Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 12, с. 935 – 939

О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах

Е. Г. Екомасов[1)], *А. М. Гумеров*[1)], *Р. В. Кудрявцев*

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2015 г.

Исследована резонансная динамика кинков уравнения синус-Гордона в системе с одиночной точечной примесью с учетом генерации локализованных волн, наличия внешней силы и диссипации. Найдены уравнения движения для координаты центра кинка и амплитуды примесной моды. Анализ решений данных уравнений и результатов численного моделирования модифицированного уравнения синус-Гордона показал, что затухание и внешняя сила противодействуют возникновению резонансного отражения кинка от притягивающей примеси. Однако вызывающая его причина – резонансный обмен энергией между солитонами – по-прежнему имеет место.

DOI: 10.7868/S0370274X15120127

В последние годы с помощью динамики солитонов описывается все больше физических приложений в различных областях физики [1, 2]. Например, солитоны уравнения синус-Гордона (УСГ) в физике конденсированного состояния описывают доменные границы в магнетиках, дислокации в кристаллах, флюксоны в джозефсоновских контактах и переходах и т.п. [3]. Часто учет влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры солитонов [1, 2]. При этом могут возбуждаться внутренние степени свободы солитонов, которые способны играть определяющую роль в некоторых физических эффектах. Много работ посвящено изучению влияния на динамику солитонов УСГ пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала (или наличия примеси в системе) (см., например, [1–6]). Модель классической частицы для взаимодействия кинка с примесью применима в случае, когда примесь не допускает существования примесной моды – локализованного колебательного состояния на примеси [1, 2]. Важность примесных мод для динамики кинка уже показана ранее [4–7]. Отметим здесь появление такого интересного эффекта, как отражение кинка, движущегося по инерции в бездиссипативной среде, "притягивающей" примесью из-за резонансного обмена энергией между трансляционной модой кинка и примесной модой. Однако до сих пор нет экспериментальных работ по наблюдению данного эффекта. Последнее, очевидно, связано с тем, что для исследуемых реальных физических систем всегда характерно наличие диссипации, которая может критически влиять на поведение системы. В связи с этим необходимо исследовать влияние затухания и внешней силы на возникновение резонансных эффектов при движении кинков УСГ в модели с "притягивающей" примесью и найти критические параметры реальной физической системы, подходящей для наблюдения подобных эффектов.

Рассмотрим систему, определяемую лагранжианом

$$L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{u_t^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} - K(x)(1-\cos u) + 4h\cos\frac{u}{2} \right\} dx, \tag{1}$$

где $K(x) = 1 - \varepsilon\delta(x)$ моделирует точечную примесь, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $0 < \varepsilon < 1$ – константа, h – параметр, определяющий амплитуду внешней силы. Для учета затухания в системе используем диссипативную функцию Рэлея:

$$R = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\alpha u_t^2 dx. \tag{2}$$

Отметим, что используя выражения (1) и (2), можно описать, например, динамику доменных границ в ферромагнетиках и слабых ферромагнетиках [8]. Подстановка выражений (1) и (2) в уравнения Лагранжа–Эйлера с учетом диссипации приводит к

[1)]e-mail: ekomasoveg@gmail.com; bgu@bk.ru

уравнению движения для скалярного поля $u(x,t)$ в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + [1 - \varepsilon\delta(x)]\sin u = 2h\sin\frac{u}{2} + \alpha u_t. \quad (3)$$

Это уравнение является модифицированным уравнением синус-Гордона (МУСГ). В случае отсутствия примеси, внешней силы и затухания уравнение (3) переходит в уравнение синус-Гордона и имеет точное решение в виде топологического солитона (или кинка):

$$u_0(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left\{\pm\gamma\left[x - X(t)\right]\right\}\right), \quad (4)$$

где $\gamma = \left(1 - \upsilon^2\right)^{-1/2}$, $0 < \upsilon < 1$ – скорость движения кинка, $X(t) = \upsilon t + x_0$ – координата центра кинка. При $\upsilon \ll 1$ и $\gamma \approx 1$ путем решения линеаризованного уравнения УСГ при отсутствии внешней силы и затухания можно найти выражение, описывающее структуру примесной моды:

$$u_1(x,t) = a(t)\exp(-\varepsilon|x|/2), \quad (5)$$

где $a(t) = a_0\cos(\Omega t + \theta_0)$, $\Omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ – частота примесной моды, θ_0 – начальная фаза.

Ранее в [1, 4] был подробно изучен случай одиночной точечной примеси без учета внешней силы и затухания. Показано, что в случае приближения "недеформируемого кинка" примесь действует как потенциал. При этом для соответствующего знака константы ε она действует на кинк как притягивающий потенциал. В результате солитон может быть локализован. Для приближения "деформируемого кинка" учитывалась возможность возбуждения примесной моды и ее резонансного взаимодействия с кинком. Для случая пространственно-протяженной примеси также исследовалось взаимодействие кинка с примесью как для не деформируемой, так и для деформируемой модели кинка [5, 9, 10].

Рассмотрим приближенное аналитическое решение уравнения (3) методом коллективных переменных [1, 2]. В качестве коллективных координат примем координату центра кинка $x(t)$ и амплитуду примесной моды $a(t)$. Анзац представляет собой сумму кинка (4) и примесной моды (5): $u_{\text{ansatz}} = u_0 + u_1$. Положим для простоты, что $\gamma = 1$, а $\dot{X}(t)$, $a(t)$ и $\dot{a}(t)$ достаточно малы (порядка ε). В рамках рассматриваемого приближения $u_1 \ll u_0$. Подставим далее анзац u_{ansatz} в лагранжиан (1), разложив $\cos u$ и $\cos u/2$ в ряд Тейлора до членов второго порядка по ε (по $a(t)$). Проинтегрировав, получим

$$L_{\text{eff}} \approx 4\dot{X}^2(t) - U(X) + \frac{1}{\varepsilon}\left[\dot{a}^2(t) - a^2(t)\,\Omega^2\right] + \\ + \varepsilon a(t)\,F(X) - -4h\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{th}\left[x - X(t)\right]\,dx, \quad (6)$$

$$U(X) = 8 - \frac{2\varepsilon}{\mathrm{ch}^2 X(t)}, \quad F(X) = 2\frac{\mathrm{sh}\,X(t)}{\mathrm{ch}^2 X(t)}. \quad (7)$$

Аналогично рассчитывается выражение для функции Рэлея (2):

$$R_{\text{eff}} \approx \alpha\left[4\dot{X}^2(t) + \frac{\dot{a}^2(t)}{\varepsilon}\right]. \quad (8)$$

Используя уравнения Лагранжа–Эйлера, с учетом (6)–(8) можно получить уравнения движения для коллективных координат в следующем виде:

$$\begin{cases} 8\ddot{X}(t) + U'(X) - \varepsilon a(t)F'(X) = -8[\dot{X}(t)\alpha - h], \\ \ddot{a}(t) + \Omega^2 a(t) - \frac{\varepsilon^2}{2}F(X) = -\dot{a}(t)\alpha. \end{cases} \quad (9)$$

Сравнив систему дифференциальных уравнений (9) с аналогичной системой [1], полученной для бездиссипативного случая, можно сделать вывод о том, что учет затухания и внешней силы (в рамках рассматриваемого приближения) привел к добавлению слагаемых $-8[\dot{X}(t)\alpha - h]$ в первом уравнении и $-\dot{a}(t)\alpha$ во втором. При этом влияние на примесную моду внешней силы в данном приближении не учитывается (как слагаемое второго порядка малости) и коэффициент h во втором уравнении системы отсутствует.

Проанализируем поведение кинка, подчиняющегося уравнениям (9). Типичное время моделирования $t_{\text{end}} = 500$. На рис. 1 приведена временная эволюция для нескольких случаев. Начальная энергия кинка E^0_{kink} и работа внешней силы E_{ex}, помимо затрат на возбуждение примесной моды E_{im}, тратятся еще и на затухание в системе E_α: $E^0_{\text{kink}} + E_{\text{ex}} = E_{\text{kink}} + E_{\text{im}} + E_\alpha$. Поэтому при движении по инерции ($h = 0$) кинк вообще не уходит на бесконечность, а через некоторое время останавливается в определенной точке. Это видно из рис. 1a (кривая *1*, построенная при слабом затухании $\alpha = 0.002$, и кривая *2*, построенная при более сильном затухании $\alpha = 0.02$).

Если же на систему действует внешняя сила $h > 0$ и диссипативные потери E_α компенсируются притоком энергии E_{ex}, то кинк может уйти на бесконечность ($+\infty$), если его энергии окажется достаточно для того, чтобы покинуть притягивающий потенциал примеси (см. рис. 1a, кривая *3*).

Полученные результаты показали, что для системы (9), как и для бездиссипативного случая, харак-

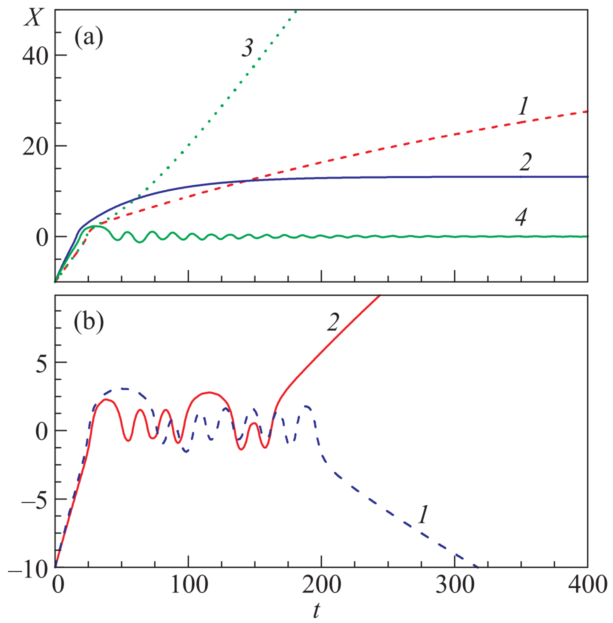

Рис. 1. Зависимости координаты центра кинка $X(t)$ от времени, полученные в результате моделирования системы (9). Параметры моделирования $\varepsilon = 0.7$, $X(0) = -10$, $a(0) = 0$, $\dot{a}(0) = 0$. (a) – $\alpha = 0.002$, $h = 0$, $\dot{X}(0) = 0.4$ (*1*); $\alpha = 0.02$, $h = 0$, $\dot{X}(0) = 0.7$ (*2*); $\alpha = 0.02$, $h = 0.008$, $\dot{X}(0) = 0.4$ (*3*); $\alpha = 0.02$, $h = 0$, $\dot{X}(0) = 0.6$ (*4*); (b) – $\alpha = 0.002$, $h = 0$, $\dot{X}(0) = 0.377$ (*1*); $\alpha = 0.002$, $h = 0$, $\dot{X}(0) = 0.3486$ (*2*)

терно резонансное взаимодействие кинка с примесной модой. В итоге кинк может даже после многократного пересечения примеси покинуть ее притягивающий потенциал. Однако данные варианты эволюции наблюдаются лишь при слабом затухании и при движении кинка по инерции. Например, на рис. 1b, построенном при $\alpha = 0.002$, кинк отражается в обратном направлении после четырнадцати (см. кривую *1*), а в прямом – после одиннадцати (см. кривую *2*) пересечений примеси. При более сильном затухании (например, $\alpha = 0.02$) подобных вариантов эволюции обнаружить не удалось. Кроме того, кинк может “захватываться” притягивающим потенциалом примеси. При этом амплитуда его трансляционных колебаний убывает достаточно быстро (см. рис. 1a, кривая *4*). Учет воздействия внешней силы h не приводит к появлению резонансных отражений кинка, а возникающие случаи “захвата” кинка слабо отличаются от случая, когда $h = 0$ (см. рис. 1a, кривая *4*).

Более полная картина кинк-примесных взаимодействий продемонстрирована на примере двух случаев: при слабом затухании $\alpha = 0.002$ и сильном затухании $\alpha = 0.02$ (остальные параметры моделирования: $h = 0$, $\varepsilon = 0.7$, $X(0) = -10$, $a(0) = 0$, $\dot{a}(0) = 0$). Соответствующие зависимости рассчитанных величин от начальной скорости кинка $v_0 = \dot{X}(0)$ представлены на рис. 2–4. При их построении параметр v_0 табулировался с шагом $\delta v = 10^{-4}$.

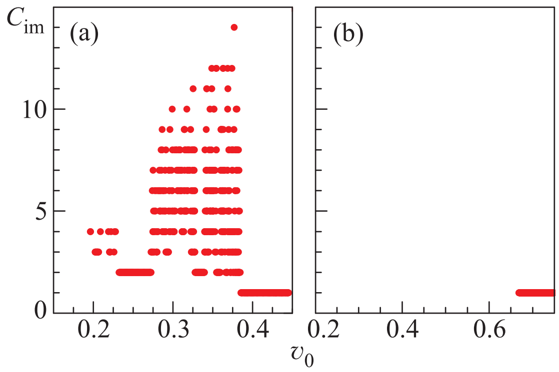

Рис. 2. Количество пересечений кинком примеси $C_{\rm im}$ в зависимости от начальной скорости кинка v_0 в модели (9). (a) – $\alpha = 0.002$. (b) – $\alpha = 0.02$

На рис. 2 приведено количество пересечений примеси $C_{\rm im}$ в зависимости от v_0. Однократное пересечение примеси $C_{\rm im} = 1$ (рис. 1a, кривые *1* и *2*) имеет место, лишь если v_0 превышает определенное пороговое значение. При $C_{\rm im} > 1$ четное значение $C_{\rm im}$ соответствует резонансному отражению в обратном направлении (рис. 1b, кривая *1*), а нечетное – в прямом (рис. 1b, кривая *2*). Случай, когда кинк остается локализованным на примеси, на рис. 2 отсутствует, поскольку он соответствует $C_{\rm im}(v_0) \to \infty$. Исследование показало, что появление слабого затухания (рис. 2a) в системе значительно сокращает число резонансных окон и, следовательно, величину $C_{\rm im}$. При сильном же затухании имеет место полное исчезновение резонансов (рис. 2b).

Необходимо отметить, что при изучении резонансных окон отражения теряют актуальность зависимости $v_{\rm end}(v_0)$ (см., например, [5, 6]), так как конечная скорость движения кинка при длительном моделировании равна либо нулю (в случае движения по инерции), либо стационарной скорости $v_{\rm st}(h)$ (в случае движения под воздействием внешней силы). Поэтому информативнее использовать зависимости конечного положения кинка $X_{\rm end} = X(t_{\rm end})$ от v_0 (см. рис. 3). Случаи $X_{\rm end} < 0$ соответствуют отражению кинка от примеси, $X_{\rm end} > 0$ – прохождению кинка через примесь, $X_{\rm end} = 0$ – “захвату” кинка на примеси. Исследование данных зависимостей (аналогично $C_{\rm im}(v_0)$) показало, что увеличение затухания приводит к уменьшению числа резонансных

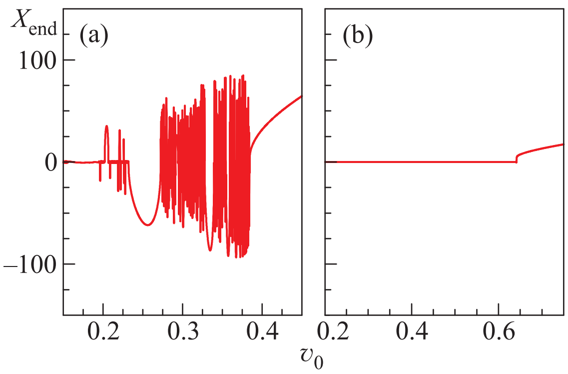

Рис. 3. Конечное положение кинка $X_{\text{end}} = X(t_{\text{end}})$ в зависимости от начальной скорости кинка v_0 в модели (9). (a) – $\alpha = 0.002$. (b) – $\alpha = 0.02$.

окон. При сильном же затухании (рис. 3b) резонансы исчезают полностью.

Более информативной величиной является амплитуда зависимости $X(t)$ в течение первого периода колебаний кинка T^1_{kink}. Рассмотрим максимум ($A^{\text{I}}_{\text{kink}}$ при $C_{\text{im}} \geqslant 2$) и минимум ($A^{\text{II}}_{\text{kink}}$ при $C_{\text{im}} \geqslant 3$) зависимости $X(t)$ в данном интервале (рис. 5). На рис. 4 представлены зависимости $A^{\text{I}}_{\text{kink}}(v_0)$ и

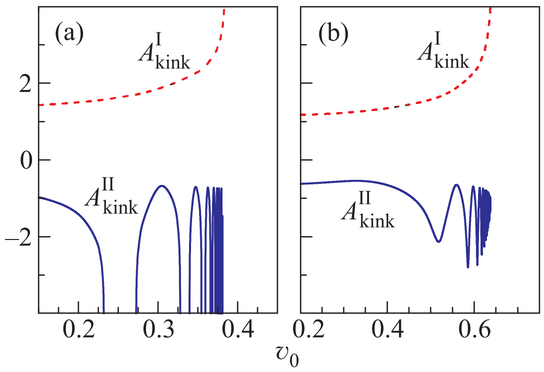

Рис. 4. Величины максимума ($A^{\text{I}}_{\text{kink}}$) и минимума ($A^{\text{II}}_{\text{kink}}$) трансляционных колебаний кинка в зависимости от начальной скорости кинка v_0 в модели (9). (a) – $\alpha = 0.002$. (b) – $\alpha = 0.02$

$A^{\text{II}}_{\text{kink}}(v_0)$. Видно, что $A^{\text{I}}_{\text{kink}}$ монотонно возрастает с увеличением v_0, в то время как $A^{\text{II}}_{\text{kink}}$ демонстрирует периодическую зависимость от v_0. Это объясняется тем, что $A^{\text{I}}_{\text{kink}}$ вычисляется после первого пересечения примеси, когда примесная мода не возбуждена, $a(t^*) = 0$, тогда как $A^{\text{II}}_{\text{kink}}$ – после второго пересечения кинком примеси. Уже при втором пересечении кинк взаимодействует с возбужденной примесной модой, $a(t^{**}) \neq 0$. Из зависимости $A^{\text{II}}_{\text{kink}}(v_0)$ видно, что широкие окна ($C_{\text{im}} = 2$) при слабом затухании (рис. 4a) превращаются в небольшие минимумы при сильном затухании (рис. 4b). Это говорит о том, что резонансное взаимодействие между кинком и примесной модой по-прежнему имеет место, однако потери в системе не оставляют кинку энергии, достаточной для того, чтобы покинуть притягивающий потенциал примеси.

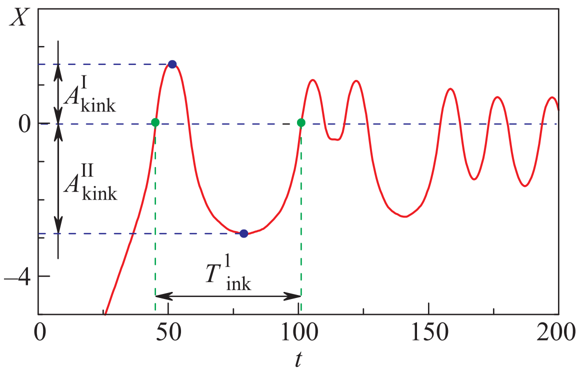

Рис. 5. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени, полученная в результате моделирования системы (9). Показано определение максимума ($A^{\text{I}}_{\text{kink}}$) и минимума ($A^{\text{II}}_{\text{kink}}$) трансляционных колебаний кинка; T^1_{kink} – первый период колебаний кинка в области примеси

Сравним далее результаты, полученные с помощью аналитической модели (9), с результатами прямых численных расчетов с помощью исходного уравнения (3). Для численного решения уравнения (3) воспользуемся методом конечных разностей. Нами была выбрана трехслойная явная схема решения с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа "крест" (см., например, [9, 10]). Используем две схемы проведения численного эксперимента (по аналогии с реальным физическим экспериментом, который можно провести, например, в реальной магнитной системе [11]). Первая схема эксперимента предполагает, что покоящийся в начальный момент времени кинк разгоняется до скорости, близкой к стационарной, а затем пересекает примесь. Вторая схема позволяет изучить только влияние затухания. В этом случае, после того, как кинк достигнет скорости, близкой к стационарной, внешняя сила выключается и дальнейшее движение кинка через область локализации примеси происходит по инерции. Поскольку все представленные далее расчеты проведены согласно описанным схемам эксперимента, где кинк вначале разгоняется до стационарной скорости внешней силой h, то под начальной скоростью кинка v_0 будет пониматься скорость стационарного движения кинка, характерная для заданных α и h: $v_0 = v_{\text{st}}(h, \alpha) = \dot{X}(t) = h/\alpha$.

На рис. 6 приведены зависимости $A^{\mathrm{II}}_{\mathrm{kink}}(v_0)$, при расчете которых параметр v_0 табулировался с шагом $\delta v = 3 \cdot 10^{-5}$. Для случаев движения кинка по инерции (рис. 6a и b) наблюдается ситуация, аналогичная рис. 4b. При этом даже слабое затухание ($\alpha = 0.002$ на рис. 6a) приводит к исчезновению резонансных окон отражения. Последнее можно объяснить тем, что по сравнению с (9) при численном счете существует еще один дополнительный канал затухания в виде излучения нелокализованных волн при взаимодействии кинка с примесью [9]. Это приводит к существенным потерям энергии кинка даже при незначительном затухании. Как показано в [9], данный канал затухания может быть сравним с обычным затуханием. При более сильном затухании ($\alpha = 0.02$ на рис. 6b) амплитуда трансляционных колебаний кинка заметно уменьшается. Включение постоянной внешней силы (см. рис. 6c) еще более ослабляет эффект резонансных взаимодействий, и амплитуда трансляционных колебаний кинка становится меньше, чем в случае на рис. 6b, поскольку внешняя сила препятствует движению кинка в обратном направлении (при колебаниях в области примеси).

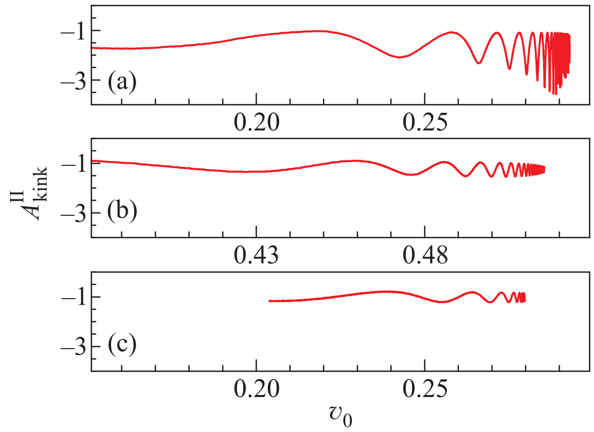

Рис. 6. Величина минимума трансляционных колебаний кинка $A^{\mathrm{II}}_{\mathrm{kink}}$ в зависимости от начальной (стационарной) скорости кинка v_0 в модели (3) в случае движения кинка по инерции (a, b) и под действием внешней силы h (c). (a) – $\alpha = 0.002$.(b, c) – $\alpha = 0.02$

В заключение отметим, что вышеописанным параметрам для возможного наблюдения резонансного взаимодействия кинков УСГ с локализованными волнами в реальных физических системах вполне удовлетворяют ферромагнетики и слабые ферромагнетики (обладающие слабым затуханием) [8, 11]. Создание определенных условий, например трехслойной структуры с центральным тонким слоем с магнитной анизотропией, меньшей (или другого типа), чем в толстых слоях, при пересечении доменной границей тонкого слоя, может привести к генерации локализованных магнитных неоднородностей бризерного типа [12] и резонансному взаимодействию между ними. Для обнаружения резонансных эффектов отражения и квазитуннелирования в реальных физических экспериментах можно применять метод измерения амплитуды трансляционных колебаний локализованного в области примеси кинка и использовать физические системы с достаточно слабым затуханием. Хотя в реальной системе невозможно реализовать точечную примесь, наличие в ней протяженной примеси возможно. Это тоже должно приводить к возможности наблюдения искомого эффекта.

---

1. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля–Конторовой: Концепции, методы, приложения*, Физматлит, М. (2008).
2. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of solitons*, Cambridge University Press, N.Y. (2010).
3. *The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics*, ed. by J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, and F. Williams, Springer (2014).
4. Т. И. Белова, А. Е. Кудрявцев, УФН **167**, 377 (1997).
5. B. Piette and W. J. Zakrzewski, J. Phys. A: Math. and Theor. **40**, 5995 (2007).
6. K. Javidan, Phys. Rev. E **78**, 046607 (2008).
7. C. J. K. Knight, G. Derks, A. Doelman, and H. Susanto, J. Diff. Eq. **254**, 408 (2013).
8. А. К. Звездин, Письма в ЖЭТФ **29**, 553 (1979).
9. А. М. Гумеров, Е. Г. Екомасов, Р. Р. Муртазин, В. Н. Назаров, ЖВММФ **55**, 631 (2015).
10. А. М. Гумеров, Е. Г. Екомасов, Ф. К. Закирьянов, Р. В. Кудрявцев, ЖВММФ **54**, 481 (2014).
11. М. В. Четкин, Ю. Н. Курбатова, Т. Б. Шапаева, О. А. Борщеговский, Письма в ЖЭТФ **85**, 232 (2007).
12. E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. R. Murtazin, R. V. Kudryavtsev, A. E. Ekomasov, and N. N. Abakumova, SoL. State Phenom. **233–234**, 51 (2015).