

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА И КУЛОНОВСКАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА В $\alpha\alpha$ -, dt - и $d^3\text{He}$ -СИСТЕМАХ

Б.М.Карнаков, В.Д.Мур, С.Г.Поздняков, В.С.Попов¹⁾

*Московский инженерно-физический институт
115409, Москва*

¹⁾*Институт теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва*

Поступила в редакцию 28 июня 1991 г.

Получено выражение для эффективного радиуса, обобщающее формулу Смородинского на случай потенциалов с кулоновским отталкиванием при произвольном угловом моменте l . Показано, что при увеличении зарядов частиц происходит экспоненциальная перенормировка низкоэнергетических параметров. Для систем dt , $d^3\text{He}$ и $\alpha\alpha$ эти параметры извлечены из экспериментальных данных.

1. Резонансные ядерные реакции $dt \rightarrow n\alpha + 17,59$ МэВ и $d^3\text{He} \rightarrow p\alpha + 18,35$ МэВ имеют важное значение для проблем термоядерного синтеза, μ -катализа, астрофизики и т.д. В последние годы их сечения в окрестности s -волновых резонансов ${}^5\text{He}^*(3/2^+)$ и ${}^5\text{Li}^*(3/2^+)$ были измерены с рекордно высокой точностью ¹⁻⁴. Из анализа экспериментальных данных следует, что в этих зеркальных системах кулоновское взаимодействие сильно перенормирует не только длину рассеяния, но также и эффективный радиус (в отличие от pp - и pn -систем). Это связано с тем, что в данном случае радиус ядерных сил r_N сравним с боровским радиусом.

2. Кулоновская перенормировка эффективного радиуса. Разложение эффективного радиуса для заряженных частиц имеет вид ^{5,6}

$$\frac{1}{a_B^{2l+1}} \prod_{m=1}^l (\eta^{-2} + m^2) [2\pi D_C(\eta) \text{ctg} \delta_l^{(cs)} + 2h(\eta)] \equiv \\ \equiv K_l^{(cs)}(k^2) = -1/a_l^{(cs)} + \frac{1}{2} r_l^{(cs)} k^2 + \dots \quad (1)$$

Здесь $a_B = \hbar^2/Z_1 Z_2 e^2 m$ - боровский радиус¹⁾, l - орбитальный момент, $\eta = 1/ka_B$ - параметр Зоммерфельда, $k = (2E)^{1/2}$, $D_C(\eta) = [\exp(2\pi\eta) - 1]^{-1}$ - проницаемость кулоновского барьера,

$$h = \frac{1}{2} [\psi(i\eta) + \psi(-i\eta) - \ln \eta^2] \approx \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j} |B_{2j}| \eta^{-2j}$$

($|\eta| \rightarrow \infty$, $-\pi/2 < \arg \eta < \pi/2$), B_{2j} - числа Бернулли, $a_l^{(cs)}$ и $r_l^{(cs)}$ - ядерно-кулоновские длина рассеяния и эффективный радиус.

Можно показать, что значение $r_l^{(cs)}$ в момент возникновения связанного l -уровня выражается через волновую функцию χ_l с нулевой энергией:

$$r_l^{(cs)} = 2(2l-1)!! \int_0^{\infty} dr \left\{ \left[\frac{c_l}{a_B^l} \xi_l(\rho) \right]^2 - \chi_l^2(r) \right\} =$$

¹⁾ Далее рассматривается случай кулоновского отталкивания ($Z_1 Z_2 > 0$) и используется система единиц $\hbar = m = a_B = 1$.

$$a_B^{1-2l}/3(l!)^2 - 2(2l-1)!! \int_0^\infty \chi_l^2(r) dr, \quad (2)$$

$c_l^2 = 2^l(4l+3)/3(2l+1)[l!(2l+1)!]$. Заметим, что при $r \gg r_N$, т.е. вне радиуса действия ядерных сил, $\chi_l(r) = r^{-l} \xi_l(\rho)$, где

$$\xi_l(\rho) = \frac{\rho^{2l+1} K_{2l+1}(\rho)}{2^{2l}(2l)!} (\rho \gg 1) \approx \frac{\pi^{1/2}}{(2l)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2l+1/2} e^{-\rho} + \dots,$$

$\rho = (8r/a_B)^{1/2}$, а $K_\nu(\rho)$ - функция Макдональда (затухание $\chi_l(r)$ при $r \rightarrow \infty$ для всех l , включая $l=0$, обязано кулоновскому барьеру). "Выключению" кулоновского взаимодействия отвечает $a_B \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$. С учетом того, что $\xi_l(0) = 1$, соотношение (2) в этом пределе переходит в ранее известные формулы Смородинского ^{6,7} ($l=0$) и работы ⁸ ($l \geq 1$) для короткодействующих потенциалов.

Обсудим подробнее случай s -рассеяния. Обозначим через R_C минимальное расстояние, начиная с которого сильное взаимодействие пренебрежимо мало по сравнению с кулоновским. Тогда из (2) следует ограничение, полезное при извлечении r_{cs} из экспериментальных данных:

$$r_{cs} \leq a_B H(\rho_C), \quad (3)$$

где $\rho_C = (8R_C/a_B)^{1/2}$ и

$$H(\rho) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \int_\rho^\infty \xi_0^2(t) t dt \quad (\rho \gg 1) \approx \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8} e^{-2\rho} \left(\rho^2 + \frac{7}{4}\rho + \dots\right) \quad (3')$$

(см. рис.1). Отсюда видно, что при $r_N \gg a_B$ эффективный радиус экспоненциально близок к своему предельному значению, равному $a_B/3$.

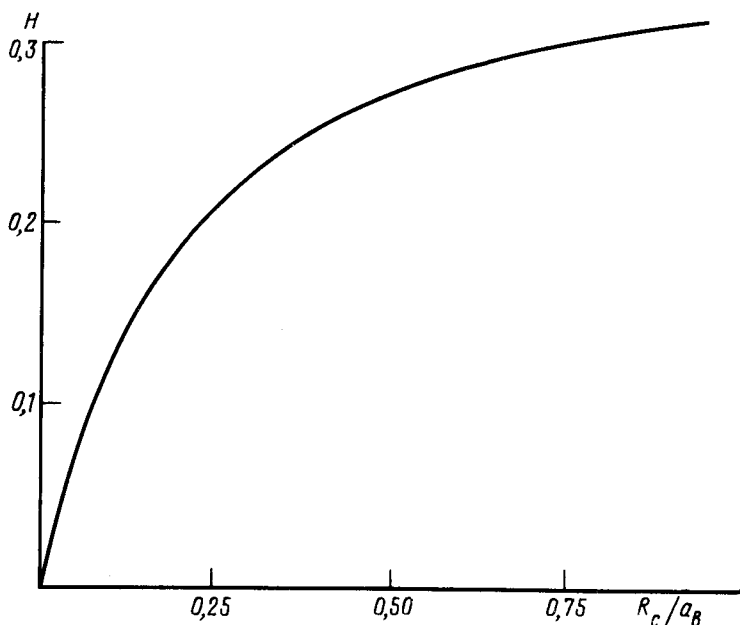


Рис. 1. График функции H , см. формулу (3'), в зависимости от $R_C/a_B = \rho_C^2/8$

Аналогичное утверждение справедливо и для высших коэффициентов разложения (1). Так, для s -рассеяния с помощью квазиклассического метода можно показать, что при $r_N \gg a_B$ имеем:

$$K_0^{(cs)}(k^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j k^{2j} \rightarrow 2h(\eta)$$

и для $j \geq 1$ справедлива оценка

$$\Delta\alpha_j = j^{-1}|B_{2j}| - \alpha_j = O(\delta), \quad \delta = 2\pi \exp[-(32r_N/a_B)^{1/2}] \ll 1. \quad (4)$$

Экспоненциальная малость $\Delta\alpha_j$ объясняется тем, что кулоновский барьер обрывается при $r \leq r_N$.

3. Низкоэнергетические параметры $\alpha\alpha$ -рассеяния. В $\alpha\alpha$ -системе существует узкий брейт-вигнеровский резонанс ${}^8\text{Be}(0^+)$ с энергией ${}^9 E = E_r - i\Gamma/2$, $E_r = 92,12 \pm 0,05$ кэВ, $\Gamma = 6,8 \pm 1,7$ эВ. Здесь $r_N \approx a_B$ и $\delta = 2,8 \cdot 10^{-2}$; поэтому в соответствии с (4) полагаем

$$2\pi D_C \text{ctg} \delta_{cs} = \alpha_0 - \Delta\alpha_1 k^2 - \Delta\alpha_2 k^4 - \Delta\alpha_3 k^6 + \dots \quad (5)$$

Используя экспериментальные данные ¹⁰ для фазы рассеяния при $E < 1000$ кэВ (что соответствует $kr_N < 1$), значение E_r и считая $\Delta\alpha_3 = 0$, получаем оптимальный набор параметров α_i , отвечающий $\chi^2 = 0,33$, см. табл.1. В частности для ширины "основного" состояния ${}^8\text{Be}$ это дает $\Gamma = 3,6$ эВ, что в пределах двух стандартных ошибок согласуется с экспериментальным значением. Для более надежного извлечения Γ из данных по рассеянию необходимо повысить точность эксперимента при $E < 400$ кэВ.

Таблица 1

| Система | dt | $d^3\text{He}$ | $\alpha\alpha$ |
|------------|---------------------|---------------------|----------------|
| a_B | 24,04 | 12,02 | 3,627 |
| r_N | 3,63 | 3,97 | 3,34 |
| a_{cs} | $76 + i \cdot 31$ | $65 + i \cdot 7,3$ | 1,19(3) |
| r_{cs} | $4,9 - i \cdot 0,3$ | $3,3 - i \cdot 0,2$ | 1,02 |
| R_C | 5,6 | 6,3 | 2,0 |
| α_0 | 0,270 | 0,184 | 3,05(-3) |
| β_0 | 0,110 | 2,08(-2) | 0 |
| α_1 | 0,102 | 0,138 | 0,141 |
| β_1 | 6,98(-3) | 8,57(-3) | 0 |
| α_2 | - | 5,0(-3) | 1,16(-2) |

Примечание. Величины a_B , r_N и т.д., имеющие размерность длины, даны в Фм. В качестве r_N взята сумма зарядовых радиусов частиц. В скобках указан порядок числа: $(n) \equiv 10^n$.

4. Зеркальные системы $d^3\text{H}$ и $d^3\text{He}$. При наличии в системе открытых каналов коэффициенты разложения (1) комплексны. Для $l = 0$ запишем: $K_{cs} = \alpha(k^2) - i\beta(k^2)$,

$$\alpha(k^2) = \alpha_0 + \alpha_1 k^2 + \alpha_2 k^4 + \dots, \quad \beta(k^2) = \beta_0 + \beta_1 k^2 + \beta_2 k^4 + \dots,$$

при этом из условия унитарности следует, что $\beta(k^2) \geq 0$.

Резонансная s -волна играет доминирующую роль как в упругом dt - и $d^3\text{He}$ -рассеянии, так и в реакциях синтеза. Ограничиваясь ее вкладом, для астрофизической функции имеем ¹¹

$$s(E) = \beta(k^2) \{ |\alpha(k^2) - 2h(\eta)|^2 + |\beta(k^2) + 2\pi D_c(\eta)|^2 \}^{-1}. \quad (6)$$

Отсюда с использованием экспериментальных данных¹⁻⁴ получаем наборы низкоэнергетических параметров для dt - и $d^3\text{He}$ -систем (см. табл.1). Качество подгонки иллюстрирует рис.2.

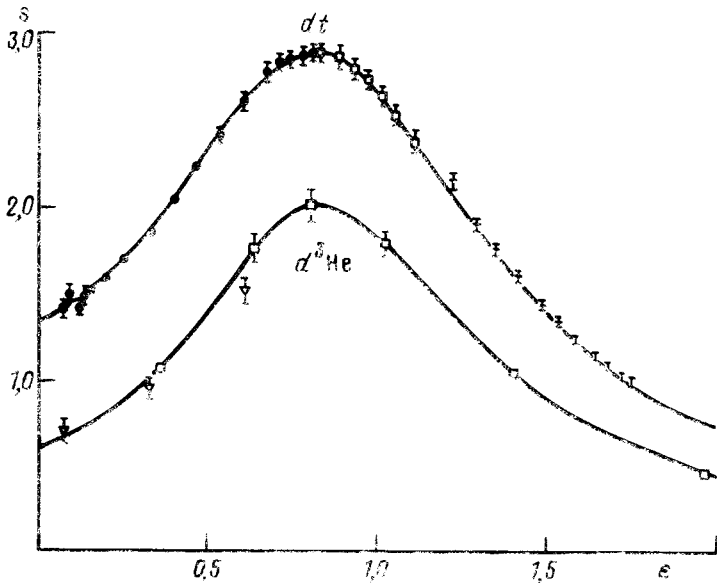


Рис. 2. Астрофизическая функция (6) в зависимости от $\epsilon = E/E_C$. Сплошные кривые построены по формуле (6) с параметрами из табл.1. Обозначения: * - экспериментальные данные из работы¹, o - из², + - из¹², ∇ - из³, \square - из⁴

Следует отметить, что согласованное варьирование всех параметров α_i , β_i допускает изменение их значений в довольно широкой области при несущественном увеличении χ^2 . В качестве дополнительного критерия отбора мы использовали ограничение (3) на радиус ядерного взаимодействия. Например, в случае dt -рассеяния для оптимального (по критерию минимума $\chi^2 = 0,62$) набора имеем: $r_{cs} = 5,7$ Фм, чему соответствует $R_c > 8$ Фм (см. рис.1). Такое значение R_c представляется физически неприемлемым (в R -матричном подходе для этой системы обычно полагают $R_c \approx 5$ Фм). Приведенному в табл.1 значению r_{cs} отвечает $\chi^2 = 0,82$.

Как видно из табл.1, кулоновское взаимодействие в зеркальных системах $d^3\text{H}$ и $d^3\text{He}$ существенно перенормирует не только длину рассеяния (что хорошо известно⁶), но и эффективный радиус r_{cs} . В соответствии с этим положения резонансов $^6\text{He}^+$ и $^6\text{Li}^+$ также сдвинуты на величину порядка кулоновской энергии - см. табл.2. Отметим, что энергии этих резонансов²), выраженные в кулоновских единицах $E_C = Z_1^2 Z_2^2 e^4 m / \hbar^2$, довольно близки друг к другу, что особенно заметно при использовании безразмерной переменной

²Значения E_R и ν_R в табл.2 относятся к так называемому главному полюсу. Помимо него, амплитуда рассеяния имеет полюс R' , а также кулоновскую серию полюсов¹¹, сгущающихся к упругому порогу ($k=0$).

$\nu = -i(2E/E_G)^{-1/2}$, которая является обобщением главного квантового числа (для виртуальных уровней в кулоновском поле отталкивания имеем: $k = -i/n$ и $\nu = n = 1, 2, \dots$).

Таблица 2

Энергия (в кэВ) низкоэнергетических резонансов

| Система | dt | ${}^3\text{He}$ | $\alpha\alpha$ |
|---------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|
| E_R | 47,2 — $i \cdot 37,7$ | 160 — $i \cdot 118$ | 92,1 — $i \cdot 1,8(-3)$ |
| ν_R | 0,233 — $i \cdot 0,665$ | 0,210 — $i \cdot 0,603$ | 2,86(-5) — $i \cdot 2,937$ |
| E_G | 59,39 | 239,5 | 1588 |

1. Jarmie N. et al. Phys. Rev. C, 1984, 29, 2031.
2. Brown R.E. et al. Phys. Rev. C, 1987, 35, 1999.
3. Möller W., Resenbacher F. Nucl. Instr. Meth., 1980, 168, 111.
4. Краусс А. et al. Nucl. Phys. A, 1987, 465, 150.
5. Lambert E. Helv. Phys. Acta, 1969, 42, 667.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М.: Наука, 1989.
7. Смородинский Я.А. ДАН СССР, 1948, 60, 217.
8. Мур В.Л., Попов В.С. ТМФ, 1976, 27, 204.
9. Benn J. et al. Nucl. Phys. A, 1968, 106, 296.
10. Hardenberg N.P., Temmer G.M. Phys. Rev., 1956, 104, 123.
11. Харнаков Б.М. и др. Письма в ЖЭТФ, 1990, 51, 352.
12. Кобзев А.П. и др. ЯФ, 1966, 3, 1060