Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 3, стр. 128 — 130 10 августа 1991 г.

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ КИРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

А.Д.Попов

Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР
117966, Москва

Поступила в редакцию 31 мая 1991 г.

Уравнения модели двумерных киральных полей со значениями в произвольной полупростой группе Ли G редуцированы к модифицированным уравнениям Нама. Широкий класс явных решений этих уравнений дают решения уравнений конечной цепочки Тода.

1. В данной статье мы опишем новый класс решений уравнений модели двумерных главных киральных полей. Эти модели важны для изучения непертубативных эффектов в квантовой теории поля (см., например, [1]).

Уравнения модели главных киральных полей мы запишем в форме, предложенной Фаддеевым и Семеновым-Тян-Шанским [2]. Для этого в пространстве $R^{2,0}$ рассмотрим векторные поля A_μ и B_μ ($\mu, \nu, ... = 1, 2$) со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G. Уравнения для них имеют вид [2-4]:

$$F_{\mu,\nu} = -[B_\mu, B_\nu], \qquad D_\mu B_\mu = 0, \qquad \epsilon_{\mu\nu} D_\mu B_\nu = 0, \tag{1}$$

где $F_{\mu,\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, $D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu,]$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. Эквивалентность этих уравнений и стандартных уравнений киральной модели доказана в [2,3].

Интересно, что решения уравнений (1) дают одновременно стационарные решения нелинейного уравнения Шредингера в трехмерном пространстве $R^{2,1}$ для поля Ψ в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathcal{G}$, взаимодействующего с калибровочными полями группы Ли G. Это утверждение доказано в работе [5]. Отметим также, что можно перейти от пространства $R^{2,0}$ к пространству $R^{1,1}$ сигнатуры $(+-)$. При этом все излагаемое ниже для $R^{2,0}$ повторяется для случая $R^{1,1}$ практически без изменений.

2. Для полей A_μ и B_μ рассмотрим следующий анзац:

$$A_\mu = T_3(\varphi)\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\varphi, \qquad B_\mu = T_1(\varphi)\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\varphi - T_2(\varphi)\partial_\mu\varphi, \tag{2}$$

где зависящие от φ функции $T_a(\varphi)$ ($a, b, ... = 1, 2, 3$) принимают значения в алгебре Ли $\mathcal{G}$, а φ - произвольная функция от координат x_μ.

Подставим (2) в уравнения (1). Нетрудно убедиться, что при этом (1) редуцируются к следующим уравнениям:

$$T_a\Delta\varphi + (\dot{T}_a - f_a^{bc}T_bT_c)\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi = 0, \tag{3}$$

где $f_1^{23} = f_2^{31} = -f_3^{12} = 1$, $\Delta = \partial_\mu\partial_\mu$.

Очевидно, что уравнения (3) выполняются, если одновременно выполняются уравнения

$$\dot{T}_a = f_a^{bc}T_bT_c, \tag{4а}$$

$$\Delta\varphi = 0. \tag{4б}$$

Уравнения (4а) известны как модифицированные уравнения Нама, получаемые из уравнений Нама [6] тривиальной заменой $T_1 \to iT_1$, $T_2 \to iT_2$, $T_3 \to T_3$

Уравнение (4б) - стандартное уравнение Лапласа в $R^{2,0}$, в качестве решения которого можно взять вещественную или мнимую часть произвольной аналитической функции.

3. Уравнения (4а) имеют представление типа Лакса. Действительно, введем матрицы $L(\lambda) = i(1+\lambda^2)T_1 - (1-\lambda^2)T_2 - 2i\lambda T_3$, $M(\lambda) = i\lambda T_1 + \lambda T_2 - iT_3$. Тогда (4а) перепишутся в виде уравнений Лакса со спектральным параметром λ [7-9]:

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda),\ M(\lambda)], \tag{5}$$

где $\dot{L} \equiv dL/d\varphi$. Отсюда следует, что спектр матрицы $L(\lambda)$ не зависит от φ, и характеристическое уравнение $\det(L(\lambda,\varphi) - \eta I) = 0$, определяющее спектральную кривую, является инвариантом уравнения (5). К уравнению (5), следовательно, применимы методы, развитые Дубровиным, Кричевером и Новиковым (см., например, [10]), и в терминах тэта-функций можно выписать общее решение уравнения (5).

Частный случай этого класса решений можно получить, если воспользоваться наблюдением Уорда [9] о возможности редукции уравнений (4а) к уравнениям конечной цепочки Тода. Уравнения обобщенной цепочки Тода для произвольной простой алгебры Ли были введены Богоявленским [11]. Используя результаты [11], легко написать анзац для T_a в терминах базиса Картана - Вейля алгебры Ли $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}$, редуцирующий (4а) к уравнениям цепочки Тода. В качестве примера выпишем явный вид анзаца для матриц T_a со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G} = su(n)$.

Следуя Уорду [9], введем матрицы h_j, e_j, $e_{-j}(j = 1,...,n)$ с компонентами: $(h_j)_{pq} = \delta_{j,p}\delta_{j,q}$, $(e_j)_{pq} = \delta_{j,p}\delta_{j+1,q}$ $(j = 1,...,n-1)$, $(e_n)_{pq} = \delta_{1,p}\delta_{n,q}$, $(e_{-j})_{pq} = \delta_{j,p-1}\delta_{j,q}$ $(j = 1,...,n-1)$, $(e_{-n})_{pq} = \delta_{n,p}\delta_{1,q}$. Положим

$$T_1 = i\sum_{j=1}^{n} a_j(e_j + e_{-j}), \quad T_2 = \sum_{j=1}^{n} a_j(e_j - e_{-j}) - a_n(e_n - e_{-n}), \tag{6}$$

$$T_3 = i\sum_{j=1}^{n} b_j h_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} b_j = 0,$$

где $a_j = a_j(\varphi)$, $b_j = b_j(\varphi)$ - вещественные функции от φ. Введем матрицы $L = iT_1 - iT_3$, $M = T_2$. Нетрудно убедиться, что для анзаца (6) уравнения (4а) можно переписать в виде уравнений Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \tag{7}$$

уже без спектрального параметра. Эти уравнения совпадают с уравнениями обычной конечной периодической цепочки Тода (см., например, [11,12]). Если положить в (6) $a_n = 0$, то (7) будут уравнениями конечной непериодической цепочки Тода, явный вид общих решений которых известен [12]. За недостатком места мы эти решения выписывать не будем (см., например, [12,13]). Отметим, что, выполнив в уравнениях (7) формальный предельный переход $n \to \infty$, используемый в квантовой теории киральных полей, мы получим стандартные уравнения бесконечной цепочки Тода, решения которых также известны.

Таким образом, анзац (2) позволяет редуцировать уравнения двумерной главной киральной модели к интегрируемым методами обратной задачи рассеяния модифицированным уравнениям Нама (4а), так как уравнения Лапласа (4б) интегрируются тривиально. Решения уравнений (4а) и, в частности, уравнений (7) дают новый класс локальных решений уравнений двумерной главной киральной модели и статических решений нелинейных уравнений Шредингера в $R^{2,1}$. Вопрос о граничных условиях и топологическом заряде полученных решений требует отдельного исследования.

Автор признателен Р.Джэкиву за присылку работы [5], инициировавшей исследования, результаты которых представлены в данной статье.

1. Polyakov A.M. Phys. Lett., 1975, B59, 79; Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, 503; Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. ЭЧАЯ, 1986, 17, 472.

2. Семенов-Тян-Шанский М.А., Фаддеев Л.Д. Вестн. ЛГУ, 1977, N13, 81.

3. Chau L.-L., Hou B.-Y. Phys. Lett., 1984, B145, 347.

4. Попов А.Д. ЯФ, 1990, 51, 883.

5. Dunne G.V., Jackiw R., Pi S.-Y., Trugenberger C.A. Self-dual Chern-Simons solutions and two-dimensional non-linear equations. Preprint. CTP - 1891. Massachusets: CTP. 1990.

6. Nahm W. Lect. Notes Phys., 1983, 180, 456; 1984, 201, 189.

7. Hitchin N.J. Comm. Math. Phys., 1983, 89, 145; Donaldson S.K. Comm. Math. Phys., 1984, 96, 387; Hartubise J. Comm. Math. Phys. 1985, 100, 191.

8. Atiyah M., Hitchin N. The geometry and dynamics of magnetic monopoles. Princeton, 1988.

9. Ward R.S. Phys. Lett., 1985, A112, 3.

10. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Интегрируемые системы. Совр. пробл. матем. Фунд. направления. Т.4. М.: ВИНИТИ, 1985, 179.

11. Bogoyavlensky O.I. Comm. Math. Phys., 1976, 51, 201.

12. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

13. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.