Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 7, с. 490 – 495 © 2015 г. 10 апреля

Влияние негидростатичности на финальную стадию неустойчивости в мелкой воде с горизонтально неоднородной плотностью

В. П. Гончаров[1], В. И. Павлов[+ 1]

Институт физики атмосферы им. Обухова РАН, 109017 Москва, Россия

+UFR des Mathématiques Pures et Appliquées – LML CNRS UMR 8107, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Поступила в редакцию 24 ноября 2014 г.
После переработки 24 февраля 2015 г.

Модель активного слоя мелкой воды с горизонтально неоднородной плотностью выведена в приближении негидростатичности. В рамках этой модели исследованы режимы рэлей-тейлоровской неустойчивости и механизм формирования автомодельных струй (fingers). Изучена их линейная устойчивость. Показано, что негидростатичность имеет решающее влияние на неустойчивость на финальной стадии. Именно по этой причине на данной стадии коллапс, предсказанный для гидростатических моделей, замедляется и превращается в режим алгебраической неустойчивости.

DOI: 10.7868/S0370274X15070048

1. Введение. Основная цель работы – показать, что отказ от приближения гидростатического баланса в модели мелкой воды с горизонтально неоднородной плотностью приводит к пересмотру сценария развития неустойчивости Рэлея–Тейлора, которая играет ключевую роль во многих естественных процессах и приложениях [1].

Хорошо известно, что в отношении мелкой воды со свободной границей соответствующая аппроксимационная процедура приводит к поправке Грина–Нагди [2–4]. Для моделей мелкой воды с горизонтально неоднородной плавучестью, являющихся, по существу, следствием двухслойных [5–7], ситуация оказывается более сложной, поскольку возникает конкурирующий эффект за счет влияния верхнего слоя. Дело в том, что тенденция к взрывной неустойчивости, которую проявляет модель в приближении гидростатического баланса, может испытать перестройку, поскольку учет вертикальных движений, обусловленных влиянием негидростатичности, вызывает дополнительную нелинейную и нелокальную дисперсию.

Под влиянием этих факторов происходит смена типа неустойчивости и вместо коллапса, подразумевающего образование особенности за конечное время, в системе реализуется более слабая алгебраическая неустойчивость.

Подчеркнем, что одна из целей работы – отнюдь не вывод еще одной версии модели в "длинноволновом" приближении, а поиск для нее параметризации, которая бы в качественном отношении эффективно работала на больших и малых масштабах. Сходную проблему в свое время решали Ферми и фон Нейман [8]. Однако они использовали для этого не гамильтонов, а лагранжев подход.

Подчас уравнения, описывающие реальную физическую систему, неразрешимы или даже отсутствуют. Например, такое случается в теории поля. Но если есть физические основания предполагать, что лишь некоторые симметрии и соответствующие связи – самые главные, и именно они обеспечивают ключевые особенности поведения реальной системы, то имеется рецепт для построения упрощенной (рафинированной) модели. На практике этот рецепт реализуется с помощью гамильтонового [9] или лагранжевого подхода и, как правило, из-за сокращения симметрий приводит к более простым уравнениям. Работа [8] – классический пример в данном отношении.

Отметим, что мы так же, как и авторы [8], использовали в качестве связи условие несжимаемости. Основное отличие заключается в том, что мы разрешали эту связь в дифференциальной форме с помощью параметризации скорости, а Ферми и фон Нейман – в интегральной форме с помощью параметризации профиля контактной границы. Другое отличие – чисто методическое. Оно состоит в том, что нами использовался аппарат гидродинамических скобок Пуассона, который во времена Ферми–Неймана еще не был развит.

[1]e-mail: v.goncharov@rambler.ru; vadim.pavlov@univ-lille1.fr

2. Негидростатическая модель активного слоя. Рассмотрим двумерную модель, которая описывается уравнениями

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2h}\nabla(h^2\tau) - \frac{1}{3h}\nabla\left(h^2\frac{d^2h}{dt^2}\right), \quad (1)$$

$$\partial_t h + \nabla\cdot(h\mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t\tau + \mathbf{u}\cdot\nabla\tau = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – горизонтальные декартовы координаты; ∇ – оператор горизонтального градиента; ∂_t и d/dt – частная и полная производные по времени; $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ – усредненная по глубине горизонтальная скорость в нижнем (активном) слое; $\tau(\mathbf{x},t) = g\Delta\varrho/\varrho_0$ – относительная плавучесть, которая в отличие от h может иметь любой знак. Уравнения (1), (2) описывают усредненное по глубине течение в нижнем (активном) слое мелкой воды. В гидростатическом приближении, когда последний член в правой части (1) опущен, эти уравнения были сформулированы в [5–7] в рамках двухслойной модели (рис. 1).

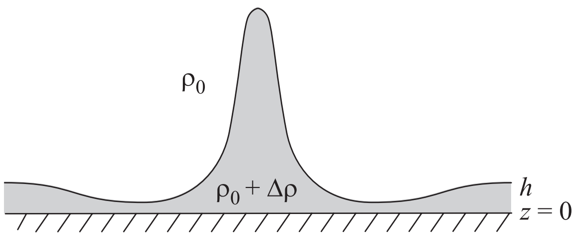

Рис. 1. Модель активного (нижнего) слоя с горизонтально неоднородной плотностью

Данная модель предполагает, что по обе стороны от контактной границы $z = h(\mathbf{x},t)$ под действием силы тяжести g находятся две несжимаемых жидкости. Верхняя жидкость с плотностью $\varrho_0 = \mathrm{const}$ простирается до $z = \infty$, а нижняя с плотностью $\varrho_0 + \Delta\varrho(\mathbf{x},t)$, где $\Delta\varrho/\varrho_0 \ll 1$, опирается на горизонтальное дно $z = 0$.

Отметим, что формально при $\tau = g = \mathrm{const}$ уравнения (1), (2) переходят в известные уравнения Грина–Нагди [2–4], описывающие гравитационные волны на поверхности мелкой воды в приближении негидростатичности. Если же гидростатический баланс нарушен слабо и есть основания пренебречь поправкой Грина–Нагди (последним членом в уравнении (1)), то мы получаем уравнения для модели активного слоя в приближении гидростатичности [5–7]. Тем не менее модель (1), (2) нельзя считать обобщением гидростатической модели в строгом смысле этого слова. Как будет показано ниже, эта модель представляет собой параметризацию, в которой оставлены члены, доминирующие на начальной и конечной стадиях рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Точно так же, как в гидростатическом приближении [6, 7], уравнения движения (1), (2) могут быть получены из первых принципов [9]. Они следуют из гамильтоновой формулировки с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int\left[h\mathbf{u}^2 + \frac{1}{3}h^3(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + h^2\tau\right]d\mathbf{x} \qquad (3)$$

и скобками Пуассона

$$\{m_i, m'_k\} = \partial'_i(m'_k\delta) - \partial_k(m_i\delta), \qquad (4)$$

$$\{h, m'_k\} = -\partial_k(h\delta), \quad \{\tau, m'_k\} = -\delta\partial_k\tau, \qquad (5)$$

где $\mathbf{m}$ – плотность гидродинамического импульса, $\delta = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ – дельта-функция Дирака (штрихованные зависимые переменные означают зависимость от штрихованных пространственных координат). Для экономии места все тривиальные скобки Пуассона здесь опущены.

Чтобы записать уравнения движения, кроме скобок Пуассона (4), (5), нужно учесть, что гидродинамический импульс $\mathbf{m}$ и скорость $\mathbf{u}$ связаны дуальным соотношением:

$$\mathbf{m} = \frac{\delta H}{\delta\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\delta H}{\delta\mathbf{m}}.$$

Тогда для рассматриваемой нами модели

$$\partial_t m_i = \{m_i, H\} = -m_k\partial_i u_k - \\ -\partial_k(m_i u_k) - h\partial_i\frac{\delta H}{\delta h} + \frac{\delta H}{\delta\tau}\partial_i\tau, \qquad (6)$$

$$\partial_t h = \{h, H\} = -\partial_i(hu_i), \qquad (7)$$

$$\partial_t\tau = \{\tau, H\} = -u_i\partial_i\tau. \qquad (8)$$

Использование соотношений

$$\frac{\delta H}{\delta\tau} = \frac{1}{2}h^2, \quad \frac{\delta H}{\delta\mathbf{m}} = \mathbf{u}, \quad \frac{\delta H}{\delta h} = h\tau - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}h^2(\nabla\cdot\mathbf{u})^2$$

позволяет вначале сформулировать уравнения движения (6)–(8) в терминах переменных $\mathbf{m}$, $\mathbf{u}$, h и τ, а затем исключить из них переменную $\mathbf{m}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{m} = \frac{\delta H}{\delta\mathbf{u}} = h\mathbf{u} - \frac{1}{3}\nabla\left(h^3\nabla\cdot\mathbf{u}\right).$$

3. Обоснование гамильтониана модели. Гамильтониан (3) может быть обоснован в рамках двухслойной модели. Для простоты предположим, что движение жидкости в верхнем слое потенциально. Тогда полная энергия представляет собой сумму полных энергий верхнего (H_1) и нижнего (H_2) слоев:

$$H = H_1 + H_2, \tag{9}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\int_h^\infty \varrho_0 \left[(\nabla\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2 + 2gz\right] dzd\mathbf{x}, \tag{10}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\int_0^h (\varrho_0 + \Delta\varrho)\left(\mathbf{u}^2 + w^2 + 2gz\right) dzd\mathbf{x}. \tag{11}$$

Здесь w – вертикальная компонента скорости в нижнем слое, а φ – гидродинамический потенциал в верхнем.

С помощью условий несжимаемости, непрерывности нормальной компоненты скорости на границе раздела и отсутствия возмущений при $z \to \infty$ для потенциала φ можно сформулировать следующую краевую задачу:

$$\left(\Delta + \partial_z^2\right)\varphi = 0, \quad \varphi|_{z=\infty} = 0, \tag{12}$$

$$(\mathbf{u} - \nabla\varphi)_{z=h}\nabla h = (w - \partial_z\varphi)_{z=h}, \tag{13}$$

где Δ – двумерный лапласиан.

В гидростатическом приближении $w = 0$ и $\mathbf{u}$ не зависит от z. Предположим теперь, что условие гидростатичности нарушено ($w \neq 0$), но так, что $\mathbf{u}$ можно по-прежнему считать не зависящей от z. Тогда из условия бездивергентности, $\partial_z w + \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, и краевого условия $w|_{z=0} = 0$ следует соотношение

$$w = -z\nabla\cdot\mathbf{u}. \tag{14}$$

К этому соотношению нужно относиться как к одной из возможных параметризаций. В частности, можно было бы рассмотреть параметризацию, которая предполагает линейную зависимость профиля горизонтальной скорости $\mathbf{u}$ от z:

$$\mathbf{u} = \frac{z}{h}\mathbf{v}, \quad w = -\frac{z^2}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{h}\right).$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – горизонтальная скорость на границе раздела, т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{u}|_{z=h}$. Однако эта параметризация привела бы к более сложной модели. Таким образом, выбор параметризации зависит от физических и модельных предположений и заслуживает отдельного изучения. Мы ограничились параметризацией, которая соответствует минимальной модели и пригодна для качественного исследования влияния негидростатичности.

Прежде всего, используя (14), перепишем краевое условие (13) как

$$(\nabla\varphi\nabla h - \partial_z\varphi)_{z=h} = \nabla\cdot(h\mathbf{u}) = -\partial_t h. \tag{15}$$

Затем, полагая без ограничения общности $\varrho_0 = 1$, после интегрирования по z из (9)–(11) в главном порядке по $\Delta\varrho/\varrho_0 \ll 1$ получим

$$H = \frac{1}{2}\int\left[h\mathbf{u}^2 + h^2\tau + \frac{1}{3}h^3(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + \varphi|_{z=h}\nabla\cdot(h\mathbf{u})\right]d\mathbf{x}. \tag{16}$$

За эффект негидростатичности в гамильтониане (16) отвечают два последних члена. Первый соответствует поправке Грина–Нагди, а второй обусловлен реакцией на возмущение верхнего слоя. В контексте двухслойной модели это означает, что использование усеченного гамильтониана (3) оправдано, только если можно пренебречь данным возмущением.

Чтобы обосновать процедуру “усечения”, выразим потенциал φ через интеграл двойного слоя:

$$\varphi = -\partial_z\int\frac{\Phi(\mathbf{x}', t)d\mathbf{x}'}{\sqrt{z^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}}, \tag{17}$$

где для плотности $\Phi(\mathbf{x}, t)$ с помощью краевого условия (15) формулируется интегральное уравнение:

$$\nabla\cdot\int\frac{\nabla'\Phi(\mathbf{x}', t)d\mathbf{x}'}{\sqrt{h^2(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}} = -\nabla\cdot(h\mathbf{u}) = \partial_t h. \tag{18}$$

Оценим вклады членов, определяющих кинетическую энергию в гамильтониане (16), для двух режимов течения: крупномасштабные движения и автомодельный коллапс.

Прежде всего, обозначая горизонтальные масштабы длины и скорости как L и U, рассмотрим режим крупномасштабных движений $h/L \ll 1$. В этом случае из (17), (18) можно найти $\varphi|_{z=h} \sim hU$, что приводит к оценкам

$$h\mathbf{u}^2 \sim hU^2, \quad h^3(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 \sim h^3U^2\mathrm{L}^2,$$
$$\varphi|_{z=h}\nabla\cdot(h\mathbf{u}) \sim h^2U^2/L.$$

Чтобы получить оценки для второго режима, естественно считать, что каждая из переменных $\varphi|_{z=h}$, Φ, h и $\mathbf{u}$ в этом режиме автомодельна, т. е. они могут быть представлены как

$$\varphi|_{z=h} = \mu\hat{\varphi}, \quad \Phi = \kappa\hat{\Phi}, \quad h = \beta^{-2}\hat{h}, \quad \mathbf{u} = \alpha\hat{\mathbf{u}}, \tag{19}$$

где μ, κ, β, α – некоторые зависящие от времени коэффициенты, а $\hat{\varphi}$, $\hat{\Phi}$, $\hat{h}$, $\hat{\mathbf{u}}$ – функции, зависящие только от автомодельной переменной $\mathbf{r} = \mathbf{x}/\beta$. Тогда прямая подстановка (19) в (18) дает в пределе $\beta \to 0$ соотношения

$$\mu = \alpha\beta, \quad \kappa = \alpha\beta^{-5}, \quad \alpha = \partial_t\beta,$$

из которых следуют асимптотические оценки

$$\varphi|_{z=h}\nabla\cdot(h\mathbf{u}) \sim h\mathbf{u}^2 \sim \alpha^2\beta^{-2}, \quad h^3(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 \sim \alpha^2\beta^{-8}.$$

Таким образом, последний член в гамильтониане (16) не доминирует ни в одном из двух режимов, а изменения, обусловленные плавучестью (вторым членом), компенсируются либо первым, либо третьим членом в зависимости от режима. Этот факт и является обоснованием процедуры "усечения".

4. Автомодельные решения. В плоском случае уравнения (1), (2) выглядят следующим образом:

$$\partial_t u + u\partial_x u + \frac{1}{h}\partial_x\left(h^2\left[\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{3}\frac{d^2h}{dt^2}\right]\right) = 0, \qquad (20)$$

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad \partial_t\tau + u\partial_x\tau = 0. \qquad (21)$$

Точно так же, как и для гидростатической модели [7], решение нелинейных уравнений (20), (21) получается сшивкой тривиального решения $h = 0$, $\tau = 0$, $u = 0$ и автомодельного решения

$$h = \frac{a^2}{\beta}\sqrt{1-\frac{x^2}{\beta^2}}, \quad \tau = b\sqrt{1-\frac{x^2}{\beta^2}}, \quad u = \frac{\alpha}{\beta}x, \qquad (22)$$

где $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ – некоторые функции времени, а a и b – константы, определяемые начальными условиями.

Таким образом, выражения (22) есть нетривиальная часть решения, которая реализуется внутри отрезка $|x| \le \beta$ и описывает плоскую струю в форме полуэллипса. Величина $h_{\max} = a^2/\beta$ характеризует высоту струи, а β – полуширина основания, которым струя опирается на дно $z = 0$.

Подстановка решений (22) в уравнения (20), (21) приводит к уравнениям

$$\beta\left(1+\frac{\beta^4}{a^4}\right)\frac{d\alpha}{dt} = 2\alpha^2 + \frac{3b}{2a^2}\beta^3, \quad \frac{d\beta}{dt} = \alpha. \qquad (23)$$

Эти уравнения сохраняют интеграл

$$E = \frac{\alpha^2}{2\beta^4}\left(1+\frac{\beta^4}{a^4}\right) + \frac{3b}{2a^2\beta} \qquad (24)$$

и являются гамильтоновыми:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\beta^4}{1+(\beta/a)^4}\frac{\partial E}{\partial\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\beta^4}{1+(\beta/a)^4}\frac{\partial E}{\partial\alpha}.$$

В зависимости от b у системы (23) есть два типа решений: устойчивые при $b > 0$ и неустойчивые при $b \le 0$. На рис. 2 приведено численное решение (сплошная кривая *3*) уравнений (23) при некоторых начальных условиях и $b < 0$. Существует три стадии развития решения неустойчивого типа во времени:

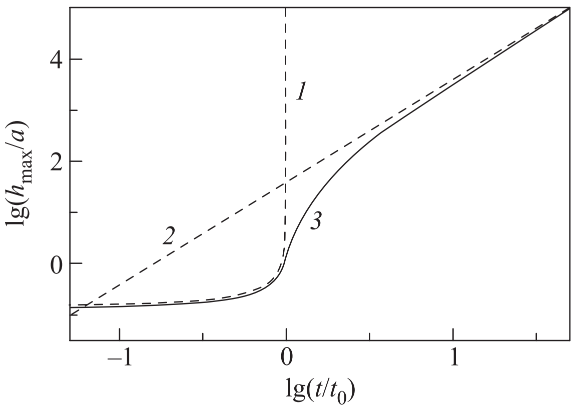

Рис. 2. Переход из режима коллапса в режим алгебраической неустойчивости

начальная, переходная и финальная. На начальной стадии неустойчивое решение развивается в режиме коллапса (штриховая кривая *1*) и приближенно описывается уравнением

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{3}{2}|b|a^2\beta^{-2},$$

которое приводит к решениям

$$\beta = \frac{3}{2}\left(2a^2|b|\right)^{1/3}(t_0-t)^{2/3}, \quad h_{\max} \propto (t_0-t)^{-2/3},$$

где t_0 – время коллапса. На этой стадии (см. рис. 2) практически вплоть до точки $t = t_0$ соблюдается условие $\beta/a \gg 1$ и, следовательно, работает приближение гидростатичности.

Далее следуют области, в которых приближение гидростатичности не работает. Вначале идет переходная область $\beta/a \approx 1$, а за ней – область $\beta/a \ll 1$. В ней-то и развивается финальная стадия $\beta \to 0$, которая при $t \to \infty$ асимптотически описывается уравнением

$$\beta\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - \frac{3|b|}{2a^2}\beta^3.$$

Его решение ложится на штриховую прямую *2* на рис. 2 и описывается выражениями

$$\beta = \frac{4a^2}{3|b|}t^{-2}, \quad h_{\max} = \frac{3}{4}|b|t^2 = \frac{3}{4}g\frac{(\Delta\varrho)_{\max}}{\varrho_0}t^2, \qquad (25)$$

где $(\Delta\varrho)_{\max}$ – амплитудное значение отклонения плотности от фонового значения ϱ_0.

Степенной рост $h_{\max}$ со временем говорит о том, что режим взрывной неустойчивости, предсказанной для гидростатических моделей [5–7], на финальной стадии замедляется и превращается в режим алгебраической неустойчивости. В частности, из закона (25) следует, что передний фронт струи, сформированной из более легкой жидкости, перемещается вверх с постоянным ускорением $\frac{3}{2}g(\Delta\varrho)_{\max}/\varrho_0$. Отметим, что модель Ферми–Неймана [8] дает аналогичный результат, но с коэффициентом 8/7 перед ускорением силы тяжести g.

На эффект "сверхускорения" ($8/7 > 1$) впервые обратил внимание Ферми, объясняя его "грубостью" модели. На наш взгляд, данный эффект не должен вызывать особого беспокойства, поскольку во всех точках течения, кроме центра масс, помимо внешних сил (в нашем случае это сила Архимеда), действует еще и градиент давления. Вместе с тем для центра масс эффект "сверхускорения" – это нонсенс.

Как известно, сила Архимеда действует на вытесненный объем жидкости и приложена к его центру масс. Найти высоту центра масс $z_0(t)$ для струи можно из определения

$$\int \Delta\varrho\,(z-z_0)\,dzdx = 0,$$

где $\Delta\varrho(x,t)$ – отклонение плотности струи от постоянной плотности ϱ_0 окружающей жидкости, а интегрирование ведется по объему, занятому струей.

Используя замену $\Delta\varrho = \varrho_0\tau/g$, после интегрирования найдем

$$z_0 = \frac{0.5\int \tau h^2 dx}{\int \tau h dx}. \tag{26}$$

Отметим, что числитель этого выражения совпадает с потенциальной энергией в гамильтониане H, а знаменатель представляет собой полную плавучесть. Таким образом, высота центра масс z_0 зависит не только от формы струи h, но и от распределения в ней плавучести τ.

Проверим теперь центр масс струи на отсутствие "сверхускорения". После подстановки решений (22), (25) в (26), интегрирования по x и дифференцирования по времени получим

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = 4\pi\left(\frac{3}{8}\right)^3 g\frac{(\Delta\varrho)_{\max}}{\varrho_0} = 0.663g\frac{(\Delta\varrho)_{\max}}{\varrho_0}.$$

5. Устойчивость автомодельных решений. Проблема устойчивости автомодельных решений характеризуется рядом ньюансов [10]. Чтобы исключить часть из них, удобно переписать уравнения (20), (21) в лагранжевых координатах. С этой целью рассмотрим параметризацию $x = \hat{x}(\xi,t)$, где ξ – новая независимая переменная, полагая, что

$$\hat{x}_t(\xi,t) = u(x,t)|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{h}(\xi,t) = h(x,t)|_{x=\hat{x}},$$
$$\hat{\tau}(\xi,t) = \tau(x,t)|_{x=\hat{x}}.$$

В новых переменных уравнения (20)–(21) записываются в виде

$$\hat{h}\hat{x}_{tt}\hat{x}_\xi + \partial_\xi\left(\frac{1}{2}\hat{h}^2\hat{\tau} + \frac{1}{3}\hat{h}^2\hat{h}_{tt}\right) = 0, \tag{27}$$

$$\partial_t(\hat{h}\hat{x}_\xi) = 0, \quad \hat{\tau}_t = 0. \tag{28}$$

Для проверки устойчивости решений рассмотрим начальную стадию их развития, ограничиваясь гидростатическим приближением. Тогда последним членом в (27) можно пренебречь, а (28) проинтегрировать. В результате получим

$$h_0\hat{x}_{tt} + \frac{1}{2}\partial_\xi\left(\hat{h}^2\tau_0\right) = 0, \quad \hat{h}\hat{x}_\xi = h_0, \quad \hat{\tau} = \tau_0, \tag{29}$$

где h_0 и τ_0 – некоторые распределения, которые как функции ξ фиксируются начальными условиями.

Классический сценарий рэлей-тейлоровской неустойчивости реализуется, если рассмотреть невозмущенный слой постоянной глубины $h_0 = \mathrm{const}$ с постоянной плавучестью $\tau_0 = g\Delta\varrho/\varrho_0 = \mathrm{const}$. В этом случае уравнения (29) имеют стационарное решение:

$$\hat{h}_s = h_0, \quad \hat{x}_s = \xi.$$

Легко показать, что при $\tau_0 < 0$ оно неустойчиво. Действительно, рассматривая возмущенное состояние $\hat{h} = h_0 + h'(\xi,t)$, $\hat{x} = \xi + x'(\xi,t)$ и линеаризуя задачу (29) относительно малых возмущений h', x', найдем

$$x'_{tt} + \tau_0 h'_\xi = 0, \quad h' + h_0 x'_\xi = 0.$$

Совместное решение этих уравнений приводит к неустойчивости $(h', x') \sim e^{\gamma t}$ с инкрементом $\gamma = |\tau_0 h_0|^{1/2}k$, где k – волновое число.

Данный вывод, однако, не распространяется на решение (22), которое относится к принципиально иному типу решений. В терминах лагранжевых переменных это нестационарное решение определено на отрезке $|\xi| \le 1$ и имеет вид

$$\hat{h}_{ns} = \frac{a^2}{\beta}\sqrt{1-\xi^2}, \quad \hat{x}_{ns} = \beta\xi,$$
$$\beta = \frac{3}{2}\left(2a^2|b|\right)^{1/3}(t_0 - t)^{2/3}.$$

Легко проверить, что оно соответствует распределению

$$h_0 = a^2\sqrt{1-\xi^2}, \quad \tau_0 = b\sqrt{1-\xi^2}. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу (29) с фиксированным распределением (30), полагая, что

$$\hat{h} = \frac{a^2}{\beta}\left(\sqrt{1-\xi^2} + h'\right), \quad \hat{x} = \beta\xi - x'. \tag{31}$$

Здесь, как и раньше, h', x' – некоторые зависящие от ξ и t возмущения. Подставляя (31) в (29), получим

$$h' = \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\xi^2}\partial_\xi x', \quad \left(\partial_t^2 - \frac{a^2 b}{\beta^3}L_\xi\right)x' = 0,$$
$$L_\xi = (1-\xi^2)\partial_\xi^2 - 3\xi\partial_\xi.$$

Решение этой задачи методом разделения переменных и приводит к разложениям

$$h'(\xi,t) = \sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial_\xi}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(\xi,t),$$
$$x'(\xi,t) = \beta\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(\xi,t), \quad \Phi_n = (t_0-t)^{\frac{1}{3}\lambda_n}U_n(\xi).$$

Здесь $U_n(\xi)$ – полиномы Чебышева второго рода, c_n – коэффициенты разложения, а λ_n – собственные значения задачи.

Как известно, полиномы Чебышева являются собственными функциями линейного оператора L_ξ:

$$L_\xi U_n = -n(n+2)U_n,$$

и составляют полный набор функций, ортогональных с весом $(1-\xi^2)^{-1/2}$ на интервале $(-1,1)$. В результате собственные значения λ_n находятся из соотношения

$$(\lambda_n+2)(\lambda_n-1) = \frac{4}{3}n(n+2), \quad n \geq 0,$$

и возрастают с ростом n почти по линейному закону: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2\ldots$ Согласно [10], неотрицательность собственных значений λ_n и полнота собственных функций доказывают линейную устойчивость автомодельного решения (22).

6. Заключение. В данной работе изучено влияние негидростатичности на финальную стадию рэлей-тейлоровской неустойчивости в слое мелкой воды с горизонтально неоднородной плотностью.

Исследование показало, что негидростатичность не отменяет сценарий коллапса, а лишь ограничивает время его существования. Под влиянием негидростатичности коллапс замедляется и на финальной стадии превращается в режим алгебраической неустойчивости. Фактически на этой стадии из областей активного слоя с отрицательной относительной плавучестью формируются вертикальные узкие струи, передний фронт которых перемещается с постоянным ускорением $3gA$, где $A \ll 1$ – число Атвуда.

Как известно [10], автомодельные решения представляют собой промежуточные асимптотики невырожденных задач и весьма полезны при изучении финальных стадий сильно нелинейных процессов, когда система "забывает" о деталях, связанных с начальными данными, и ее поведение определяется интегралами движения. При этом факт существования автомодельных решений очень важен, поскольку они играют роль структурных элементов, из которых собирается асимптотика решения задачи Коши для неустойчивых сильно нелинейных систем на больших временах. Для таких систем в качественном отношении автомодельные решения играют роль солитонов.

Кроме изучения коллапса (формирования особенностей [11]), автомодельный тип решений также полезен для изучения сильной (структурной) турбулентности. В частности, автомодельные решения для гидростатической версии рассматриваемой здесь модели использовались нами для объяснения скейлинга в спектрах солнечной супергрануляции [12].

Поскольку негидростатическая модель представляет собой параметризацию, в которой оставлены лишь доминирующие члены, она нуждается в дополнительном тестировании. В данном отношении представляет интерес использование этой модели для изучения более тонких явлений, например эффекта обмеления. Указанный эффект должен проявляться как усиление провалов профиля h по обе стороны от струи по мере ее выхода из активного слоя под действием силы плавучести.

Работа выполнена при поддержке в равных долях Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 15-05-00854), программы президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике" и Российского научного фонда (проект # 14-27-00134).

1. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, М. (1999).
2. A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Fluid Mech. **78**, 237 (1976).
3. R. Camassa and D. D. Holm, Physica D **60**, 1 (1992).
4. R. Camassa, J. Hyman, and D. Holm, Adv. Appl. Mech. **31**, 1 (1994).
5. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Письма в ЖЭТФ **96**, 474 (2012).
6. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Phys. Rev. E **88**, 023002 (2013).
7. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, ЖЭТФ **144**, 867 (2013).
8. E. Fermi, *Collected Papers of Enrico Fermi*, University of Chicago Press, Chicago (1965), v. II, p. 821.
9. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Гамильтоновая вихревая и волновая динамика*, Геос, М. (2008).
10. G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
11. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012).
12. V. P. Goncharov and V. I. Pavlov, Письма в ЖЭТФ **99**, 365 (2014).