Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 5, с. 326 – 329 © 2015 г. 10 марта

О спектральном распределении энергии равновесного излучения в веществе

В. Б. Бобров[+*1)], *И. М. Соколов*[×], *С. А. Тригер*[+]

[+]*Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский университет "МЭИ", 111250 Москва, Россия*

[×]*Humboldt-Universität zu Berlin, 10099 Berlin, Germany*

Поступила в редакцию 17 декабря 2014 г.

Получено точное соотношение для спектрального распределения энергии излучения, которое находится в термодинамическом равновесии с системой заряженных нерелятивистских частиц. Отличие от формулы Планка однозначно определяется поперечной диэлектрической проницаемостью среды, учитывающей не только частотную, но и пространственную дисперсию.

DOI: 10.7868/S0370274X15050033

Развитие теории теплового излучения играет важную роль в исследовании многих физических явлений (см., например, [1]). При этом существенное значение имеет установление точных соотношений, связывающих характеристики равновесного излучения с электромагнитными свойствами вещества. В настоящей работе речь идет о вычислении спектрального распределения энергии равновесного излучения, которое при наличии вещества, очевидно, будет отличаться от известной формулы Планка, соответствующей модели абсолютно черного тела (см., например, [2]). Это тем более актуально, что распределение Планка отвечает равновесному идеальному газу фотонов, в то время как наличие хотя бы небольшого количества вещества необходимо для самой возможности получения равновесного излучения, так как в нерелятивистской теории прямое взаимодействие между фотонами отсутствует [2]. Фактически принимается негласное предположение о том, что равновесные свойства идеального газа фотонов представляют собой предельные свойства реальной системы электромагнитного поля и вещества, находящихся в термодинамическом равновесии.

Для решения поставленной задачи рассмотрим систему нерелятивистских заряженных частиц и фотонов, находящихся в объеме V. Гамильтониан такой системы в представлении вторичного квантования имеет вид [3]

$$\hat{H} = \hat{H}_{ph} + \sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a} \int d^3r \left[\nabla + \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\right] \times$$
$$\times \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r}) \left[\nabla - \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\right] \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}) -$$
$$- \sum_a \int d^3r \Psi_a^+(\mathbf{r}) \hat{\mu}_a \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}) \mathrm{rot}\,\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) + \hat{H}_{\mathrm{Coul}}, \qquad (1)$$

где $\hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})$ – полевые операторы рождения и уничтожения для заряженных частиц сорта a, которые характеризуются массой m_a и зарядом $z_a e$, а также оператором собственного магнитного момента $\hat{\mu}_a$, $\hat{H}_{ph}$ – гамильтониан свободного поля излучения:

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda} \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \qquad (2)$$

операторы рождения ($\hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda}$) и уничтожения ($\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$) для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$ удовлетворяют перестановочным соотношениям $[\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{c}^+_{\mathbf{k}',\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ – оператор векторного потенциала, соответствующий квантованному электромагнитному полю:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = c \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}} V}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left\{\mathbf{e}^{(\lambda)}_{\mathbf{k},} \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + e^{(\lambda)*}_{\mathbf{k}} \hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right\}, \quad (3)$$

$\mathbf{e}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}}$ – векторы поляризации фотонов, которые удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}^{(\lambda)}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{2} e^{(\lambda)}_{\mathbf{k}\alpha} e^{(\lambda)*}_{\mathbf{k}\beta} = \delta_{\alpha,\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}, \qquad (4)$$

[1)]e-mail: vic5907@mail.ru

$\hat{H}_{\rm Coul}$ – гамильтониан кулоновского взаимодействия заряженных частиц:

$$\hat{H}_{\rm Coul} = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\int d^3r_1 d^3r_2 u_{ab}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\times$$
$$\times\hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}_b^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_b^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r}_1), \quad (5)$$

$u_{ab}(r) = z_a z_b e^2/r$ – потенциал кулоновского взаимодействия заряженных частиц сортов a и b.

Отметим, что из гамильтониана свободного поля излучения $\hat{H}_{ph}$ исключен член $\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2$, поскольку в пределе $V\to\infty$ он обращается в бесконечность. Однако эта бесконечность не приводит к существенным трудностям в теории, т.к. наблюдаемой величиной является не сама энергия, а разность энергий рассматриваемой системы в различных состояниях. С этой точки зрения величина $\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2$, оставаясь неизменной, не влияет на значения наблюдаемых величин. Кроме того, процедура квантования электромагнитного поля не является однозначной. Можно найти такой метод квантования уравнений электромагнитного поля, при котором сумма $\sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2$ исчезает [4].

В интересующем нас случае равновесия излучения с веществом средняя энергия излучения E_{ph} согласно (2) определяется соотношением

$$E_{ph} = \langle\hat{H}_{ph}\rangle =$$
$$= V\sum_{,\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}}f(\mathbf{k},\lambda), \quad f(\mathbf{k},\lambda)\equiv\langle\hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\rangle, \quad (6)$$

где $f(\mathbf{k},\lambda)$ – равновесная функция распределения фотонов по импульсам $\hbar\mathbf{k}$ при поляризации λ, угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса, которое характеризуется гамильтонианом (1) и температурой T для фотонов и для заряженных частиц. В соотношении (6) учтено, что использование большого канонического распределения Гиббса для описания равновесных состояний возможно только в термодинамическом пределе $V\to\infty$, $\langle N_a\rangle\to\infty$: $n_\alpha = \langle\hat{N}_a\rangle/V = \text{const}$, где $\hat{N}_a = \int d^3r\hat{\Psi}^+_a(\mathbf{r})\hat{\Psi}_a((\mathbf{r})$ – оператор полного числа частиц сорта a, которые характеризуются средней плотностью числа частиц n_α. При этом для равновесной системы заряженных частиц должно выполняться условие квазинейтральности: $\sum_a z_a e n_\alpha = 0$ (подробнее см. [5]).

Так как мы рассматриваем однородную и изотропную систему, равновесное излучение не поляризовано. Поэтому функция распределения $f(\mathbf{k},\lambda)$ не зависит от поляризации λ и является функцией $|\mathbf{k}|$: $f(\mathbf{k},\lambda) = f(k)$, а соотношение (6) принимает вид

$$E_{ph} = 2V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}}f(k). \quad (7)$$

Для равновесного идеального газа фотонов (индекс "(0)") функция $f(k)$ определяется распределением Планка: $f^{(0)}(k) = \{\exp(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/T)-1\}^{-1}$. Поэтому с учетом (2)

$$E^{(0)}_{ph} = V\int_0^\infty\varepsilon^{(0)}_\omega(T)d\omega, \quad (8)$$

где спектральное распределение энергии соответствует формуле Планка (см., например, [2]):

$$\varepsilon^{(0)}_\omega(T) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T)-1}. \quad (9)$$

Соотношение (8) может быть обобщено для равновесного излучения в веществе:

$$E_{ph} = V\int_0^\infty\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})d\omega, \quad (10)$$

так что спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ зависит не только от частоты и температуры, но и от характеристик вещества, а именно набора химических потенциалов заряженных частиц $\{\gamma_a\}$. Такой выбор параметров вещества обусловлен использованием большого канонического распределения Гиббса.

Как следует из (6)–(10), основной величиной для определения спектрального распределения энергии является функция распределения фотонов по импульсам. Для ее вычисления используем запаздывающую функцию Грина фотонов:

$$D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \int d^3r\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\int_0^\infty dt\exp(i\omega t)D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t), \quad (11)$$

где временная корреляционная функция $D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)$ равна

$$D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t) = -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{A}_\alpha(\mathbf{r}_1,t),\hat{A}_\beta(\mathbf{r}_2,0)]\rangle, \quad (12)$$

а $\hat{A}_\alpha(\mathbf{r},t)$ – оператор векторного потенциала (3), соответствующий квантованному электромагнитному полю, в представлении Гейзенберга. С учетом (4) в однородной и изотропной системе имеем

$$D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \left(\delta_{\alpha,\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)D^R(k,\omega),$$
$$D^R(k,\omega) = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha,\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)D^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega). \quad (13)$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Из спектрального представления для запаздывающей функции Грина $D^R(k,\omega)$ нетрудно убедиться в том [6], что

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\mathrm{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\mathrm{Im}\,D^R(k,\omega) = -\frac{2\pi c}{k}\left[f(k)+\frac{1}{2}\right]. \tag{14}$$

Соотношение (14) справедливо и для идеального газа фотонов. Поэтому

$$f(k) - f^{(0)}(k) = -\frac{k}{4\pi^2 c}\times$$
$$\times\int_0^\infty d\omega\mathrm{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\mathrm{Im}\{D^R(k,\omega) - D^{(0)R}(k,\omega)\}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (7) и учитывая (8)–(10), находим точное выражение для спектрального распределения энергии излучения:

$$\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T) + \Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}), \tag{16}$$

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T)\frac{c^3}{4\pi^2\omega^3}\{\exp(\hbar\omega/T)+1\}\times$$
$$\times\int_0^\infty dk\,k^4\mathrm{Im}\{D^R(k,\omega) - D^{(0)R}(k,\omega)\}. \tag{17}$$

Очевидно, что величина $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ связана с наличием вещества.

Для вычисления функции Грина $D^R(k,\omega)$ воспользуемся результатами статистической квантовой электродинамики [7], согласно которым в кулоновской калибровке ($\mathrm{div}\,\hat{A} = 0$), наиболее удобной для описания заряженных частиц в нерелятивистском приближении, имеем

$$D^R(k,\omega) = \frac{4\pi c^2}{\varepsilon^{tr}(k,\omega)\omega^2 - c^2k^2}, \tag{18}$$

где $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ – поперечная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой системы, которая наряду с продольной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^l(k,\omega)$ полностью определяет линейные электромагнитные свойства однородной и изотропной среды и зависит от характеристик вещества [8]. Точное соотношение для поперечной диэлектрической проницаемости системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов представлено в [3].

Если заряженные частицы отсутствуют, то $\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1$. Однако без вещества достижение равновесия для излучения невозможно, а в любой среде $\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega) > 0$ при $\omega > 0$. Поэтому идеальному газу фотонов отвечает предельный переход $\varepsilon^{tr}(k,\omega) \to 1 + i0$ [9]:

$$D^{(0)R}(k,\omega) = \frac{4\pi c^2}{\omega^2 - c^2k^2 + i0}. \tag{19}$$

С этой точки зрения функцию Грина для идеального газа фотонов $D^{(0)R}(k,\omega)$ (19) можно рассматривать как предельное значение функции Грина фотонов в веществе $D^R(k,\omega)$ (18) при $n_\alpha \to 0$.

Подставляя (18), (19) в (15) и учитывая (7)–(10), находим точное выражение для вклада в спектральное распределение энергии излучения, связанного с заряженными частицами:

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T)\{\exp(\hbar\omega/T)+1\}\times$$
$$\times\left[\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dk\,k^4\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{|\varepsilon^{tr}(k,\omega)\omega^2 - c^2k^2|^2} - \frac{1}{2}\right]. \tag{20}$$

Следует подчеркнуть необходимость учета пространственной дисперсии в поперечной диэлектрической проницаемости, которая может привести к новым эффектам (см., например, [10]). Для обеспечения сходимости интеграла в (20) в области больших волновых векторов, которые отвечают малым расстояниям, принципиальную роль играет учет квантовых эффектов при рассмотрении поперечной диэлектрической проницаемости. В равной степени это относится и к описанию области высоких частот, где $\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega) \sim \exp(-\hbar\omega/T)$ [11].

Нужно также обратить внимание на то, что при малых волновых векторах в интеграле в (20) можно выделить вклад от “области прозрачности” по частоте ω, для которой $\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k \to 0,\omega) \ll 1$, а $\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(k \to 0,\omega) \approx n^2(\omega)$, где $n(\omega)$ – коэффициент преломления. Для области прозрачности

$$\frac{\omega^2\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k\to 0,\omega)}{|\varepsilon^{tr}(k\to 0,\omega)\omega^2 - c^2k^2|^2} \to \pi\delta[n^2(\omega)\omega^2 - c^2k^2]. \tag{21}$$

Соответствующий вклад в величину $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ нетрудно вычислить. Однако этот вклад не определяет полностью функцию $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$.

В связи с этим отметим, что полученные в настоящей работе результаты для спектрального распределения энергии равновесного излучения в среде не имеют отношения к известным выражениям для энергии поглощенного в среде излучения, которое не находится в равновесии со средой и определяется внешними источниками [12]. Чтобы установить взаимосвязь полученных результатов с поверхностным излучением тел, необходимо рассмотреть граничную задачу для функции Грина фотонов в неоднородной среде (см., например, [13]).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант # 14-19-01492). Авторы благодарны А.М. Игнатову и А.А. Рухадзе за полезные обсуждения.

---

1. S. A. Trigger, Phys. Lett. A **370**, 365 (2007).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, М. (1976), с. 205.
3. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, М. (1977), с. 347.
4. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика: дополнительные главы*, Наука, М. (1981), с. 503.
5. V. B. Bobrov, I. M. Sokolov, and S. A. Trigger, Phys. Plasmas **19**, 062101 (2012).
6. В. Б. Бобров, ТМФ **88**, 141 (1991).
7. Е. С. Фрадкин, Труды ФИАН **29**, 7 (1965).
8. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН **74**, 223 (1961).
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, ч. 2. Теория конденсированного состояния*, Наука, М. (1978), с. 375.
10. В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн, УФН **176**, 1051 (2006).
11. V. B. Bobrov, V. Ya. Mendeleyev, S. N. Skovorod'ko, and S. A. Trigger, Phys. Rev. E **83**, 026402 (2011).
12. Д. А. Киржниц, УФН **152**, 399 (1987).
13. Е. А. Виноградов, И. А. Дорофеев, УФН **179**, 449 (2009).