

# ОПРОКИДЫВАНИЕ ВОЛНЫ РИМАНА В ДИСПЕРСИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А.В.Гуревич<sup>1)</sup>, А.Л.Крылов<sup>2)</sup>, Г.А.Эль

Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн АН СССР  
142092, Троицк, Московской обл.

<sup>1)</sup> Физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР  
117924, Москва

<sup>2)</sup> Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта АН СССР  
123810, Москва

Поступила в редакцию 18 июня 1991 г.

Развит общий метод аналитического решения модуляционных уравнений Уизема, описывающих структуру бездиссипативной ударной волны (БУВ) после опрокидывания произвольного монотонного профиля в гидродинамике Кортевега - де Вриза (КдВ).

1. Простая волна Римана описывается уравнением  $\partial_t r + V(r)\partial_x r = 0$ , имеющим решение

$$x - V(r)t = W(r), \quad (1)$$

где  $W(r)$  - функция, обратная к начальному профилю  $r = r_0(x)$ . После опрокидывания простой волны в гидродинамике КдВ решение описывается тремя функциями  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  (рис. 1), которые удовлетворяют модуляционной системе Уизема

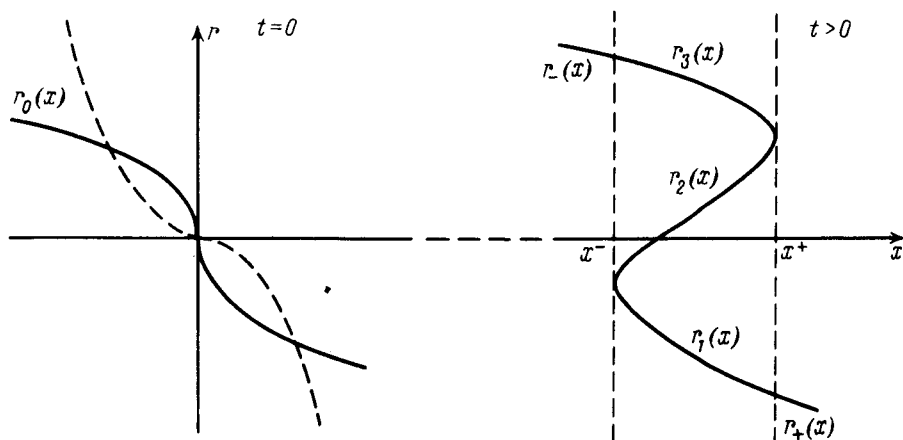


Рис. 1. Опрокидывание простой волны  $r(x, t)$  и образование БУВ. Поведение инвариантов Римана в зависимости от  $x$  (штриховая линия - функция, обратная к начальному профилю  $r = r_0(x)$ )

$$\partial_t r_i + V_i(r)\partial_x r_i = 0. \quad (2)$$

Здесь  $V_i(r)$  - характеристические скорости, задаваемые явными формулами,  $r = (r_1, r_2, r_3)^{1-3}$ .

Векторное обобщение волны Римана (1) для системы (2) имеет вид

$$x - V_i(r)t = W_i(r), \quad (3)$$

где функции  $W_i(r)$ , однако, не могут быть произвольными, а должны удовлетворять условиям совместности, получаемыми подстановкой (3) в (2):

$$\frac{\partial_i W_j}{W_i - W_j} = \frac{\partial_i V_j}{V_i - V_j} \quad i \neq j, \quad \partial_i \equiv \partial_{r_i} \quad (4)$$

(конструкция (3), (4) известна как обобщенный метод годографа <sup>3,4</sup>). Отметим, что к уравнениям (4) приводит также рассмотрение системы

$$\partial_r r_i + W_i(r) \partial_x r_i = 0, \quad (5)$$

задающей поток  $r_i(r)$ , коммутирующий с решением (2) - потоком  $r_i(t)$ , т.е. общее решение уравнений совместности (4) в  $r$ -пространстве описывает все  $r$ -потоки, коммутирующие с  $r(t)$  из (2) <sup>3</sup>.

2. Как следствие уравнений (2) выполняется закон сохранения числа волн  $1$ :

$$\partial_t k + \partial_x (kU) = 0, \quad (6)$$

где  $k$  - волновое число,  $U$  - фазовая скорость, причем для КдВ

$$U = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 r_j, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 6^{1/2} \int_{r_1}^{r_2} d\mu [\prod_{j=1}^3 (\mu - r_j)]^{-1/2} = \frac{6^{1/2} K(m)}{(r_3 - r_1)^{1/2}}. \quad (7)$$

Здесь  $K(m)$  - полный эллиптический интеграл первого рода,  $m = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1)$ . Переходя в (6) к римановым переменным  $r_j$ , получим "потенциальное" представление для характеристических скоростей

$$V_i(r) = U + k \partial_i U / \partial_i k = U - \lambda \partial_i U / \partial_i \lambda. \quad (8)$$

Рассмотрим коммутирующее с (6) уравнение

$$\partial_r k + \partial_x (kf) = 0, \quad (9)$$

где  $f$  - обобщенная фазовая скорость (некоторые из уравнений (9) имеют естественный смысл законов сохранения числа волн для высших КдВ). Аналогично (8) получаем для  $W_i$  выражение через (скалярную) функцию  $f$ :

$$W_i = f - \lambda \partial_i f / \partial_i \lambda = f + (V_i - U) \partial_i f / \partial_i U. \quad (10)$$

Подставляя (8), (10) в уравнения (4), приходим к скалярной формулировке уравнений совместности:

$$\frac{\partial_{ij}^2 f}{\partial_i f - \partial_j f} = \frac{\partial_{ij}^2 \lambda}{\partial_i \lambda - \partial_j \lambda}, \quad i \neq j. \quad (11)$$

Используя (7), имеем окончательно

$$\frac{\partial_{ij}^2 f}{\partial_i f - \partial_j f} = \frac{1}{2(r_i - r_j)}$$

или

$$E_{ij} f = 0, \quad \text{где } E_{ij} = \partial_{ij}^2 - (\partial_i - \partial_j) / 2(r_i - r_j). \quad (12)$$

Отметим, что система (12) была получена иным методом в <sup>5</sup>. Каждое из уравнений (12) для данной пары  $i, j$  является уравнением Эйлера - Пуассона

по  $r_i, r_j$  при фиксированном  $r_k = r_{k0} (k \neq i, j)$ . Для дальнейшего важную роль играют однородные решения (12) вида  $f = r_0^q \Phi(-q, 1/2; 1/2 - q; r_j/r_i)$ , где  $q$  - произвольное число (не обязательно целое), а  $\Phi(a, b; c; z)$  - решение соответствующего гипергеометрического уравнения <sup>6</sup>.

3. Рассмотрим задачу об опрокидывании простой волны (1) с монотонным начальным профилем в дисперсионной гидродинамике КдВ. Пусть начало опрокидывания имеет место при  $t = 0$  в точке  $x = 0, r = 0$  (см. рис. 1), причем

$$r(x, 0) = \begin{cases} r_0^+(x) < 0 & \text{при } x \geq 0, \\ r_0^-(x) > 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad W(r) = \begin{cases} W_+(r) & \text{при } r \leq 0, \\ W_-(r) & \text{при } r > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Искомое решение, описывающее эволюцию БУВ, заключенной в границах  $x = x^-(t)$  (задний фронт) и  $x = x^+(t)$  (передний фронт), удовлетворяет на кривых  $x^\pm(t)$  условиям сшивки "внешнего" решения (1)  $r(x, t)$  - с решением  $(r_1, r_2, r_3)$  "внутренних" модуляционных уравнений (2) <sup>2</sup>:

$$r_3(x^-, t) = r_-(x^-, t) \text{ при } r_2 = r_1; \quad r_1(x^+, t) = r_+(x^+, t) \text{ при } r_2 = r_3. \quad (14)$$

Замечательно, что при переходе в  $r$ -пространство условия (14) принимают простой вид

$$W_1 = W_+(r_1) \text{ при } r_2 = r_3; \quad W_3 = W_-(r_3) \text{ при } r_2 = r_1. \quad (15)$$

Благодаря этому вместо задачи с условиями на неизвестной границе (14), в  $r$ -пространстве линейная система (4) удовлетворяет простым линейным условиям на заданных границах (см. также <sup>7</sup>). Переход к скалярной функции  $f$  с использованием (10) при  $r_2 = 0$  дает граничные условия

$$f = f_-(r_3) = \frac{1}{2} r_3^{-1/2} \int_0^{r_3} x^{-1/2} W_-(x) dx \text{ при } r_1 = r_2 = 0, \quad (16)$$

$$f = f_+(r_1) = \frac{1}{2} (-r_1)^{-1/2} \int_0^{-r_1} x^{-1/2} W_+(-x) dx \text{ при } r_3 = r_2 = 0,$$

Отметим, что выполнение условий (16) на плоскости  $r_2 = 0$  влечет за собой выполнение (15) (для регулярного решения). Действительно, комбинируя уравнения (4) легко найти, что  $\partial_1 W_1 = (\partial_2 + \partial_3) W_1 / r_2 = r_3$  для любых  $r_1$ , то есть функция  $W_1$  постоянная вдоль переднего фронта (аналогично для  $W_3$  и заднего фронта).

Итак, имеем для  $f(r_1, r_2, r_3)$  систему (12) в области  $r_1 \leq r_2 \leq r_3, r_1 \leq 0, r_3 \geq 0$  между плоскостями  $r_2 = r_1$  и  $r_2 = r_3$  (рис. 2) с граничными условиями (16). Построим решение этой задачи.

Найдем вначале  $f(r_1, 0, r_3)$  из задачи Гурса (12), (16):

$$E_{31} f = 0, \quad f|_{r_1=0} = f_-(r_3), \quad f|_{r_3=0} = f_+(r_1). \quad (17)$$

В силу линейности задачи (17) достаточно решить ее, например, для случая  $f_+(r_1) = 0$ . Из представления  $f_-(r_3)$  в виде интеграла Меллина (см. <sup>7</sup>):

$$f_-(r_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ix}^{c+ix} r_3^q S(q) dq, \quad S(q) = \int_0^\infty r_3^{-q-1} f_-(r_3) dr_3$$

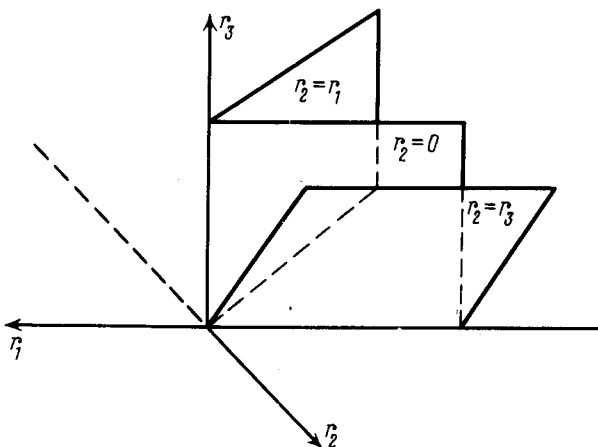


Рис. 2. Область определения решения в  $r$ -пространстве:  $r_2 = r_1$  - задний фронт,  $r_2 = r_3$  - передний фронт,  $r_1 < r_2 < r_3$ ,  $r_3 > 0$ ,  $r_1 < 0$

ясно, что можно ограничиться рассмотрением  $f_{-}^{(q)}(r_3) = r_3^q$ . Решение этой задачи выписывается явно:

$$f^{(q)}(r_1, r_3) = r_3^q \left[ \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1/2)} \right]^{1/2} \frac{1}{q+1/2} u_4(r_1/r_3), \quad (18)$$

где  $u_4(z) = z^{-1/2} F(q+1, 1/2; q+3/2; z^{-1})$  - соответствующее решение Куммера <sup>6</sup> гипергеометрического уравнения с параметрами  $(-q, 1/2; 1/2 - q)$ , а  $F(a, b; c; z)$  - гипергеометрическая функция Гаусса.

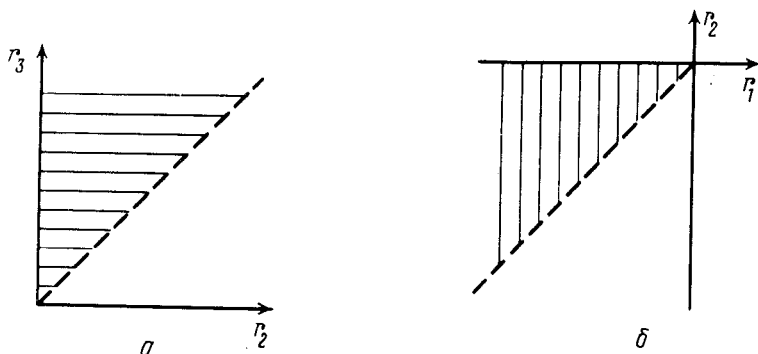


Рис. 3. Области интегрирования в плоскостях  $a - r_1 = \text{const}$ ,  $б - r_3 = \text{const}$

Полученное решение  $f(r_1, 0, r_3)$  далее можно рассматривать как условие (типа Гурса) для соответствующих граничных задач в плоскостях  $r_1 = \text{const}$ ,  $r_2 > 0$  и  $r_3 = \text{const}$ ,  $r_2 > 0$  (рис. 3). Например, в плоскостях  $r_1 = \text{const}$  имеем следующую задачу ( $r_1$  входит как параметр,  $r_2 > 0$ ):  $E_{32} f(r_1, r_2, r_3) = 0$ ,  $f(r_1, 0, r_3) = f^{(q)}(r_1, r_3)$  (см. (18)) и  $f(r_1, r_2, r_3)$  регулярна при  $r_2 = r_3$ . В силу линейности задачи снова удобно представить  $f^{(q)}(r_1, r_3)$  в виде интеграла Меллина (или ряда по степеням  $r_3$ ), причем решение для каждого слагаемого имеет вид аналогичный (18), где вместо  $u_4(z)$  фигурирует  $u_6(z)$  <sup>6</sup>, регулярная на переднем фронте ( $z = 1$ ). Решение в плоскостях  $r_3 = \text{const}$ ,  $r_2 < 0$

находится аналогично. Таким образом, решение строится по обе стороны плоскости  $r_2 = 0$ , на которой задана функция  $f$ . Непосредственно проверяется непрерывность нормальной производной  $\partial_2 f$  при  $r_2 = 0$  (ср. <sup>2</sup>). Кривые  $x^\pm(t)$ , ограничивающие область БУВ, находятся из совместного рассмотрения на границах решения (3) и условий  $dx^\pm/dt = V^\pm$  ( $V^\pm$  - кратные характеристические скорости) <sup>2</sup>.

4. Примеры. Из предыдущего ясно, что не ограничивая общности, достаточно рассмотреть задачу опрокидывания с начальными данными (13), где

$$r_0^-(x) = (-x)^{1/q-}, \quad r_0^+(x) = -x^{1/q+}; \quad W_-(r) = -r^{q-}, \quad W_+(r) = (-r)^{q+}, \quad q_\pm > 1. \quad (19)$$

При  $q_+ = q_- = q$  искомые решения  $r_i(x, t)$  имеют автомодельный характер <sup>2,3</sup>:  $r_i = t^\gamma l_i(x/t^{\gamma+1})$ ,  $\gamma = 1/(q-1)$ .

а) Квазипростая волна  $r = (0, r_2, r_3)$ . Получим в конечном виде семейство решений с  $r_1 = 0$ , рассмотренных в <sup>7</sup>. Такая волна описывается уравнением  $E_{32}f(r_2, r_3) = 0$  с данными  $f(0, r_3) = -r_3^q/(2q+1)$ , соответствующими опрокидыванию монотонного профиля  $r_0^-(x) = (-x)^{1/2}$ ,  $r_0^+(x) = 0$ . Искомым решением, регулярным на биссектрисе  $r_2 = r_3$ , является  $f(r) = -r_3^q \pi^{1/2} \Gamma(1+q) u_6(r_2/r_3)/2\Gamma(q+3/2)$ . При целых  $q = M$  гипергеометрический ряд обрывается и решение принимает симметричный вид

$$f(r) = P_M(r_2, r_3) = -\frac{2^M M!}{(2M-1)!!(2M+1)} \sum_{k_2+k_3=M} \frac{(\frac{1}{2})_{k_2} (\frac{1}{2})_{k_3}}{k_2! k_3!} r_2^{k_2} r_3^{k_3},$$

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a).$$

б) Опрокидывание антисимметричного профиля  $r = (r_1, r_2, r_3)$ . Пусть  $q = M$  (целое). Тогда для нечетных  $M$  имеем

$$f(r) = P_M(r) = -\frac{2^M M!}{(2M-1)!!(2M+1)} \sum_{k_1+k_2+k_3=M} \frac{(\frac{1}{2})_{k_1} (\frac{1}{2})_{k_2} (\frac{1}{2})_{k_3}}{k_1! k_2! k_3!} r_1^{k_1} r_2^{k_2} r_3^{k_3}. \quad (20)$$

Для четных  $M$ :

$$f(r) = \begin{cases} -P_M(r) + I(-r_1, -r_2, r_3) & \text{для } r_2 < 0 \\ P_M(r) - I(r_3, r_2, -r_1) & \text{для } r_2 > 0, \end{cases}$$

где  $I(r)$  задается явным, хотя и довольно громоздким, интегральным представлением, которое здесь приводить не будем. Для целых четных  $q$  решение, таким образом, не полиномиально. Как было отмечено выше,  $\partial_2 f(r_2 = 0)$  непрерывна, тем не менее плоскость  $r_2 = 0$ , очевидно, является особой. Это не удивительно - начальный профиль с четным  $q$  не является аналитической функцией, и он не может быть получен в результате эволюции гладкого профиля волны Римана. Эволюционным свойствам удовлетворяет лишь профиль с нечетным  $q$ , для которого решение (20) полиномиально и не содержит особенностей.

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

2. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. ЖЭТФ, 1973, 65, 590.

3. Дубровин Б.А., Новиков С.П. УМН, 1989, 44, 29.

4. Царев С.П. ДАН СССР, 1985, 282, 534.

5. Кудашев В.Р., Шарапов С.Е. Препринт ИАЭ-5221/6, М., 1990.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции I М.: Наука, 1973.
7. Гуревич А.В., Крылов А.Л., Мазур Н.Г. ЖЭТФ, 1989, 95, 1674.