Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 12, с. 925 – 930 © 2015 г. 25 июня

Непертурбативное обобщение “золотого правила” Ферми

Б. М. Карнаков[1)]

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2015 г.

Рассматривается задача о вырывании s-электрона, связанного в короткодействующей яме, внешним не зависящим от времени электромагнитным полем. Получена простая формула для вероятности распада состояния, носящего характер туннелирования электрона. Рассмотрено ее приложение к случаю совместного действия однородных электрического и магнитного полей. Подчеркивается, что в случае сильного магнитного поля имеющиеся в литературе результаты требуют уточнений.

DOI: 10.7868/S0370274X15120103

“*Золотым правилом*” Ферми (первым) называют (см., например, [1, 2]) известную формулу для дифференциальной вероятности перехода в единицу времени из начального состояния $|i_0\rangle$ с энергией $E_i^{(0)}$ (в дискретном или в непрерывном спектре) в состояния непрерывного спектра $|\nu_f^{(0)}\rangle$ с энергией $E_{\nu_f}^{(0)}$ в квантовомеханической системе с не зависящим от времени гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (1)$$

в первом порядке теории возмущений по $\hat{V}$ [1–3]:

$$dw(i_0 \to \nu_f^{(0)}) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\nu_f^{(0)}|\hat{V}|i_0\rangle\right|^2 \delta(E_i^{(0)} - E_{\nu_f}^{(0)}) d\nu_f^{(0)} = $$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\nu_f^{(0)}|\hat{V}|i_0\rangle\right|^2 d\rho_{\nu_f^{(0)}}(E_{\nu_f}^{(0)}). \quad (2)$$

Напомним, что $d\nu_f^{(0)} = d\rho_{\nu_f^{(0)}} dE_{\nu_f}^{(0)}$; $d\rho_{\nu_f^{(0)}}(E_{\nu_f}^{(0)})$ – дифференциальная энергетическая плотность конечных состояний в непрерывном спектре.

Для переходов между состояниями непрерывного спектра формула (2) позволяет рассчитывать дифференциальные сечения процессов столкновения частиц, включая и релятивистскую область энергий (тормозное излучение, фотоэффект и т.д.).

Многочисленными являются применения формулы (2) в случаях, когда в отсутствие возмущения $\hat{V}$ в системе имеется дискретный уровень (связанное состояние), лежащий непосредственно на фоне непрерывного спектра невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$ (т.е. система не является одноканальной). Под действием возмущения $\hat{V}$, связывающего различные каналы, это состояние становится квазистационарным. В таком случае формула (2) позволяет определить вероятность w его распада в единицу времени (или связанные с нею время жизни состояния $\tau = 1/w$ и ширину уровня $\Gamma = \hbar w$). В частности, с помощью этой формулы рассмотрены такие процессы, как излучение атомных систем, эффект Оже, внутренняя конверсия γ-лучей и т.д. [4].

В случае связанного состояния электрона в короткодействующем потенциале $U_S(r)$ влияние возмущения на уровень существенно зависит от поведения $\hat{V}$ на больших расстояниях, где вероятность нахождения электрона экспоненциально мала. Если это взаимодействие является малым, $|\hat{V}| \ll \hbar^2/mr^2$, во всем пространстве, то оно приводит лишь к сдвигу уровня, который может быть рассчитан по теории возмущений. Уровень остается дискретным, так как нижняя граница непрерывного спектра по-прежнему $E = 0$. Если же $\hat{V}$ на больших расстояниях опускает эту границу ниже положения уровня (как это имеет место при наложении однородного электрического поля, $\hat{V} = e\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{r}$), то рассматриваемое состояние благодаря туннелированию электрона становится квазистационарным. Однако для вычисления ширины уровня формула (2) теории возмущений неприменима. Далее будет получено ее непертурбативное обобщение.

Рассматриваемая одноэлектронная система характеризуется не зависящим от времени гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_S(r) + \hat{V}_f \equiv \hat{H}_0 + \hat{V}_f \equiv \hat{H}_f + U_S(r), \quad (3)$$

т.е. в системе имеется два взаимодействия, $U_S(r)$ и $\hat{V}_f$, причем с сильно различающимися областями действия сил. Предполагается, что потенциал взаимодействия $U_S(r)$ является короткодействующим с радиусом действия сил r_S ($U_S(r) \approx 0$ при $r > r_S$, кулоновского взаимодействия нет) и в нем имеется

[1)]e-mail: karnak@theor.mephi.ru

дискретный s-уровень с энергией $E_s^{(0)} = -\hbar^2\kappa^2/2m$ и волновой функцией $\psi_s^{(0)}(r)$ в отсутствие $\hat{V}_f$. Эта нормированная на 1 волновая функция при $r \gg r_S$ имеет асимптотику

$$\psi_s^{(0)}(r) = C_\kappa \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\,\frac{1}{r}e^{-\kappa r},$$

где $C_\kappa \sim 1$ – так называемый асимптотический коэффициент, который зависит от конкретного вида $U_S(r)$; $C_\kappa = 1$, когда U_S моделируется потенциалом нулевого радиуса [5].

Взаимодействие $\hat{V}_f$ предполагается таким, что при его включении невозмущенный уровень становится квазистационарным состоянием, т.е. приобретает ширину, а также испытывает сдвиг: $E_s^{(0)} \to \to E_s = \tilde{E}_s - i\Gamma_s/2$. Здесь $\tilde{E}_s = E_s^{(0)} + \triangle E_s$, где $\triangle E_s$ является сдвигом уровня, обусловленным взаимодействием $\hat{V}_f$, а Γ_s – связанное с ним уширение уровня. Энергия (комплексная) E_s квазистационарного состояния и его волновая функция $\psi_s^{(+)}$ определяются из решения уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\psi_s^{(+)} = E_s\psi_s^{(+)}, \tag{4}$$

удовлетворяющего при $r \to \infty$ условию излучения Зоммерфельда, т.е. соответствующего “уходящим” волнам [6]. Непосредственный аналитический расчет $\tilde{E}_s$ и Γ_s согласно уравнению (4) требует конкретизации вида как $U_S(r)$, так и $\hat{V}_f$ и возможен лишь в исключительных модельных случаях для последних. Ниже мы рассмотрим случай, когда при определенных ограничениях на $U_S(r)$ (см. выше) и $\hat{V}_f$ возможно приближенное вычисление $\tilde{E}_s$ и Γ_s, не требующее точного решения уравнения (4).

Для дальнейших преобразований важны следующие ограничения на $\hat{V}_f$: взаимодействие считается слабым, $|\hat{V}_f| \ll \hbar^2\kappa^2/m$, лишь на расстояниях $r \lesssim 1/\kappa \sim r_S$, т.е. как в области действия потенциала $U_S(r)$, так и в области локализации волновой функции невозмущенного состояния. Однако на бóльших расстояниях никаких существенных ограничений на $\hat{V}_f$ не накладывается, кроме отмеченного выше важного условия о понижении границы непрерывного спектра на больших расстояниях, так что взаимодействие $\hat{V}_f$ уже не является малым. Поэтому на таких расстояниях его нельзя учитывать по теории возмущений, как это предполагалось при выводе формулы (2). Тем не менее в данном случае как сдвиг уровня, так и приобретаемая ширина уровня малы по сравнению с энергией связи невозмущенного состояния. При этом ширина уровня экспоненциально мала по сравнению с его сдвигом.

Воспользуемся интегральной формой уравнения (4) с функцией Грина $G_{f,E_s}^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int(E_{\nu_f} - E_s - - i0)^{-1}\psi_{\nu_f}(\mathbf{r})\psi_{\nu_f}^*(\mathbf{r}')d\nu_f$ оператора $\hat{H}_f$, рассматривая слагаемое $-U(r)\psi_s^{(+)}(\mathbf{r})$ как неоднородный член в правой части уравнения (4) [6]. Здесь $\psi_{\nu_f}(\mathbf{r})$ и E_{ν_f} – система ортонормированных собственных функций (образующих полную систему) и соответствующие им значения энергии гамильтониана $\hat{H}_f$. Уравнение (4) принимает вид ($E_s = \tilde{E}_s - i\Gamma_s/2$)

$$\psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) = -\int \frac{d\nu_f}{E_{\nu_f} - \tilde{E}_s - i0}\psi_{\nu_f}(\mathbf{r}) \times$$
$$\times \int \psi_{\nu_f}^*(\mathbf{r}')U_S(r')\psi_s^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'. \tag{5}$$

Шириной уровня здесь пренебрегается ввиду ее экспоненциальной малости. Заметим, что влияние как сдвига уровня, так и искажения на расстояниях $r \lesssim \lesssim r_S$ волновой функции $\psi_s^{(+)}$ по сравнению с $\psi_s^{(0)}$ на вероятность вырывания электрона выступают как поправки. Ниже мы будем использовать их невозмущенные значения $E_s^{(0)}$ и $\psi_s^{(0)}$.

Сделаем важное замечание. Возможность вычисления ширины уровня с помощью приближенного уравнения (5) (вообще не содержащего ширину уровня!) связана с тем физическим обстоятельством, что вероятность распада квазистационарного состояния в единицу времени $w = \Gamma/\hbar$ совпадает с потоком вероятности $w = \oint \mathbf{j}d\mathbf{s}$ на больших расстояниях (в пределе $r \to \infty$), который определяется непосредственно функцией $\psi_s^{(+)}(\mathbf{r})$. На расстояниях $r \gg r_S$ волновая функция (5) удовлетворяет уравнению Шредингера $\hat{H}_f\psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) = E_s^{(0)}\psi_s^{(+)}(\mathbf{r})$. Следовательно, в данном случае в формуле (5) при интегрировании по энергии E_{ν_f} (содержащемся в $\int ...d\nu_f$) значение интеграла определяется вычетом в полюсе. Поэтому можно заменить $1/(E_{\nu_f} - E_s^{(0)} - i0) \to 2\pi i\delta(E_{\nu_f} - E_s^{(0)})$ и записать волновую функцию (5) в виде[2)]

$$\psi_s^{(+)}(\mathbf{r}) = -2\pi i \int a_{i\nu_f}(E_s^{(0)})\delta(E_{\nu_f} - E_s^{(0)})\psi_{\nu_f}(\mathbf{r})d\nu_f,$$
$$r \to \infty, \tag{6}$$

где введено обозначение

$$a_{i\nu_f}(E_s^{(0)}) = \langle \nu_f|U_S(r)|\psi_s^{(0)}\rangle =$$
$$= \int \psi_{\nu_f}^*(\mathbf{r})U_S(r)\psi_s^{(0)}(r)d^3r. \tag{7}$$

[2)] Контур интегрирования по E_{ν_f} можно замкнуть в верхнюю полуплоскость. Значение интеграла определяется вычетом в полюсе $1/(E_{\nu_f} - E_s^{(0)} - i0)$.

Ниже будет показано, что $a_{i\nu_f}(E_{\nu_f})$ при $E_{\nu_f} = E_s^{(0)}$ (на энергетической поверхности вылетающих электронов) имеет смысл парциальной амплитуды распада – амплитуды вырывания электрона в состояние $|\nu_f\rangle$.

Заметим, что коэффициент $c_{\nu_f} = -2\pi i a_{i\nu_f}(E_s^{(0)})\delta(E_{\nu_f} - E_s^{(0)})$ в разложении волновой функции (6) определяет распределение вероятностей различных значений квантовых чисел ν_f для вылетающего электрона:

$$dw_{\nu_f} = |c_{\nu_f}|^2 d\nu_f = (2\pi)^2 |a_{i\nu_f}(E_s^{(0)})|^2 \delta^2(E_{\nu_f} - E_s^{(0)}) d\nu_f. \tag{8}$$

Используя известный прием обращения с квадратом δ-функции $\delta^2(E_{\nu_f} - E_s^{(0)})$, состоящий в заменах

$$\delta^2(E_{\nu_f} - E_s^{(0)}) \to \delta(E=0)\delta(E_{\nu_f} - E_s^{(0)}), \tag{9}$$

$$\delta(E=0) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{1}{2\pi\hbar}T,\ T\to\infty, \tag{10}$$

приходим к формуле для дифференциальной вероятности вырывания электрона в единицу времени:

$$dw_{i\to\nu_f} = \frac{2\pi}{\hbar}|a_{i\nu_f}(E_s^{(0)})|^2 \delta(E_{\nu_f} - E_s^{(0)}) d\nu_f = \\ = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle \nu_f | U_S(r) | \psi_s^{(0)}\rangle|^2 d\rho_{\nu_f}, \tag{11}$$

внешне похожей на формулу Ферми (2) (см. ниже (28)).

Матричный элемент в формуле (7) допускает существенное упрощение:

$$a_{i\nu_f}(E_s^{(0)}) = \langle \nu_f | U_S(r) | \psi_s^{(0)}\rangle = \\ = \frac{\hbar^2}{4m\kappa}\psi^*_{\nu_f}(0)\int\limits_{r\le R}\frac{1}{r}e^{\kappa r}\left(\Delta - \kappa^2\right)\psi_s^{(0)}(r) d^3 r = \\ = -\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{2\pi\kappa}C_\kappa \psi^*_{\nu_f}(0). \tag{12}$$

Здесь $R \gg r_S$ выбрано таким образом, что $\hat{V}_f$ при $r \le R$ еще можно рассматривать как малое возмущение. Поэтому под интегралом (см. (7)) можно положить

$$\psi_{\nu_f}(\mathbf{r}) = \psi_{\nu_f}(0)\frac{\mathrm{sh}\,(\kappa r)}{\kappa r},$$

как для свободной частицы. При вычислении интеграла использована формула Грина, а для функции $\psi_s^{(0)}(r)$ – ее приведенная выше асимптотика при $r \gg r_S$.

Интегрирование в формуле (11) дает полную ширину уровня

$$\Gamma_s = \hbar w_s = (2\pi)^2 \frac{\hbar^4\kappa}{m^2} C_\kappa^2 \int |\psi_{\nu_f}(0)|^2 d\rho_{\nu_f}. \tag{13}$$

Формулы (11)–(13) единообразным способом описывают вероятности вырывания s-электрона из короткодействующей ямы статическими электромагнитными полями различной конфигурации. Их применение особенно эффективно в важном случае однородных полей, когда в уравнении Шредингера с гамильтонианом $\hat{H}_f$ происходит разделение переменных. В качестве иллюстрации рассмотрим **вырывание электрона в параллельных однородных электрическом и магнитном полях**. В данном случае удобно выбрать векторный потенциал $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{H}}\times\mathbf{r}$ и воспользоваться цилиндрическими координатами. Тогда в гамильтониане $\hat{H}_f$ электрона во внешнем поле переменные продольного и поперечного движения разделяются и он принимает вид (далее, как правило, $e = \hbar = m_e = 1$)

$$\hat{H}_f \equiv \hat{H}_t + \hat{H}_l = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}_t^2 - \frac{1}{2}\omega_H \hat{l}_z + \frac{1}{8}\omega_H^2\rho^2 + \frac{1}{2}\hat{p}_z^2 - Fz. \tag{14}$$

Считаем поля направленными в одну сторону, причем противоположно оси z, заряд электрона $-e < 0$, $F = e\mathcal{E} > 0$, $\omega_H = e\mathcal{H}/m_e c$. Поэтому собственные функции и собственные значения гамильтониана (14) могут быть выбраны в виде (см. §§ 24, 112 в [3], $m \equiv l_z$)

$$\psi_{\nu_f}(\mathbf{r}) \equiv \psi_{E_l n_\rho m} = \psi_{n_\rho m}(\boldsymbol{\rho})\psi_{E_l}(z),$$

$$E_{\nu_f} = E_t + E_l = \omega_H\left[n_\rho + \frac{1}{2}(|m| - m + 1)\right] + E_l, \tag{15}$$

$$\psi_{E_l}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{F}\right)^{1/6}\Phi\left[-(2F)^{1/3}(z + E_l/F)\right], \tag{16}$$

$$\psi_{n_\rho m}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\mu! a_H}\left[\frac{(\mu + n_\rho)!}{2^\mu\cdot 2\pi\, n_\rho!}\right]^{1/2}\left(\frac{\rho}{a_H}\right)^\mu \times \\ \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a_H^2} + im\varphi\right)F(-n_\rho, \mu+1, \rho^2/2a_H^2), \tag{17}$$

где $a_H = \sqrt{\hbar c/e\mathcal{H}}$, $\mu = |m|$, $-\infty < E_l < \infty$ – энергия продольного движения электрона в однородном поле, E_t (см. (15)) – уровни Ландау поперечного движения электрона в магнитном поле, $F(...)$ – обобщенный полином Лагерра.

В данной задаче в роли ν_f выступают квантовые числа E_l, n_ρ, m (далее мы полагаем $\mu = 0$, поскольку рассматривается вырывание s-электрона).

При этом в формуле (13) нужно выполнить замену $\int \ldots d\rho_f \rightarrow \sum\limits_{n_\rho} \ldots$ и учесть значение $E_l = -\frac{1}{2}\left[\kappa^2 + (2n_\rho + 1)\omega_H\right]$, следующее из закона сохранения энергии. Вычисляя $\psi_{\nu_f}(0)$ с волновыми функциями (16) и (17) (единственная нужная для вычислений асимптотика $\Phi(\xi)$ приведена в § 24 [3]; ниже $n \equiv n_\rho = 0, 1, \ldots$):

$$\psi_{\nu_f}(0) = \frac{1}{2\pi a_H}\kappa_n^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{3F}\kappa_n^3\right),$$
$$\kappa_n = \sqrt{\kappa^2 + (2n+1)\omega_H}, \tag{18}$$

сразу получаем вероятность вырывания электрона в виде

$$w_s = \sum_n w_{sn}, \quad w_{sn} = \frac{\kappa}{a_H^2 \kappa_n} C_\kappa^2 \exp\left(-\frac{2}{3F}\kappa_n^3\right). \tag{19}$$

Наглядный физический смысл этого результата состоит в том, что w_{sn} определяет вероятность вырывания электрона вдоль магнитного поля (параллельного ему электрического), при котором он находится на уровне Ландау с радиальным квантовым числом $n_\rho = n$ (магнитным квантовым числом $m = 0$) и, самое главное, с квантованной энергией поперечного движения $E_t = \omega_H(n + 1/2)$. Эффективно это приводит к соответствующему увеличению энергии связи в продольном движении электрона и уменьшению вероятности его вырывания (в данном направлении). Поэтому без вычислений представляется очевидным, что магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на распад состояния.

Условия применимости полученного результата имеют вид $F \ll \kappa^3$, $\omega_H \ll \kappa^2$. При этом согласно (18) и (19) вероятность вырывания электрона существенно зависит от двух безразмерных параметров:

$$\frac{\kappa^3}{F} \equiv \frac{\hbar^2\kappa^3}{me\mathcal{E}} \gg 1, \quad \gamma = \frac{\kappa\omega_H}{F} \equiv \frac{\hbar\kappa\mathcal{H}}{mc\mathcal{E}}$$
$$\left(\frac{\omega_H}{\kappa^2} \ll \gamma, \ \gamma \ll \frac{\kappa^3}{F}\right) \tag{20}$$

(c – скорость света). Первый из них определяет вероятность вырывания электрона в отсутствие магнитного поля:

$$w_s^{(0)} = \frac{e\mathcal{E}}{2\hbar\kappa} C_\kappa^2 \exp\left(-\frac{2\hbar^2\kappa^3}{3me\mathcal{E}}\right). \tag{21}$$

Второй параметр представляет отношение магнитной и электрической составляющих силы Лоренца в области локализации электрона в невозмущенном состоянии.

Нетрудно убедиться в том, что в формуле (19) существенную роль играют слагаемые с $n \lesssim 1/\gamma$. При этом в предэкспоненте можно заменить κ_n на κ (опуская малые поправки $\sim\omega/k^2$ и $\sim F/\kappa^3$), а в показателе экспоненты ограничиться линейным членом разложения по n радикала

$$\kappa_n^{3/2} = [\kappa^2 + (2n+1)\omega_H]^{3/2} \approx k_0^3\left(1 + \frac{3\omega_H}{\kappa_0^2} n\right),$$
$$\kappa_0^2 = \kappa^2 + \omega_H.$$

После этого легко выполняется суммирование по n (геометрическая прогрессия), что дает вероятность вырывания электрона

$$w_s = a_H^{-2} C_\kappa^2 \frac{\exp\left[-2(\kappa^2 + \omega_H)^{3/2}/3F\right]}{1 - \exp\left[-2\omega_H(\kappa^2 + \omega_H)^{1/2}/F\right]} =$$
$$= a_H^{-2} C_\kappa^2 \frac{\exp\left[-2\kappa_0^3/3F\right]}{1 - \exp\left[-2\omega_H\kappa_0/F\right]}. \tag{22}$$

В предельном случае слабого магнитного поля, $\gamma \ll 1$ (при этом в сумме (19) существенно большое число слагаемых с $n \sim 1/\gamma \gg 1$), в (22) можно выполнить разложение по малому параметру $\omega_H/\kappa^2 \ll 1$ и получить

$$w_s = \left(1 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \ldots\right) w_s^{(0)}, \ \gamma \ll 1. \tag{23}$$

В этом случае, как и следовало ожидать, магнитное поле оказывает слабое стабилизирующее влияние на распад состояния.

Совершенно иной вид имеет w_s в противоположном предельном случае, $\gamma \gg 1$. При этом в сумме в (19) существенно лишь одно слагаемое, с $n = 0$ (электрон вылетает, находясь на основном уровне Ландау), и

$$w_s \approx \frac{1}{a_H^2} C_\kappa^2 \exp\left(-\frac{2}{3F}\kappa_0^3\right), \ \kappa_0 = \sqrt{k^2 + \omega_H}. \tag{24}$$

Ввиду малости ω_H/κ^2 отсюда следует

$$w_s = 2\gamma \exp\left[-\gamma\left(1 + \frac{\omega_H}{4\kappa^2} + \ldots\right)\right] w_s^{(0)}, \ \gamma \gg 1, \tag{25}$$

где $w_s^{(0)}$ определяет вероятность вырывания электрона в отсутствие магнитного поля (21). Видно, что магнитное поле сильно подавляет вероятность распада состояния.

Ранее влияние магнитного поля на вероятность вырывания электрона из короткодействующей ямы электрическим полем исследовалось во многих работах, начиная с пионерской работы [7] (см., например, [8, 9] и цитируемую там литературу). При вычислениях использовался квазиклассический метод мнимого времени. При классическом описании поперечного движения вырываемого электрона (как и в отсутствие магнитного поля) в случае параллельных полей для функции распределения вероятностей значений импульса его поперечного движения была получена формула

$$dw_s = \frac{\kappa}{\pi F} \exp\left(-\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\gamma}\frac{\kappa}{F}p_\perp^2\right) d^2p_\perp w_s^{(0)},$$

$$\overline{p_\perp^2/2m} = \frac{1}{2\operatorname{sh}\gamma}\hbar\omega_H. \qquad (26)$$

Полная вероятность распада состояния

$$w_s = \frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma} w_s^{(0)}, \qquad (27)$$

причем безотносительно к каким-либо ограничениям на значения параметра γ (ср. с (20) и (22)–(25)). Так как $\gamma/\operatorname{sh}\gamma \approx 1-\gamma^2/6$ при $\gamma \ll 1$, в этом случае формула (27) правильно передает слабое стабилизирующее влияние магнитного поля на вероятность распада состояния (см. (23)).

Однако с увеличением γ возникает вопрос об условии применимости квазиклассического приближения для описания поперечного вращательного движения электрона в сильном однородном магнитном поле по следующей причине. Как было отмечено выше, в случае $\gamma \ll 1$ вырывание электрона сопровождается его возбуждением на уровни Ландау с $n_\rho \sim 1/\gamma \gg 1$, что является необходимым условием возможности вычисления вероятности распада как квантовомеханическим суммированием по n_ρ в (19), так и интегрированием по квазиклассическому поперечному импульсу $\mathbf{p}_\perp$ в (26), как это было выполнено в [7–9]. Это условие нарушается при увеличении γ. Действительно, как видно из квазиклассической формулы (26), при $\gamma > 1$ среднее значение кинетической энергии электрона не превышает энергию основного уровня Ландау (отметим, что в отсутствие магнитного поля $\overline{p_\perp^2} = F/\kappa$). Тем не менее существенное (на несколько порядков) различие между формулами (19), (22) и квазиклассической формулой (26) имеет место только в случае очень слабого электрического поля: $\kappa^3/F \gg \gamma \gg 1$, когда проявляется квантующий характер влияния магнитного поля на энергетический спектр поперечного движения электрона и он вылетает, находясь на основном уровне Ландау. Это различие связано с множителем $\exp[-(\omega_H/4\kappa^2)\gamma]$ в формуле (25), который отсутствует в (27).

О связи формул (11), (12) с “золотым правилом” Ферми. Как отмечалось выше, формула (2) неприменима к случаю вырывания связанного электрона из короткодействующей ямы, поскольку малое возмущение $\hat{V}$ не приводит к сдвигу границы непрерывного спектра, невозмущенные волновые функции непрерывного спектра сводятся к плоским волнам и процесс распада запрещен законом сохранения энергии. Тем не менее имеется простая связь между матричными элементами $\langle \nu_f^{(0)}|\hat{V}|i_0\rangle$ в этой формуле и матричными элементами $\langle \nu_f|U_S(r)|\psi_s^{(0)}\rangle$ в формуле (11), определяющей вероятность туннелирования электрона под влиянием взаимодействия $\hat{V}_f$. (Индексы “(0)” здесь указывают на то, что, как и в (2), рассматриваемые состояния относятся к невозмущенному гамильтониану в (1) с $\hat{H}_0 = -(\hbar^2/2m)\Delta + U_S$. При этом $|i_0\rangle \equiv |\psi_s^{(0)}\rangle$.) Действительно, заменяя в этом матричном элементе $U_S(r)$ на $-(\hbar^2/2m)\Delta - E_s^{(0)}$ и перенося действие оператора Δ налево, получаем

$$\langle \nu_f|U_S(r)|\psi_s^{(0)}\rangle = \langle \nu_f|\hat{V}_f|\psi_s^{(0)}\rangle. \qquad (28)$$

Поэтому формула (11) для вероятности распада принимает такой же вид, что и формула (2) первого порядка теории возмущений с $\hat{V}_f$, но с существенной модификацией: в качестве волновых функций конечных состояний выступают собственные функции гамильтониана $\hat{H}_f$, точно учитывающие действие $\hat{V}_f$ на больших расстояниях, где оно уже не является слабым.

Интересно отметить, что подобный подход был использован в работе Л.В. Келдыша [10] для вычисления вероятности ионизации атомов (и твердых тел) в электрическом поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0\cos(\omega t)$ сильной электромагнитной волны с частотой, меньшей энергии связи состояния, когда в низших порядках теории возмущений распад запрещен. В формуле первого порядка нестационарной теории возмущений для амплитуды перехода (см. § 40 [3])

$$\int \langle \mathbf{p}|e\boldsymbol{\mathcal{E}}_0\mathbf{r}\cos(\omega t)|\psi_s^{(0)}\rangle \exp(-ip^2t/2m\hbar - iE_s^{(0)}t/\hbar)dt.$$

Келдышем была предложена замена волновой функции вылетающего свободного электрона $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathbf{pr}/\hbar - ip^2t/2m\hbar)$ *волковской* волновой функцией [4, 11], точно учитывающей действие электрического поля (см. комментарий после формулы (7) в [10]).

В заключение напомним, что в прошлом году исполнилось 50 лет со времени выхода статьи Л.В. Келдыша [10]. Этому юбилею были посвящены специальный выпуск Journal of Physics B [12] и обзор [13] в УФН. В статьях [14] и [13] обсуждались, в частности, и вопросы, затронутые в данной заметке.

Автор выражает благодарность С.П. Гореславскому, В.Д. Муру, В.С. Попову и С.В. Попруженко за полезные замечания по рукописи статьи.

1. Г. Бете, *Квантовая механика*, Мир, М. (1965).
2. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, М. (1973).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, изд. 4, Наука, М. (1989).
4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, изд. 3, Наука, М. (1989).
5. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, Изд-во ЛГУ, Л. (1975).
6. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, изд. 2, Наука, М. (1971).
7. Л. П. Котова, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **54**, 1151 (1968).
8. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, ЖЭТФ **113**, 1579 (1998).
9. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004).
10. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
11. Д. М. Волков, ЖЭТФ **7**, 1286 (1937).
12. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **47**(20) (2014).
13. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, С. В. Попруженко, УФН **185**, 3 (2015).
14. S. V. Popruzhenko, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **47**, 204001 (2014).