

## Топологические дефекты в смектических островах в свободно подвешенных пленках

П. В. Долганов<sup>+1)</sup>, Н. С. Шуравин<sup>+\*</sup>, В. К. Долганов<sup>+</sup>, Е. И. Кац<sup>×</sup>

<sup>+</sup> Институт физики твердого тела РАН, 143432 Черноголовка, Россия

<sup>\*</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия

<sup>×</sup> Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 117940 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 февраля 2015 г.

Изучены текстуры, создаваемые точечными топологическими дефектами в полярных смектических пленках. Использован динамический метод создания таких дефектов (вещество из очень тонкой пленки не успевает уйти на ее края, и контролируемо образуются участки – острова – большей толщины с топологическим дефектом). Топологические дефекты исследованы в смектических островах толщиной в 6–8 молекулярных слоев, находящихся в пленке толщиной в два молекулярных слоя. Конкуренция между двумерной ориентационной упругостью в островах и ориентацией директора на границе смектических островов приводит к различным конфигурациям поля  $\mathbf{c}$ -директора, создаваемого топологическим дефектом. Переход между конфигурациями происходит при изменении размера островов и зависит от дипольной поляризации жидкого кристалла. Сопоставление численных расчетов структуры топологических дефектов с экспериментальными данными позволило определить зависимость анизотропии двумерной ориентационной упругости от поляризации смектических пленок.

DOI: 10.7868/S0370274X15070073

Топологические дефекты – один из наиболее необычных объектов в физике конденсированного состояния [1–4]. Так как математические законы, которым подчиняются эти объекты, являются универсальными, имеются глубокие и полезные аналогии всех явлений, связанных с топологическими дефектами, в различных физических системах. Одной из наиболее удобных сред для создания, наблюдения и изучения топологических дефектов служат двумерные смектические пленки [2]. Топологические дефекты в пленках стали во многих случаях модельными системами не только для физики конденсированного состояния, но и в таких, казалось бы, далеких областях науки, как моделирование образования Вселенной и ее эволюции [5–7]. Всестороннему изучению топологических дефектов в смектических пленках способствует их двумерная структура, возможность использования оптических методов для наблюдения и количественного исследования структуры топологических дефектов. Образование топологических дефектов в пленках происходит, как правило, при глобальном изменении структуры (например, при фазовом переходе в менее симметричную фазу со спонтанным нарушением симметрии, аналогом которо-

го является Большой взрыв [5–7]), в ограниченной геометрии из-за несовместимости граничных условий, при локальном разрушении или трансформации структуры. В последних случаях общий топологический заряд системы сохраняется. Взаимодействие топологических дефектов может приводить к их упорядочению с образованием необычных жидкокристаллических структур (Голубых фаз [8], TGB-фаз [9]), к самоорганизации частиц в смектических пленках [10–12].

В данной работе рассмотрены точечные топологические дефекты в полярной сегнетоэлектрической  $\text{SmC}^*$ -фазе, имеющей хиральные (без зеркальной симметрии) молекулы. В качестве материала использовались смеси полярного и неполярного вещества с различной величиной поляризации. Жидкие кристаллы  $\text{SmC}^*$  имеют слоевое упорядочение. Длинные оси молекул в слоях наклонены относительно нормали к смектическому слою. Для достаточно тонких смектических пленок ориентацию молекул в соседних слоях можно считать одинаковой. Измерения проводились в свободно подвешенных пленках, две плоские поверхности которых граничат с воздухом. Ориентационная структура в плоскости пленок характеризуется проекцией длинных осей молекул на плоскость слоя, так называемым  $\mathbf{c}$ -директором [1].

<sup>1)</sup>e-mail: pauldol.issp.ac.ru

В сегнетоэлектрической  $\text{SmC}^*$ -фазе поляризация  $\mathbf{P}$  перпендикулярна плоскости наклона молекул.

Мы исследовали топологические дефекты в смектических островах толщиной порядка 6–8 молекулярных слоев, находящихся в смектических нано пленках толщиной в два молекулярных слоя. Тонкие пленки, являющиеся резервуаром для островов, благодаря малой толщине не оказывают воздействия на процессы, происходящие в островах. Острова можно считать независимыми от окружающей среды. Жесткие граничные условия на границе островов с планарной ориентацией молекул приводят к конкуренции ориентирующего действия границы острова и предпочтительной ориентации, диктуемой дефектом. Изучена ориентационная структура поля директора вокруг топологических дефектов. В зависимости от материальных параметров и геометрии могут реализоваться различные ориентационные структуры. В частности, образуются необычные спиральные структуры с продольной и поперечной деформацией  $\mathbf{c}$ -директора [13]. Ориентационная структура островов определяется минимумом свободной энергии структуры, образованной топологическим дефектом, и необходимостью планарной (параллельной поверхности) ориентации директора на границе островов. Сопоставление ориентационной структуры островов с результатами расчетов позволило нам определить анизотропию коэффициентов двумерной упругости  $K_B/K_S$  пленок с различной поляризацией ( $K_B$  и  $K_S$  – двумерные упругие константы продольной и поперечной деформации  $\mathbf{c}$ -директора). Увеличение анизотропии  $K_B/K_S$  с увеличением поляризации связывается с влиянием поляризационных зарядов на ориентационную упругость.

Исследованные образцы представляют собой нано пленки толщиной в два молекулярных слоя, в которых имеются более толстые участки пленки круглой формы (острова толщиной в 6–8 слоев). Ранее топологические дефекты в смектических островах исследовались в серии работ группой Мейера [13–17] и Кларка [18]. Острова в пленках [16] образовывались при обдувании пленки дымом от сжигаемой бумаги. Субмикронные частицы дыма, попадая на нано пленку, инициировали зарождение и рост в ней более толстых участков (островов). Микро частицы дыма находились в центре топологического дефекта. Чтобы избежать неопределенности в граничных условиях на поверхности частица–смектическая пленка и работать с топологическим дефектом, имеющим естественную структуру ядра, мы использовали другой метод приготовления островов с топологическими дефектами. Вначале однородная по

толщине двухслойная пленка приготавливалась в прямоугольной рамке с двумя подвижными сторонами (металлические “ножи”). После приготовления нано пленки занимаемое ею пространство резко уменьшалось сдвигом подвижных “ножей”. Вещество из двухслойной пленки не успевало уйти на ее края и образовывало в нано пленке участки большей толщины (острова круглой формы). Использование этого метода позволило получать острова различного размера путем изменения скорости сдвига подвижных “ножей”, регулировать число островов в пленке. После образования острова, как правило, увеличивались в размерах. При небольшой скорости изменения размеров островов ( $< 1$  мкм/мин) можно было проводить исследования в островах различного радиуса. В работе изучались острова с радиусом от 3 до 100 мкм. Визуализация ориентационной текстуры пленок проводилась в отраженном свете при скрещенных поляризаторах и с использованием деполяризованной микроскопии [19]. Комбинация этих методов позволяет определить ориентацию  $\mathbf{c}$ -директора в пленках.

В экспериментах использовались смеси неполярного  $\text{SmC}$  жидкого кристалла с полярным сегнетоэлектрическим  $\text{SmC}^*$  Felix-017/100 (AZ Electronic Materials), образующим  $\text{SmC}^*$ -фазу при комнатной температуре (поляризация  $P_0 = 47$  нС/см<sup>2</sup> при 25 °С). Поляризация смесей может быть рассчитана из весового состава компонент:  $P = P_0 X$ , где  $X$  – доля полярного смектика. Число слоев в пленке определялось по интенсивности отраженного от пленки света.

Вначале рассмотрим острова в пленках с малой величиной поляризации. На рис. 1а и б приведены фотографии смектических островов, образовавшихся при описанном выше способе их приготовления в пленке толщиной два молекулярных слоя (концентрация полярного изомера 0.2 и 0.35 соответственно). Из-за малого коэффициента отражения пленка в два молекулярных слоя выглядит на фотографиях как темный фон. Характерный вид островов в скрещенных поляризаторах (рис. 1а) с пересекающимися темными полосами, параллельными поляризатору и анализатору, говорит об аксиальной симметрии  $\mathbf{c}$ -директора с одинаковой его ориентацией вдоль радиуса острова (параллельной или перпендикулярной радиусу). При жесткой ориентации молекул на границе острова топологические ограничения приводят к образованию точечного топологического дефекта с топологическим зарядом  $S = +1$  (рис. 1а и б). Возможна различная ориентация такого дефекта в острове. Наблюдения с использованием деполяризованной микроскопии (рис. 1б) показыва-

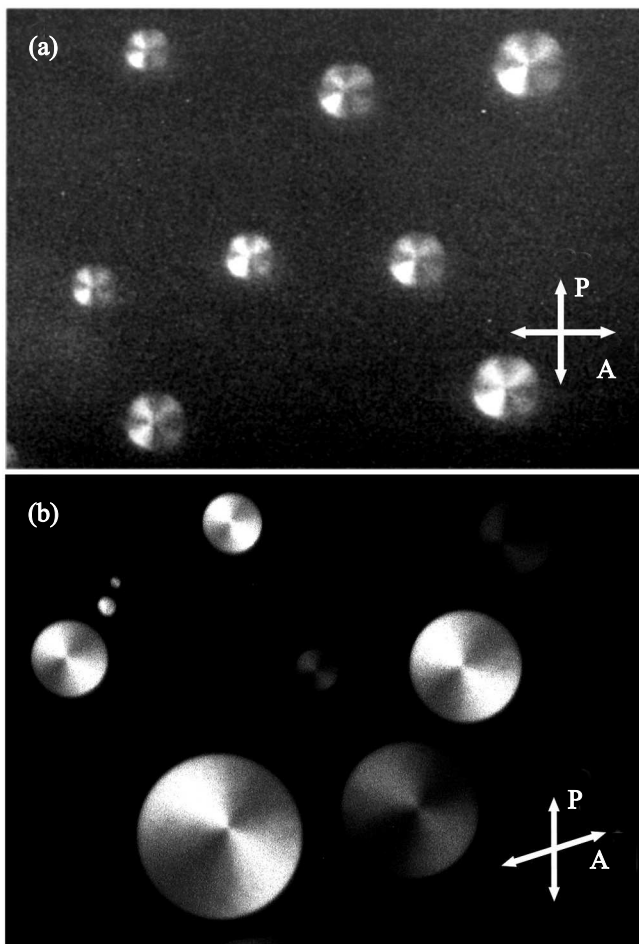


Рис. 1. Острова с топологическими дефектами  $S = +1$  в сегнетоэлектрических  $\text{SmC}^*$ -пленках с малой величиной поляризации. Содержание полярного компонента 0.2 (a) и 0.35 (b). Фотографии сделаны при скрещенных поляризаторах (a) и с использованием деполяризованной микроскопии в отраженном свете (b). Горизонтальный размер фотографий 436 мкм (a) и 475 мкм (b)

ют, что ориентация  $\mathbf{c}$ -директора является круговой (рис. 2a). Концентрическая ориентационная структура  $\mathbf{c}$ -директора наблюдается в островах различного размера в неполярных пленках и в пленках с малой величиной поляризации (в смесях с концентрацией полярного изомера  $< 0.4$ ).

В наклонных смектиках ( $\text{SmC}$ ,  $\text{SmC}^*$ ) на стыке пленок разной толщины  $\mathbf{c}$ -директор ориентируется параллельно границе раздела (планарные граничные условия), что приводит к уменьшению поверхностной энергии [20]. В неполярном смектике и в сегнетоэлектрике с малой величиной поляризации продольная упругость меньше поперечной,  $K_B < K_S$  и свободные топологические дефекты с зарядом  $+1$  имеют круговую ориентацию  $\mathbf{c}$ -директора [21]. Образование

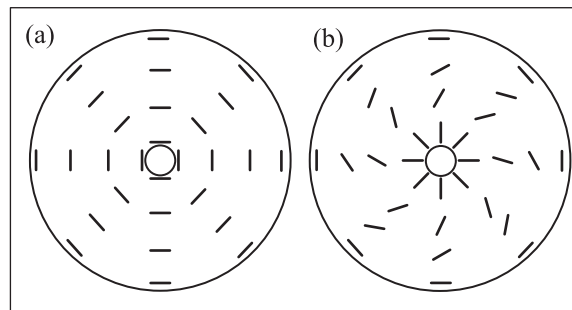


Рис. 2. Схематическое изображение ориентации  $\mathbf{c}$ -директора при деформации продольного изгиба (a) и в спиральной структуре (b)

круговой ориентации в островах связано с тем, что как объемная упругая энергия, так и ориентация на границе острова способствуют деформации продольного изгиба. В островах  $\mathbf{c}$ -директор ориентируется циркулярно вне зависимости от их размера (рис. 1a и b).

Совершенно иная картина наблюдается в полярных пленках  $\text{SmC}^*$  с большой величиной поляризации (рис. 3). В островах малых размеров с топологическим дефектом в центре острова конфигурация  $\mathbf{c}$ -директора круговая, как и в неполярных пленках (рис. 2a). При увеличении размера острова происходит ориентационный переход с образованием закрученной текстуры (рис. 3a и b). Помимо островов с топологическим дефектом в центре, наблюдались острова с дефектом на границе (структура буджума, рис. 3b). В этих островах не происходит ориентационных переходов при изменении размера острова. В дальнейшем будут исследоваться острова с топологическим дефектом в центре. Топологические дефекты внутри острова стабильны по отношению к переходу в структуру буджума. Конфигурация с топологическим дефектом на границе получается при образовании острова. Ориентация  $\mathbf{c}$ -директора в закрученной структуре, в которой присутствуют продольная и поперечная деформации, приведена на рис. 2b. Темные полосы, исходящие из дефекта в центре острова, могут быть закручены в разные стороны, по и против часовой стрелки (рис. 3a и b). Наблюдение с помощью метода, предложенного в [16], пленок под различными углами по отношению к падающему свету показало, что  $\mathbf{c}$ -директор на границе всех островов ориентирован по часовой стрелке. Различное направление закрутки спиральной текстуры связано с тем, что  $\mathbf{c}$ -директор в самом острове может быть направлен как в сторону центра, так и от центра. Поворот  $\mathbf{c}$ -директора в обоих случаях при движении вдоль силовых линий  $\mathbf{c}$ -директора происходит в одну

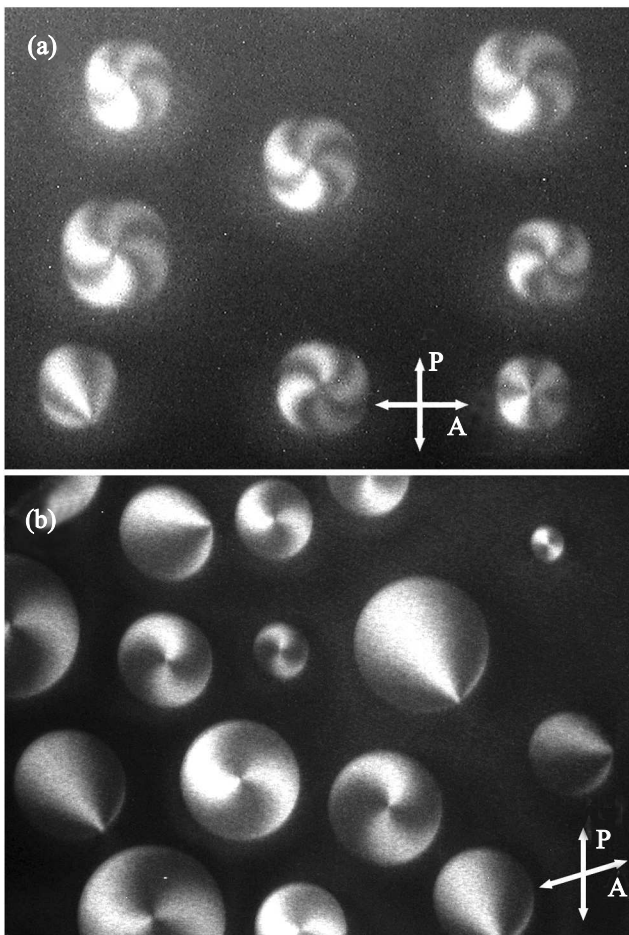


Рис. 3. Острова с топологическими дефектами в полярной пленке  $\text{SmC}^*$  с большой величиной поляризации. Фотографии сделаны при скрещенных поляризаторах (a) и с использованием деполаризованной микроскопии в отраженном свете (b). Содержание полярного компонента 0.65. Горизонтальный размер фотографий 278 мкм (a) и 524 мкм (b)

и ту же сторону. При уменьшении концентрации сегнетоэлектрического вещества, т.е. при уменьшении поляризации, ориентационный переход происходит в островах большего размера (рис. 4). Переход от круговой ориентации директора к спиральной обратим. При уменьшении размера острова наблюдается переход из спиральной структуры в круговую. Полученные результаты согласуются с измерениями, проведенными группой Мейера [17] на смесях двух полярных веществ с различной величиной слоевой поляризации.

Описание переходов в топологических дефектах от чисто круговой к закрученной структуре должно учитывать специфику двумерной упругости полярных жидких кристаллов [17, 22, 23]. Прежде чем

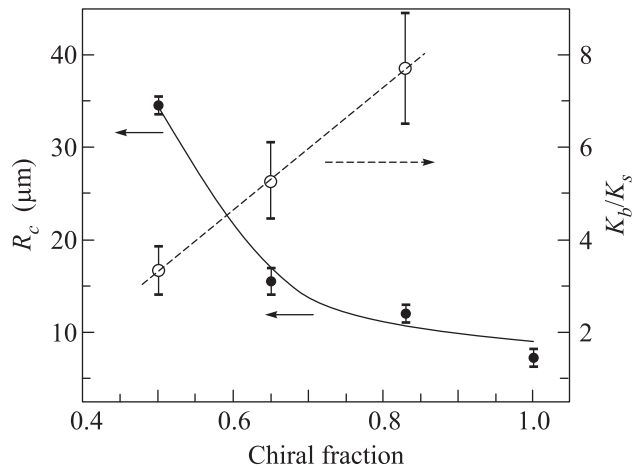


Рис. 4. Размер острова  $R_C$ , при котором в нем происходит трансформация конфигурации  $\mathbf{c}$ -директора от чисто продольной при  $R < R_C$  к смешанной (продольной и поперечной) деформации (закрытые кружки). При увеличении поляризации переход происходит в островах меньших размеров (сплошная кривая), что связано с увеличением энергии продольного изгиба (штриховая кривая). Анизотропия двумерной упругости  $K_B/K_S$  (открытые кружки)

переходить к расчетам, приведем качественное объяснение наблюдаемых эффектов. В полярных смектиках с большой величиной поляризации в отличие от неполярных упругая энергия продольного изгиба больше энергии поперечного ( $K_B > K_S$ ). Свободные топологические дефекты у веществ с большой величиной поляризации имеют радиальную ориентацию  $\mathbf{c}$ -директора [24]. Конкуренция объемной энергии, минимальной при радиальной ориентации, и планарной ориентации на границе острова приводит к циркулярной ориентации  $\mathbf{c}$ -директора при малом размере острова и смешанной (спиралевидной) деформации при его большом размере.

Расчет конфигурации  $\mathbf{c}$ -директора в островах проводился с использованием ориентационной двумерной упругой энергии пленки [25]

$$F = \frac{1}{2}h \int [K_S(\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + K_B(\nabla \times \mathbf{c})^2] d^2x, \quad (1)$$

где  $h$  – толщина острова. Для удобства перейдем к полярным координатам и введем параметр  $\chi$ , описывающий ориентацию  $\mathbf{c}$ -директора относительно радиального направления:  $\mathbf{c} = [\cos \chi(r), \sin \chi(r)]$ . С учетом аксиальной симметрии поля  $\mathbf{c}$ -директора в островах упругую энергию можно записать в виде

$$F = \pi h \int [K_S(\cos \chi - \sin \chi \cdot \chi')^2 + K_B(\sin \chi + \cos \chi \cdot \chi')^2] d\xi, \quad (2)$$

где  $\xi = \ln(r/r_\lambda)$  – безразмерная длина,  $\chi' = d\chi/d\xi$ .

Следует сделать несколько замечаний относительно правомерности использования выражений (1), (2) при наличии топологических дефектов. Описание ориентационной структуры жидкого кристалла на основе энергии Франка (1) предполагает малые изменения ориентации директора в пространстве. Поэтому такой подход становится неправомерным в области центра дефекта (так называемого ядра, core). В ядре не только директор сильно изменяет свою ориентацию, но изменяется и весь параметр порядка. Для описания структуры ядра необходимо использовать полный тензорный параметр порядка и численные методы [26]. Типичный размер ядра  $r_c$  составляет около 10 нм [5]. Теория упругости (1), (2) с успехом применяется для описания структуры полярных смектиков. Однако эти выражения не учитывают электростатические взаимодействия. В полярных жидких кристаллах использование энергии (1) становится неправомерным на некотором масштабе порядка длины экранирования  $\lambda$ , который существенно больше, чем  $r_c$  [17, 27]. Продольная деформация с-директора приводит к поперечной деформации поляризации  $\mathbf{P}$  и к возникновению поляризационных зарядов  $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ . Взаимодействие зарядов дает вклад в энергию деформации. При этом упругая константа  $K_B$  может зависеть от величины деформации. Свободные заряды в пленке экранируют поляризационные заряды с длиной экранирования  $\lambda$ . При деформации с волновым вектором  $q \ll \lambda^{-1}$  электростатическая энергия приводит к перенормировке упругой константы продольного изгиба [17]:

$$K_B = K_B^0 + 4\pi h \lambda P^2, \quad (3)$$

где  $K_B^0$  – упругая константа в отсутствие поляризации. На размерах  $r_\lambda$ , превышающих  $\lambda$ , выражения (1), (2) могут быть использованы в расчетах с перенормированной константой продольного изгиба  $K_B$ . Поляризационный вклад в  $K_B$  может существенно превышать затравочную упругую константу  $K_B^0$  и трансформировать ориентационную структуру полярного смектика. Типичная величина  $\lambda$  (порядка 1 мкм) [17] существенно превышает размер ядра топологического дефекта (порядка 10 нм). Этот же масштаб  $r_\lambda$  является размером, на котором на основании оптических данных можно с уверенностью говорить об ориентации с-директора. Поэтому  $r_\lambda$  можно считать эффективным размером ядра дефекта в полярных жидких кристаллах, внутри которого ( $r < r_\lambda$ ) гармоническая теория упругости (1) становится несправедливой, в частности  $K_B$  зависит от волнового вектора деформации. Наши расчеты проводи-

лись для  $r$ , больших 3 мкм, при которых выражения (1), (2) справедливы при использовании перенормированной константы упругости  $K_B$  и можно определить из эксперимента ориентацию с-директора и сопоставить эксперимент с расчетом.

Экспериментальная зависимость  $\chi(r)$  определялась из положения светлых и темных полос в острове при скрещенных поляризаторах. На рис. 5 приведен

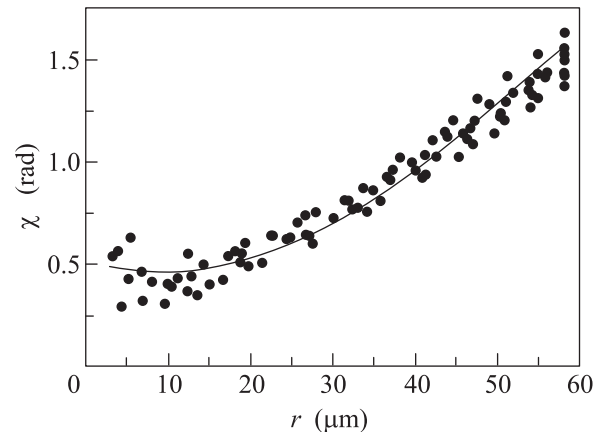


Рис. 5. Экспериментальная зависимость ориентации с-директора в острове от расстояния до центра дефекта (точки). Кривая – рассчитанная зависимость  $\chi(r)$  при  $K_S/K_B = 0.13$ . Радиус острова 58 мкм, содержание полярного компонента в смеси 0.83

пример такой зависимости (точки) для острова радиуса  $R_0 = 58$  мкм с долей полярного вещества 0.83. Вклад в структуру продольной и поперечной деформации изменяется вдоль радиуса острова. Для расчета ориентации директора и определения отношения  $K_B/K_S$  следует минимизировать энергию (2) по отношению к  $\chi(r)$ . Зависимость  $\chi(r)$  аппроксимировалась полиномом третьей степени  $\chi(r) = a + br + cr^2 + dr^3$ . Численная минимизация упругой энергии (2) проводилась при фиксированных значениях  $\chi(R_0) = \pi/2$  на границе острова (планарная ориентация с-директора) и вблизи ядра дефекта  $r_0$ . В области  $r = 3$ –6 мкм среднее значение  $\chi \approx 0.48$ . Полученная в результате минимизации зависимость  $\chi(r)$  приведена на рис. 5 сплошной кривой. На рис. 6 точками приводятся полученные с использованием расчетной зависимости  $\chi(r)$  положения областей с ориентацией с-директора под углами  $\pi k/4$  (скрещенные поляризаторы, рис. 6а) и  $\pi k/2$  (деполяризованная микроскопия, рис. 6б). Согласие с экспериментом оказалось достаточно хорошим, что говорит о возможности использования данного метода расчета. Полученная в результате анизотропия упругих кон-



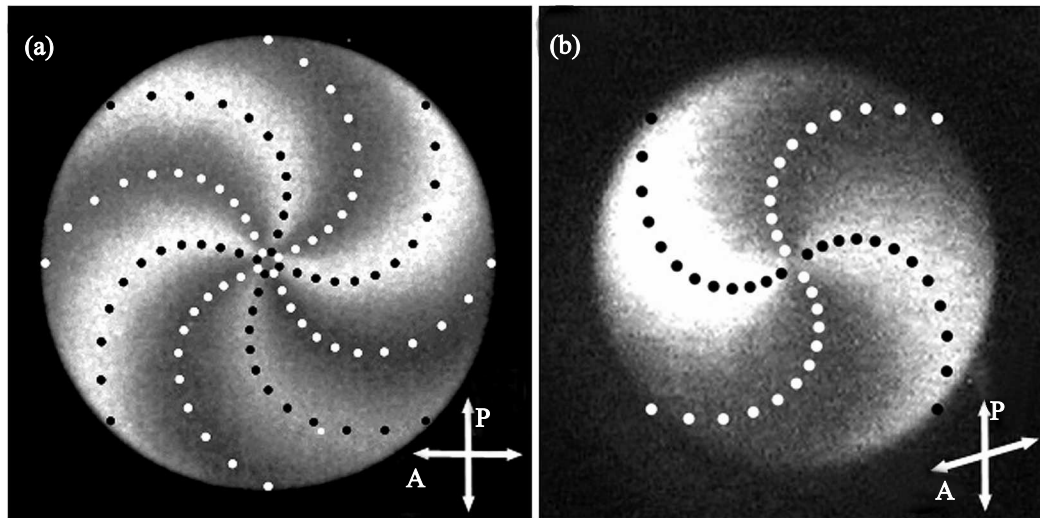


Рис. 6. Фотографии смектических островов со спиральной конфигурацией  $c$ -директора. Точки – рассчитанные положения областей с ориентацией  $c$ -директора под углами  $\pi k/4$  (скрещенные поляризаторы, а) и  $\pi k/2$  (деполяризованная микроскопия, б). Параметры расчета:  $K_S/K_B = 0.13$  (а) и  $0.19$  (б). Содержание полярного компонента в смеси  $0.83$  (а) и  $0.65$  (б). Горизонтальный размер фотографий  $145$  мкм (а) и  $95$  мкм (б)

стант  $K_B/K_S$  при различных концентрациях полярного вещества приведена на рис. 4.

Увеличение эффективной упругой анизотропии  $K_B/K_S$  при увеличении поляризации связано с возникновением поляризационных зарядов при продольной деформации  $c$ -директора и их вкладом в энергию продольного изгиба [17, 23]. Поскольку в неполярных смектиках  $K_B/K_S < 1$ , вклад поляризационных зарядов в упругость (рис. 4) существенно превышает энергию, связанную с собственной продольной упругостью смектика. При  $K_B/K_S > 1$  конкуренция объемной энергии, которая меньше для радиальной ориентации  $c$ -директора, и планарной ориентации на границе вызывает ориентационный переход при изменении радиуса острова. При переходе чисто продольная деформация трансформируется в комбинацию продольной и поперечной деформации, что уменьшает энергию системы. Увеличение объемной энергии при росте поляризации приводит к ориентационному переходу в островах меньших размеров.

Таким образом, в работе изучены текстуры топологических дефектов в смектических островах. Используемая техника приготовления образцов позволяет получать острова различных размеров и с различными типами ориентационных структур. Как сами структуры, так и переходы между ними описываются теорией двумерной упругости с перенормированным электростатическими силами модулем продольного изгиба  $K_B$ . Определена анизотропия дву-

мерной ориентационной упругости  $K_B/K_S$ . Изменение  $K_B/K_S$  с изменением поляризации связывается с возникновением поляризационных зарядов при продольной деформации  $c$ -директора.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов # 13-02-00120, 13-02-01460, 15-02-05706, 14-02-01130.

1. P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press (1995).
2. S. A. Langer and J. P. Sethna, *Phys. Rev. A* **34**, 5035 (1986).
3. O. D. Lavrentovich, *Liq. Cryst.* **24**, 117 (1998).
4. M. Kleman and J. Friedel, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 61 (2008).
5. H.-R. Trebin, *Liq. Cryst.* **24**, 127 (1998).
6. S. Digal, R. Ray, and A. M. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5030 (1999).
7. H. Mukai, P. R. G. Fernandes, B. F. de Oliveira, and G. S. Dias, *Phys. Rev. E* **78**, 061704 (2007).
8. В. А. Беляков, В. Е. Дмитриенко, *УФН* **146**, 369 (1985).
9. R. D. Kamien and J. V. Selinger, *J. Phys.: Condens. Matt.* **13**, R1 (2001).
10. P. V. Dolganov, Н. Т. Nguyen, Е. I. Kats, V. K. Dolganov, and P. Cluzeau, *Phys. Rev. E* **75**, 031706 (2007).
11. P. V. Dolganov and P. Cluzeau, *Phys. Rev. E* **78**, 021701 (2008).

12. P. V. Dolganov, E. I. Kats, and P. Cluzeau, *Phys. Rev. E* **81**, 031709 (2010).
13. I. Kraus and R. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3815 (1999).
14. K.-K. Loh, I. Kraus, and R. B. Meyer, *Phys. Rev. E* **62**, 5115 (2000).
15. R. B. Meyer, D. Konovalov, I. Kraus, and J.-B. Lee, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **364**, 123 (2001).
16. J.-B. Lee, D. Konovalov, and R. B. Meyer, *Phys. Rev. E* **73**, 051705 (2006).
17. J.-B. Lee, R. A. Pelcovits, and R. B. Meyer, *Phys. Rev. E* **75**, 051701 (2007).
18. A. Pattanaporkratana, C. S. Park, J. E. MacLennan, and N. A. Clark, *Ferroelectrics* **344**, 71 (2006).
19. D. R. Link, G. Natale, S. Shao, N. A. Clark, E. Korblova, and D. M. Walba, *Science* **84**, 3665 (1997).
20. Y. Hatwalne and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. E* **52**, 6240 (1995).
21. D. H. Van Winkle and N. A. Clark, *Phys. Rev. A* **38**, 1573 (1988).
22. G. A. Hinshaw, Jr., R. G. Petschek, and R. A. Pelcovits, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1864 (1988).
23. P. V. Dolganov, V. K. Dolganov, and P. Cluzeau, *ЖЭТФ* **143**, 1209 (2013).
24. D. R. Link, N. Chattham, J. E. MacLennan, and N. A. Clark, *Phys. Rev. E* **71**, 021704 (2005).
25. C. Y. Young, R. Pindak, N. A. Clark, and R. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 773 (1978).
26. D. Andrienko and M. P. Allen, *Phys. Rev. E* **61**, 504 (2000).
27. P. V. Dolganov and P. Cluzeau, *Phys. Rev. E* **90**, 062501 (2014).