bar\eta^a_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\bar\eta^a_{\mu\nu}$ - компоненты антиавтодуального $(*\bar\eta^a_{\mu\nu} = -\bar\eta^a_{\mu\nu})$ тензора 'т Хофта, определенные формулами: $\bar\eta^a_{bc} = \epsilon^a_{bc}$, $\bar\eta^a_{\mu\nu} = -\delta^a_\mu$, $\bar\eta^a_{\mu\nu} = -\bar\eta^a_{\nu\mu}$, ϵ^a_{bc} - структурные константы группы Ли SU(2), $a,\ b, ... = 1, 2, 3$.

2. Рассмотрим для A_μ следующий анзац

$$A_\mu = \bar\eta^a_{\mu\lambda}T_a(\varphi)\partial_\lambda\varphi, \tag{3}$$

где зависящие от φ функции $T_a(\varphi)$ принимают значение в алгебре Ли $\mathcal{G}$ полупростой группы Ли G, а φ - произвольная функция от координат x_μ. Анзац (3) обобщает КФТВ-анзац [1] и переходит в него при выборе простейшей зависимости $T_a(\varphi) = -(1/\varphi)J_a$ с постоянными матрицами J_a, удовлетворяющими коммутационным соотношениям группы Ли $SU(2)$: $[J_a,\ J_b] = \epsilon_{abc}J_c$.

Подставим (3) в определение $F_{\mu\nu}$ и используем следующие тождества для $\bar\eta^a_{\mu\nu}$ [2]:

$$\epsilon^a_{bc}\bar\eta^b_{\mu\lambda}\bar\eta^c_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\nu}\bar\eta^a_{\lambda\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\bar\eta^a_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\nu}\bar\eta^a_{\mu\sigma} + \delta_{\lambda\sigma}\bar\eta^a_{\mu\nu},$$

$$\bar\eta^a_{\mu\nu}\bar\eta^b_{\mu\lambda} = \delta^{ab}\delta_{\nu\lambda} + \epsilon^{abc}\bar\eta^c_{\nu\lambda}. \tag{4}$$

Получаем

$$F_{\mu\nu} = \bar\eta^a_{\nu\lambda}[T_a\partial_\lambda\partial_\mu\varphi + (\dot T_a + \epsilon_{abc}T_bT_c)\partial_\lambda\varphi\partial_\mu\varphi] -$$

$$\bar\eta^a_{\mu\lambda}[T_a\partial_\lambda\partial_\nu\varphi + \dot T_a + \epsilon_{abc}T_bT_c)\partial_\lambda\varphi\partial_\nu\varphi] +$$

$$\bar\eta^a_{\mu\nu}\epsilon_{abc}T_bT_c\partial_\lambda\varphi\partial_\lambda\varphi, \tag{5}$$

где $\dot T_a \equiv dT_a/d\varphi$.

Предположим, что $\varphi = x_\mu x_\mu$, а матрицы $T_a(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям Нама (см. [3]):

$$\dot T_a = -\epsilon_{abc}T_bT_c. \tag{6}$$

Легко видеть, что в этом случае тензор $F_{\mu\nu}$ становится антиавтодуальным:

$$F_{\mu\nu} = -4\bar\eta^a_{\mu\nu}(T_a - x_\lambda x_\lambda\epsilon_{abc}T_bT_c). \tag{7}$$

Следовательно, каждому решению уравнений Нама (6) с $\varphi = x_\mu x_\mu$ соответствует антиавтодуальное решение (7) уравнений ЯМ для произвольной полупростой группы Ли G. Этот класс решений был найден автором совместно с Ивановой Т.А.

Подставим теперь (5) в уравнение автодуальности (2). Используя тождество Якоби для матриц T_a и тождества (4), получаем, что (2) сводится к уравнениям

$$T_a\Box\varphi + (\dot T_a - \epsilon_{abc}T_bT_c)\partial_\lambda\varphi\partial_\lambda\varphi = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что $F_{\mu\nu}$ будет автодуальным, если одновременно выполняются следующие уравнения

$$\dot T_a = \epsilon_{abc}T_bT_c, \tag{9а}$$

$$\Box\varphi = 0 \tag{9б}$$

Заметим, что знак $\pm$ в уравнениях Нама (6) и (9а) несущественен, так как его легко изменить заменой $T_a \to -T_a$.

3. Всякое решение уравнений (9) дает автодуальное решение вида (3) уравнений ЯМ. Все решения линейного уравнения (9б) известны, и осталось только указать решения уравнений Нама (9а).

Уравнения Нама изучались в работах [3–5]. Их решения используются при построении мультимонопольных решений для группы $SU(2)$ по алгоритму Нама (см. [3–5]). Построение общих решений уравнений (9а) в явном виде довольно затруднительно, и мы укажем только классы частных решений.

Простейшее решение уравнений Нама получается, если положить $T_a = -(1/\varphi)J_a$, $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J_c$, что редуцирует анзац (3) к анзацу КФТВ, а решения - к решениям 'т Хофта. Как частный случай получаем N-инстантонные решения для группы $SU(2)$. Более того, всякое решение $T_a(\varphi)$ уравнений Нама содержит в себе как непрерывный предел (по параметрам) решение $T_a(\varphi) = -(1/\varphi)J_a$.

Другой класс решений можно получить, если заметить, что уравнения Нама допускают редукцию к уравнениям цепочки Тода. Уравнения обобщенной цепочки Тода для произвольной алгебры Ли были введены Богоявленским [6]. Используя результаты этой работы (см. также обзор [7]), легко написать анзац для T_a в терминах базиса Картана - Вейля алгебры Ли $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{G}\otimes\mathbb{C}$. В качестве примера мы выпишем явный вид анзаца для матриц T_a со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G} = su(n)$. Следуя Уорду [9], положим

$$T_1 = i\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & O & \vdots \\ \vdots & & O & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & 0 & -a_n \\ a_1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & O & \vdots \\ \vdots & & O & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = i\begin{pmatrix} b_1 & & & & \\ & b_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & O & & b_{n-1} & \\ & & & & b_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$, а $a_i = a_i(\varphi)$, $b_i = b_i(\varphi)$ - вещественные функции, зависящие от φ. Легко видеть, что для анзаца (10) уравнения $\dot{T}_1 = [T_2, T_3]$ и $\dot{T}_2 = [T_3, T_1]$ совпадают. Введем матрицы $L = T_2 - iT_3$ и $M = iT_1$, принимающие значения в алгебре Ли $sl(n, R)$. Тогда уравнения Нама можно записать в виде уравнения Лакса, описывающего обычную периодическую цепочку Тода:

$$\dot{L} = [L, M]. \tag{11}$$

Если положить в (10) $a_n = 0$, то уравнения (11) станут уравнениями обычной (конечной) непериодической цепочки Тода.

Все решения уравнений цепочки Тода (11) известны (см., например, [7,8]). Выписывать их мы не будем за недостатком места. Таким образом, решения уравнений цепочки Тода и уравнений (9б) дают большой класс автодуальных решений уравнений ЯМ. В алгоритме Нама (см. [3-5]) каждому решению уравнений (9а) для $T_a \in su(n)$, удовлетворяющих некоторым ограничениям, сопоставляется n-монопольное решение уравнений ЯМ с группой $SU(2)$. Было бы интересно узнать, удовлетворяют ли решения уравнений периодической цепочки Тода этим ограничениям? Для анзаца (3) также было бы интересно найти и неавтодуальные решения уравнений ЯМ типа меронов.

---

1. Corrigan E., Fairlie D. Phys. Lett. B, 1977, 67, 69; 't Hooft G. Phys. Rev. D., 1976, 3432; Wilczek F. In: Quark Confinement and field theory, Wiley, New York, 1977.

2. Prasad M.K. Physica D, 1980, 1, 167.

3. Nahm W. Lect. Notes Phys., 1983, 180, 456.

4. Hitchin N.J. Commun Math. Phys., 1983, 89, 145; Donaldson S.K. Commun. Math. Phys., 1984, 96, 387; Hartubise J. Commun. Math. Phys. 1985, 100, 191.

5. Atiyah M., Hitchin N. The geometry and dynamics of magnetic monopoles, Princeton, 1988.

6. Bogouavlensky O.I. Commun. Math. Phys., 1976, 51, 201.

7. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Phys. Rep., 1981, 71, 313,

8. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986; Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

9. Ward R.S. Phys. Lett. B, 1985, 112, 3.