

# Сверхпроводимость и ферромагнетизм в модели Хаббарда

Р. О. Зайцев<sup>1)</sup>

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 10 августа 2015 г.

После переработки 24 августа 2015 г.

Изучаются фазовые переходы в модели Хаббарда при  $U \rightarrow \infty$ , относящиеся к нижней недозаполненной подзоне. Получены самосогласованные уравнения для определения сверхпроводящего и ферромагнитного параметров порядка, соответствующие однопетлевому приближению. Рассмотрены границы фазы, где могут сосуществовать ферромагнитные и сверхпроводящие явления.

DOI: 10.7868/S0370274X15200084

Ферромагнетизм в модели Хаббарда [1] при энергии  $U$ , значительно превышающей значения интеграла перескока (ниже  $t = 1$ ), был впервые рассмотрен в работе Нагаока [2]. В ней были исследованы свойства так называемого спин-поляризованного состояния с малым числом перевернутых спинов. В качестве основного состояния использовалось ферромагнитное состояние с максимально возможным спином. Однако оказалось (см., например, [3]) что состояние Нагаока является нестабильным при любом конечном отклонении от чисто половинного заполнения,  $|1 - n| \ll 1$ , где  $n$  – число электронов, отнесенное к числу элементарных ячеек. Дальнейшее численное исследование ферромагнетизма в модели Хаббарда обнаружило при  $U > 25$  наличие “островов” ферромагнитной фазы [4], которые проявляются, начиная с некоторой достаточно большой электронной концентрации.

Таким образом, представляется естественным в качестве исходного использовать простейшее парамагнитное решение Хаббарда [1] с учетом дополнительного так называемого кинематического взаимодействия<sup>2)</sup>, которое дало возможность обнаружить появление сверхпроводимости в этой модели [6].

В настоящей работе рассматривается простейший предельный случай, когда энергия Хаббарда является наибольшим энергетическим параметром. При этом учитывается наличие кинематического взаимодействия. В результате в рамках однопетлевого приближения удастся определить температурную и концентрационную зависимости температуры как сверхпроводящего, так и ферромагнитного упорядочения.

Предположим, что энергия Хаббарда является наибольшим энергетическим параметром ( $U = +\infty$ ). При этом достаточно произвести рассмотрение в нижней энергетической подзоне, где происходят переходы между пустыми,  $|0\rangle$ , и одночастичными,  $|\sigma\rangle$ , состояниями. В соответствии с этим будем использовать следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \sigma} \left( \hat{X}_{\mathbf{r}_1}^{\sigma, 0} \hat{X}_{\mathbf{r}_2}^{0, \sigma} \right) t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \mu \sum_{\mathbf{r}, \sigma} X_{\mathbf{r}}^{\sigma, \sigma}. \quad (1)$$

Здесь и ниже  $\mu$  – химический потенциал, а  $X^{\sigma, 0}$  и  $X^{0, \sigma}$  – одночастичные ферми-операторы.

Вычисление первой борновской амплитуды рассеяния с помощью гамильтониана (1) приводит к известному выражению для амплитуды кинематического взаимодействия [6, 7], которое продемонстрировано на рис. 1:

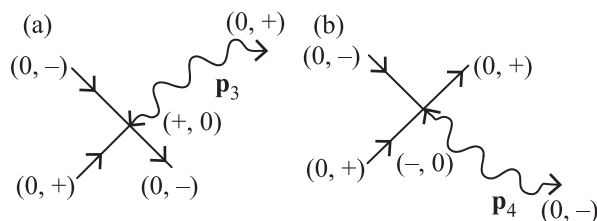


Рис. 1. Амплитуды кинематического рассеяния. Волнистые линии изображают компоненту Фурье  $t_{\mathbf{p}}$  от интеграла перескока

$$\Gamma_0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 || \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -t_{\mathbf{p}_3} - t_{\mathbf{p}_4}. \quad (2)$$

Здесь и ниже  $t_{\mathbf{p}}$  – компонента Фурье от интеграла перескока, входящего в определение гамильтониана (1).

Для нахождения температуры сверхпроводящего перехода необходимо рассмотреть условия возникновения аномальной собственно-энергетической части

<sup>1)</sup>e-mail: Zaitsev\_rogdai@mail.ru

<sup>2)</sup>Это название было заимствовано из дайсоновской теории рассеяния спиновых волн [5].

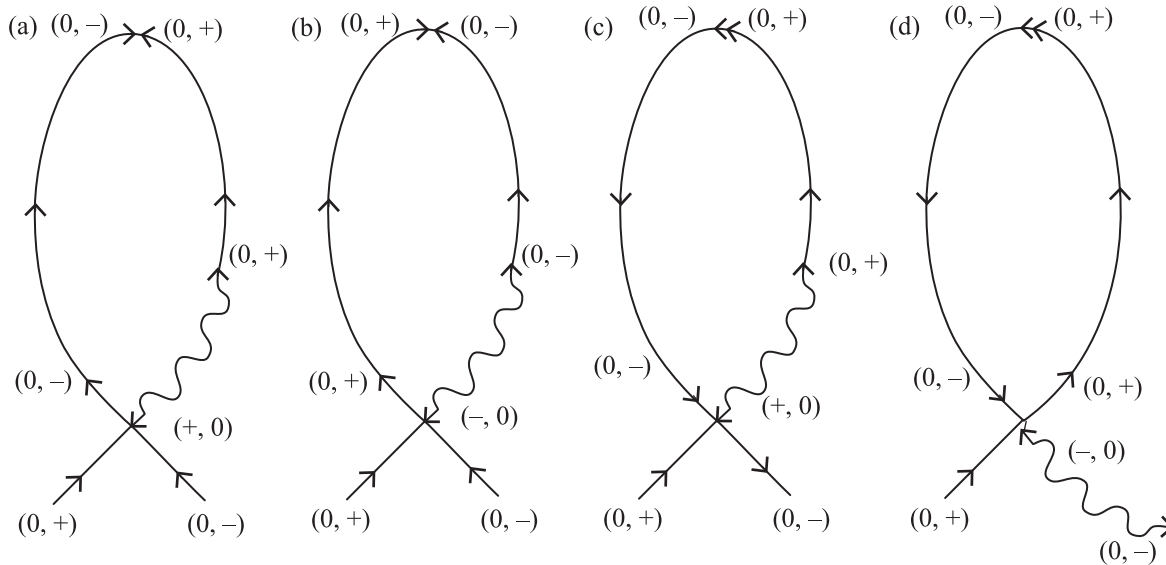


Рис. 2. Аномальные собственно-энергетические части, записанные в линейном приближении при  $U = +\infty$ . Сплошные линии изображают электронные гриновские функции

[8], соответствующей противоположному импульсу и противоположному знаку изменения проекции спина (см. рис. 2а и б).

Эти диаграммы изображают куперовские собственно-энергетические части, для которых получаем следующее уравнение:

$$\Sigma_s = 2T \sum_{\omega, \mathbf{p}} G_{i\omega}(\mathbf{p}) G_{-i\omega}(-\mathbf{p}) t_{\mathbf{p}} \Sigma_s. \quad (3)$$

Здесь  $G_{i\omega}(\mathbf{p}) = 1/(i\omega - \xi_{\mathbf{p}})$  – одночастичная электронная функция Грина.

В результате получаем явное условие для нахождения температуры сверхпроводящего перехода:

$$1 = 2T \sum_{\omega, \mathbf{p}} \frac{t_{\mathbf{p}}}{(i\omega - \xi_{\mathbf{p}})(-i\omega - \xi_{-\mathbf{p}})} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{t_{\mathbf{p}}}{\xi_{\mathbf{p}}} \text{th} \left( \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{2T} \right). \quad (4)$$

Здесь и ниже  $\xi_{\mathbf{p}} = ft_{\mathbf{p}} - \mu$ ,  $\omega_n = \pi T(2n+1)$ ,  $t_{\mathbf{p}} = t_{-\mathbf{p}}$ ,  $f = 1 - n/2$ .

Подстановка этих выражений в уравнение (4) показывает, что оно имеет решение для всех положительных значений химического потенциала  $\mu$ .

Для нахождения зависимости между химическим потенциалом  $\mu$  и числом электронов  $n$  на одну ячейку используем уравнение состояния, справедливое выше точки перехода:

$$n = 2f \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{F}}(\xi_{\mathbf{p}}). \quad (5)$$

Полагая в этом уравнении  $\mu = 0$  и переходя к пределу  $T \rightarrow 0$ , получаем уравнение для нахождения критического значения  $n_c$ :

$$n_c = (2 - n_c) \sum_{\mathbf{p}} \theta(t_{\mathbf{p}}). \quad (6)$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением кристаллических решеток с четной плотностью состояний, для которых выполняется условие

$$\sum_{\mathbf{p}} \theta(t_{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p}} \theta(-t_{\mathbf{p}}), \quad \text{или} \quad \sum_{\mathbf{p}} \theta(t_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

В результате находим конечную область существования сверхпроводящего состояния:  $n > n_c = 2/3$  [6, 7].

Для изучения возможности магнитного упорядочения достаточно рассмотреть диаграммы с нулевым передаваемым импульсом и с переворотом электронного спина [9, 10], которые изображены на рис. 2с и д. Они позволяют найти условие возникновения двучленной собственно-энергетической части:

$$\Sigma_m(\mathbf{p}) = C + Dt_{\mathbf{p}}. \quad (8)$$

При этом коэффициенты  $C$  и  $D$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$C = -T \sum_{\omega, \mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} G_{\omega}^{0+}(\mathbf{p}) G_{\omega}^{0-}(\mathbf{p}) [C + Dt_{\mathbf{p}}], \quad (9a)$$

$$D = -T \sum_{\omega, \mathbf{p}} G_{\omega}^{0+}(\mathbf{p}) G_{\omega}^{0-}(\mathbf{p}) [C + Dt_{\mathbf{p}}]. \quad (9b)$$

Условие разрешимости этой системы имеет вид

$$1 = 2W_1 + W_2 W_0 - W_1^2, \quad (10a)$$

где 
$$W_k = -T \sum_{\omega, \mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k G_{\omega}^{0+}(\mathbf{p}) G_{\omega}^{0-}(\mathbf{p}). \quad (10b)$$

Формула (10b) упрощается в пределе нулевого внешнего поля, когда

$$G_{\omega}^{0\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega - \xi_{\mathbf{p}}}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} W_k &= -T \sum_{\omega, \mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k \frac{1}{(i\omega - \xi_{\mathbf{p}})^2} = \\ &= - \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \left[ T \sum_{\omega_n} \frac{\exp(i\delta\omega_n)}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})} \right] = \\ &= - \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} n_{\mathbf{F}}(\xi_{\mathbf{p}}), \end{aligned} \quad (10c)$$

где  $\delta$  – бесконечно малая положительная добавка,  $n_{\mathbf{F}}(\xi_{\mathbf{p}})$  – распределение Ферми.

В предельном случае  $T = 0$ , когда  $n_{\mathbf{F}}(\xi_{\mathbf{p}}) = \theta(-\xi_{\mathbf{p}})$ , правая часть уравнения (10c) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} W_k &= - \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \theta(-\xi_{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}^k \delta(ft_{\mathbf{p}} - \mu) = \\ &= \frac{1}{f} \left( \frac{\mu}{f} \right)^k \rho_0 \left( \frac{\mu}{f} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\rho_0(\epsilon) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\epsilon - t_{\mathbf{p}})$  – затравочная одночастичная плотность состояний.

При этом уравнение состояния (6) и условие фазового перехода (10a) записываются через общий параметр  $s = \mu/f$ :

$$\begin{aligned} n &= (2 - n) \int \theta(\mu - f\epsilon) \rho_0(\epsilon) d\epsilon = \\ &= (2 - n) \int_{\epsilon_{\min}}^s \rho_0(\epsilon) d\epsilon, \quad 2 - n = 4s\rho_0(s). \end{aligned} \quad (12)$$

При заданной форме затравочной плотности состояний система уравнений (12) определяет критическое значение электронной концентрации, начиная с которой возникает ферромагнитное упорядочение. Так, для простейшей модели плоской зоны<sup>3)</sup>

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \theta(1 - \epsilon^2), \quad n_{cF} = 5 - \sqrt{17} \approx 0.8768. \quad (13a)$$

Для квадратной решетки плотность состояний выражается через полный эллиптический интеграл первого рода  $K(k)$ :

$$\rho_0 = \frac{2}{\pi^2} K \left( \sqrt{1 - \epsilon^2} \right) =$$

<sup>3)</sup> Численные исследования [4] ферромагнетизма в модели Хаббарда обнаружили при  $U > 25$  наличие ферромагнитной фазы, которая проявляется, начиная с концентрации  $n_{cF} \approx 0.85$ .

$$= \frac{4}{\pi^2(1 + |\epsilon|)} K \left( \frac{1 - |\epsilon|}{1 + |\epsilon|} \right), \quad n_{cF} \approx 0.945. \quad (13b)$$

В случае полуэллиптической плотности состояний:

$$\rho_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (13c)$$

имеем две точки перехода,  $n_{cF1} = 0.8927$  и  $n_{cF2} = 0.9901$ , между которыми существует ферромагнетизм.

Таким образом, имеется область,  $2/3 < n < n_{cF}$  внутри которой может существовать только сверхпроводящая фаза. В более узкой области,  $n_{cF} < n < 1$ , где могли бы сосуществовать обе фазы, необходимо учитывать нелинейные эффекты (см. ниже).

Общие соотношения (6)–(10) применимы и для конечной температуры. Используя при этом затравочную плотность состояний  $\rho_0(\epsilon)$ , получим

$$W_k = \int \frac{\epsilon^k}{4T \operatorname{ch}^2(\xi_{\epsilon}/2T)} \rho_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (14)$$

$$n = 2f \int n_{\mathbf{F}}(\xi_{\epsilon}/T) \rho_0(\epsilon) d\epsilon,$$

где  $\xi_{\epsilon} = f\epsilon - \mu$ ,  $f = 1 - n/2$ .

Вместе с общей формулой (10a) эти соотношения позволяют получить концентрационную зависимость температуры ферромагнитного перехода  $T_m(n)$  (см. рис. 3, кривая  $BA\alpha C$ ).

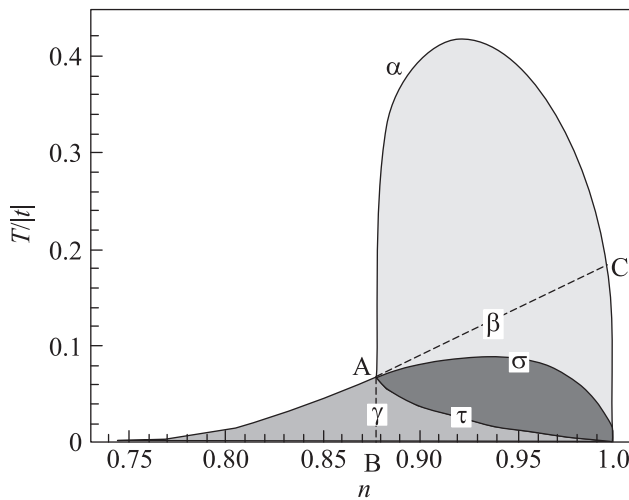


Рис. 3. Зависимости  $T_c(n)$  и  $T_m(n)$ , рассчитанные для модели плоской зоны (13a)

Как следует из рисунка, возникает область  $A\sigma 1\tau A$ , внутри которой имеется область сосуществования сверхпроводящей и магнитной фаз. При этом части границы ферромагнитной фазы  $B\gamma A$  уже не существует, поскольку эта часть кривой

расположена внутри сверхпроводящей фазы. Точно так же не может существовать граница сверхпроводящей фазы АβС, поскольку она находится внутри магнитной фазы.

Чтобы рассмотреть взаимное влияние сверхпроводящих и магнитных явлений, получим общие само согласованные уравнения. Для этого запишем обобщенную обратную функцию Грина:

$$\hat{G}_\omega^{-1}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0+ & i\omega - \xi_{\mathbf{p}} - h & -\Sigma^{0+, -0}(\mathbf{p}) \\ 0- & -\Sigma^{0-, +0}(\mathbf{p}) & i\omega - \xi_{\mathbf{p}} + h \\ -0 & -\Sigma^{-0, +0} & 0 \\ +0 & 0 & -\Sigma^{+0, -0} \\ -\Sigma^{0+, 0-} & 0 & \\ 0 & -\Sigma^{0-, 0+} & \\ i\omega + \xi_{\mathbf{p}} - h & -\Sigma^{-0, 0+}(\mathbf{p}) & \\ -\Sigma^{+0, 0-}(\mathbf{p}) & i\omega + \xi_{\mathbf{p}} + h & \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $h$  – величина внешнего магнитного поля, а нумерация столбцов соответствует сопряженным переходам:  $+0, -0, 0-, 0+$ .

При нулевом внешнем магнитном поле существуют следующие простейшие соотношения между аномальными собственно-энергетическими частями. Для магнитных собственно-энергетических частей:

$$\begin{aligned} \Sigma^{0-, +0}(\mathbf{p}) &= \Sigma^{0+, -0}(\mathbf{p}) = \\ &= -\Sigma^{-0, 0+}(\mathbf{p}) = -\Sigma^{+0, 0-}(\mathbf{p}) = \Sigma_m(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Для сверхпроводящих собственно-энергетических частей:

$$\Sigma^{0-, 0+} = -\Sigma^{0+, 0-} = \Sigma^{+0, -0} = -\Sigma^{-0, +0} = \Sigma_s. \quad (16)$$

В результате матрица (15) переписывается следующим образом:

$$\hat{G}_\omega^{-1}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0+ & i\omega - \xi_{\mathbf{p}} & -\Sigma_m(\mathbf{p}) & \Sigma_s & 0 \\ 0- & -\Sigma_m(\mathbf{p}) & i\omega - \xi_{\mathbf{p}} & 0 & -\Sigma_s \\ -0 & \Sigma_s & 0 & i\omega + \xi_{\mathbf{p}} & \Sigma_m(\mathbf{p}) \\ +0 & 0 & -\Sigma_s & \Sigma_m(\mathbf{p}) & i\omega + \xi_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Два независимых уравнения для  $\Sigma_s$  и  $\Sigma_m$  могут быть записаны с помощью рис. 4:

$$\Sigma_s = \Sigma^{0-, 0+} = 2T \sum_{\omega, \mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} G_\omega^{0-, 0+}(\mathbf{p}), \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\mathbf{p}) &= \Sigma^{0+, -0}(\mathbf{p}) = \\ &= T \sum_{\omega, \mathbf{p}_1} t_{\mathbf{p}_1} G_\omega^{0+, -0}(\mathbf{p}_1) + T \sum_{\omega, \mathbf{p}_1} G_\omega^{0+, -0}(\mathbf{p}_1) t_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (18b)$$

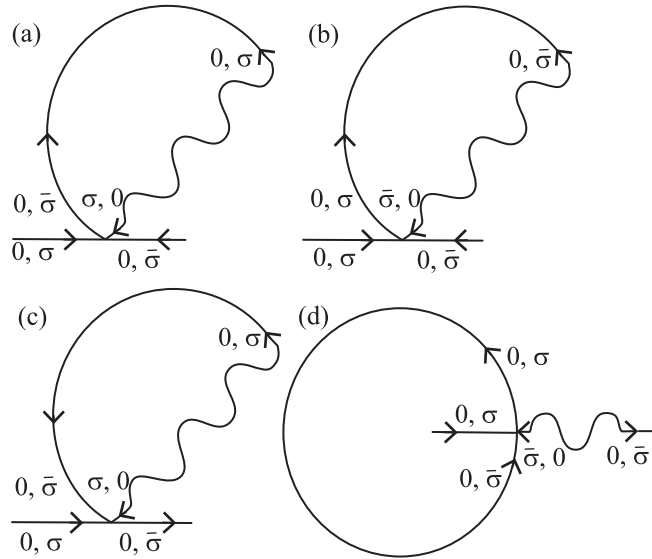


Рис. 4. Аномальные собственно-энергетические части при  $U = +\infty$

Непосредственное вычисление матричных элементов в правой части (18a) приводит к первому уравнению:

$$1 = T \sum_{\omega, \mathbf{p}} \left\{ \frac{2t_{\mathbf{p}}}{[(\omega_n + i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \times \frac{[\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2 - \Sigma_m^2(\mathbf{p})]}{[(\omega_n - i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \right\}, \quad (19a)$$

Из определения (18b) следует, что ферромагнитная собственно-энергетическая часть  $\Sigma_m(\mathbf{p}) = C_m + D_m t_{\mathbf{p}}$ . Отсюда с помощью соответствующих матричных элементов из (18b) и (17), находим два других уравнения:

$$\begin{aligned} C_m &= T \sum_{\omega, \mathbf{p}} \left\{ \frac{t_{\mathbf{p}}(C_m + D_m t_{\mathbf{p}})}{[(\omega_n + i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{[(\omega_n - i\xi_{\mathbf{p}})^2 - \Sigma_s^2 + \Sigma_m^2(\mathbf{p})]}{[(\omega_n - i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \right\}. \quad (19b) \\ D_m &= T \sum_{\omega, \mathbf{p}} \left\{ \frac{(C_m + D_m t_{\mathbf{p}})}{[(\omega_n + i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{[(\omega_n - i\xi_{\mathbf{p}})^2 - \Sigma_s^2 + \Sigma_m^2(\mathbf{p})]}{[(\omega_n - i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2]} \right\}. \quad (19c) \end{aligned}$$

После суммирования по частотам  $\omega_n = \pi T(2n + 1)$  эти уравнения преобразуются к следующему виду:

$$1 = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{t_{\mathbf{p}}}{4R(\mathbf{p})} \times \right.$$

$$\times \left[ \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) + \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) + \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) - \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) \right] \Bigg\}, \quad (20a)$$

$$C_m = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ t_{\mathbf{p}} \times \left[ \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) + \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) - \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) \right] \right\}, \quad (20b)$$

$$D_m = \frac{1}{4} \times \sum_{\mathbf{p}} \left[ \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) + \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{R(\mathbf{p}) - \Sigma_m(\mathbf{p})}{2T} \right) \right], \quad (20c)$$

где  $R(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Sigma_s^2}$ ,  $\Sigma_m(\mathbf{p}) = C_m + D_m t_{\mathbf{p}}$ .

Полученные уравнения решают задачу о сосуществовании сверхпроводящей и ферромагнитной фаз.

Снова вернемся к условию возникновения ферромагнитной фазы в области низких температур.

Как видно из рис. 3, точка возникновения ферромагнитной фазы (точка В) соответствует такой электронной концентрации, для которой сверхпроводящий параметр порядка  $\Sigma_s$  остается конечным. По этой причине условия возникновения ферромагнитной фазы могут быть записаны с помощью линеаризации уравнений (20b) и (20c) по малым  $C_m$  и  $D_m$ :

$$C_m = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} [C_m + D_m t(\mathbf{p})] \operatorname{th}' \left[ \frac{R(\mathbf{p})}{2T} \right],$$

$$D_m = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} [C_m + D_m t(\mathbf{p})] \operatorname{th}' \left[ \frac{R(\mathbf{p})}{2T} \right], \quad (21)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $R(\mathbf{p})$ .

Все суммы по  $\mathbf{p}$ , входящие в правую часть (21), зависят от квазиимпульса через  $t_{\mathbf{p}}$ . Поэтому удобно ввести затравочную плотность состояний  $\rho_0(\epsilon)$ . Кроме того, используем разложение  $\operatorname{th}[E/(2T)] \approx 1 - 2 \exp(-E/T)$ . В результате получим

$$C_m = \frac{1}{T} \int \epsilon (C_m + D_m \epsilon) \exp(-R_{\epsilon}/T) \rho_0(\epsilon) d\epsilon,$$

$$D_m = \frac{1}{T} \int (C_m + D_m \epsilon) \exp(-R_{\epsilon}/T) \rho_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (22)$$

где  $R(\epsilon) = \sqrt{\xi_{\epsilon}^2 + \Sigma_s^2}$ ,  $\xi_{\epsilon} = f\epsilon - \mu$ , а величина  $\Sigma_s$  вычисляется при  $T = 0$ .

Далее мы переходим к интегрированию по переменной  $\xi$ , полагаем приближенно  $\epsilon = \mu/f = s$ , а затем складываем первое уравнение со вторым, предварительно умноженное на  $s$ . В результате получим условие разрешимости для величины  $C_m + D_m s$ :

$$1 = \frac{g(s)}{T} \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{\sqrt{\xi^2 + \Sigma_s^2}}{T} \right) d\xi \approx$$

$$\approx g(s) \sqrt{\frac{\Sigma_s}{2T}} \exp \left( -\frac{\Sigma_s}{T} \right), \quad (23)$$

где  $g(s) = 2s\rho_0(s)/f$  – эффективная константа БКШ (Бардина, Купера, Шриффера).

Поскольку правая часть уравнения (23) имеет экспоненциальную малость, то можно утверждать, что в пределе  $T \rightarrow 0$  ферромагнитная фаза отсутствует для всей области электронной концентрации.

Таким образом, температурная граница возникновения ферромагнитной фазы, которая проходит внутри сверхпроводящей фазы, с понижением температуры и с повышением электронной концентрации в конечном счете при  $n \rightarrow 1$  обращается в нуль (см. кривую А $\tau$ 1 на рис. 3).

Рассмотрим далее температурную область, где происходит исчезновение сверхпроводящей фазы (в окрестности кривой А $\beta$ С на рис. 3).

Для того чтобы получить условия исчезновения сверхпроводимости под влиянием ферромагнитного упорядочения, запишем уравнение (19a), положив в нем  $\Sigma_s = 0$ . Затем разложим правую часть на простые дроби:

$$1 = T \sum_{\omega > 0, \mathbf{p}} \left\{ t_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1}{(\omega + i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2} + \frac{1}{(\omega - i\Sigma_m(\mathbf{p}))^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2} \right] \right\}. \quad (24)$$

Далее мы используем интегрирование с помощью плотности состояний и переходим к интегрированию по переменной  $\xi$ . В результате получим уравнение для определения температуры сверхпроводящего перехода:

$$\frac{1}{g(s)} = 2T \sum_{\omega > 0} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{(\omega + i\Sigma_m(s))^2 + \xi^2} + \frac{1}{(\omega - i\Sigma_m(s))^2 + \xi^2} \right] d\xi \right\} =$$

$$= \pi T \sum_{\omega > 0} \left[ \frac{1}{\omega + i\Sigma_m(s)} + \frac{1}{\omega - i\Sigma_m(s)} \right], \quad (25)$$

где  $g(s) = s\rho_0(s)/f$ ,  $s = \mu/f$ .

Из полученной суммы необходимо выделить формально расходящуюся часть, взятую при  $\Sigma_m(s) = 0$ , которую следует ограничить максимальным значением  $n = \bar{\epsilon}/(2\pi T)$ . В результате оставшаяся сумма оказывается сходящейся:

$$\frac{1}{g(s)} = \ln \left( \frac{\bar{\epsilon}}{2\pi T} \right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n + 1/2 + i\Sigma_m(s)/(2\pi T)} - \frac{1}{n + 1/2} \right]. \quad (26)$$

Это соотношение может быть преобразовано к следующему виду:

$$\ln \left( \frac{T_{c0}}{T} \right) = -\psi \left( \frac{1}{2} \right) + \operatorname{Re} \psi \left( \frac{1}{2} + i \frac{\Sigma_m(s)}{2\pi T} \right), \quad (27)$$

где  $T_{c0}$  – температура сверхпроводящего перехода при  $\Sigma_m(s) = 0$ ,  $\psi(x)$  – логарифмическая производная от  $\Gamma$ -функции,  $\psi(1/2) = -\ln(4\gamma)$ ,  $\ln(\gamma) = C$  – постоянная Эйлера.

Для нахождения температуры, при которой исчезает сверхпроводимость, достаточно использовать приближенную формулу  $\psi(x) \approx \ln(x)$ , справедливую при  $x \gg 1$ . Подставляя это асимптотическое разложение в (27), находим, что в пределе  $T \rightarrow 0$  и при условии<sup>4)</sup>

$$\Sigma_m(s) \approx T_{c0} \frac{\pi}{2\gamma} \approx 0.882T_{c0} \quad (28)$$

происходит полное исчезновение сверхпроводящего параметра порядка.

Таким образом, температурная граница исчезновения сверхпроводящей фазы, которая приходит внутри ферромагнитной фазы, с повышением электронной концентрации в конечном счете обращается в нуль (см. кривую  $A\sigma_1$  на рис. 3).

Общий результат исследования уравнений (20а)–(20с) состоит в том, что при  $T = 0$  в нашей модели может существовать только сверхпроводящее спаривание. Магнитные решения существуют при конечной температуре в узком интервале электрон-

ных концентраций. Наиболее интересным результатом настоящей работы является обнаружение конечных температурной и концентрационной областей сосуществования ферромагнитной и сверхпроводящей фаз. При этом имеются две критические точки: четырехкритическая находится в точке пересечения магнитной и сверхпроводящей фазовых кривых (точка А на рис. 3) и трикритическая, которая находится при  $T = 0$  и  $n = 1$  и представляет собой нижний конец сигарообразной области сосуществования ( $A\sigma_1\tau A$ ), изображенной на рис. 3.

1. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. London A **276**, 238 (1963).
2. Y. Nagaoka, Phys. Rev. **147**, 392 (1966).
3. T. Hanisch and E. Müller-Hartmann, Ann. Phys. **2**, 381 (1993).
4. R. Zitzler, Th. Pruschke, and R. Bulla, Eur. Phys. J. B **27**, 473 (2002).
5. F. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
6. R. O. Zaitsev, Phys. Lett. A **134**, 199 (1988).
7. Р. О. Зайцев, *Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма*, УРСС, М. (2004); R. O. Zaitsev, *Diagrammatic Methods in the Theory Superconductivity and Ferromagnetism*, URSS, М. (2007).
8. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735 (1958).
9. В. П. Силин, ЖЭТФ **27**, 269 (1954).
10. П. С. Кондратенко, ЖЭТФ **46**, 1438 (1964).
11. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
12. Л. П. Горьков, А. И. Русинов, ЖЭТФ **46**, 1363 (1964).
13. P. Fulde and K. Maki, Phys. Rev. **141**, 275 (1966).

<sup>4)</sup>Это соотношение было получено в теории сверхпроводников с парамагнитными примесями [11–13].