Письма в ЖЭТФ, том 102, вып. 9, с. 705 – 708

Обратная спектральная задача для дельтообразных потенциалов

А. Б. Шабат[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 сентября 2015 г.

Рассматривается задача рассеяния для линейного уравнения Шредингера на всей оси. Указаны условия, при которых для построения потенциала достаточно знания дискретного спектра оператора Шредингера. Основным отличием от солитонного сектора является автомодельность рассматриваемой задачи относительно растяжений спектрального параметра λ. Это позволяет свести обратную задачу рассеяния к исследованию особенности функции Грина при $\lambda = 0$.

DOI: 10.7868/S0370274X15210109

Задача рассеяния для дельтообразных потенциалов имеет многочисленные физические приложения (см., например, недавнюю работу [1]). С математической точки зрения дельтообразные потенциалы предоставляют интересные возможности исчерпывающего исследования свойств точно решаемых примеров в теории рассеяния на финитных потенциалах [2, 3] и приводят к довольно неожиданной схеме приближенного решения обратной задачи рассеяния.

Для уравнения Шредингера с потенциалом $q(x)$ в виде конечной суммы δ-функций:

$$\psi_{xx} = [k^2 + q(x)]\psi, \quad q(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \delta(x - x_j), \tag{1}$$

функция Грина $G(x, y; k)$ связана с функциями Йоста $\psi^{\pm}(x, k)$:

$$\psi^{+}(x, k) = e^{kx},\ x \ll 0; \quad \psi^{-}(x, k) = e^{-kx},\ x \gg 0, \tag{2}$$

классической формулой:

$$G(x, x; k) = \frac{1}{\langle \psi^{+}, \psi^{-} \rangle} \psi^{+}(x, k)\psi^{-}(x, k),\ \operatorname{Re} k \geq 0, \tag{3}$$

где угловые скобки в знаменателе обозначают вронскиан:

$$W(k) = \langle \psi^{+}, \psi^{-} \rangle = \psi^{+}\psi^{-}_{x} - \psi^{+}_{x}\psi^{-}. \tag{4}$$

Мы исследуем взаимосвязь полюсов функции Грина с параметрами потенциала.

1. Задача рассеяния. Более или менее ясно, что дифференциальное уравнение (1) решается в явном виде. Непосредственным дифференцированием можно проверить, что при $N = 3$ и $k = 0$ его решение записывается в виде

$$\begin{gathered} \psi^{+}(x, 0) = 1 + \gamma_1 X_1(x) + \gamma_2 X_2(x)(1 + \gamma_1 x_{21}) + \\ + \gamma_3 X_3(x)(1 + \gamma_1 x_{31} + \gamma_2 x_{32} + \gamma_2\gamma_1 x_{32} x_{21}), \\ X_j(x) = (x - x_j)\theta(x - x_j),\ x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} x_i - x_j, \\ x_1 < x_2 < x_3, \end{gathered} \tag{5}$$

где ступенчатая функция $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$. В общем случае вещественная ось разбивается узлами x_j, $j \in [N] \stackrel{\text{def}}{=} \{j = 1, 2, \ldots, N\}$, на $N + 1$ промежутков:

$$\begin{gathered} x_1 < x_2 < \cdots < x_N, \quad I_j = [x_j, x_{j+1}], \\ I_0 = (-\infty, x_1], \quad I_N = [x_N, \infty), \end{gathered} \tag{6}$$

на которых непрерывная на всей оси функция Йоста $\psi^{+}(x, 0)$ является линейной. В частности,

$$\psi^{+}(x, 0) = \\ = \begin{cases} 1, & x \leq x_1, \\ \psi^{+}(x_N, 0) + \tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)(x - x_N), & x \geq x_N, \end{cases} \tag{7}$$

где τ – многочлен степени N от переменных параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, явная формула для которого устанавливается ниже.

Как было указано в работе [4], по "любой" априори заданной ломаной

$$\mathbf{\Gamma} = \{(x, y):\ y = g_j \cdot (x - x_j) + \psi_j, \quad x \in I_j\} \subset \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

являющейся графиком непрерывной кусочно-линейной функции, можно построить потенциал

$$q_{\Gamma}(x) = \sum \gamma_j \delta(x - x_j), \tag{9}$$

для которого график предельной при $k \to 0$ функции Йоста $\psi^{+}(x, 0)$ совпадает с $\mathbf{\Gamma}$:

$$\psi^{+}(x, 0) = g_n \cdot (x - x_n) + \psi_n,\ x \in I_n,\ \psi_n = \psi^{+}(x_n, 0).$$

[1)]e-mail: shabatab@mail.ru

При этом, как было установлено в цитированной работе, формулы

$$g_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j + \sum_{i<j} \gamma_i\gamma_j x_{ji} + \\ + \sum_{i<j<l} \gamma_i\gamma_j\gamma_l x_{ji}x_{lj} + \ldots, \ n \in [N],$$

$$g_1 = \gamma_1, \ g_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + x_{21}\gamma_1\gamma_2, \ldots; \ x_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} x_i - x_j, \tag{10}$$

задают семейство отображений параметров потенциала γ_j, $j \in [N]$, в углы наклона g_n, $n \in [N]$, ломаной:

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_n), \ n \in [N]. \tag{11}$$

Эти формулы для углов наклона g_n позволяют последовательно, начиная с $\gamma_1 = g_1$, вычислять параметры потенциала (9), соответствующего заданной ломаной (8). Другими словами, обратная задача при $k = 0$ сводится к исследованию свойств отображений (11), заданных "квазисимметрическими" многочленами g_n из формулы (10). Коэффициент τ из формулы (7) является таким образом многочленом $\tau = g_N$ и производящей функцией семейства отображений (11).

Рассмотрим теперь более сложную взаимосвязь параметров γ_j дельтообразного потенциала (1) с полюсами функции Грина (3), расположенными в замыкании правой полуплоскости $\mathrm{Re}k \geq 0$. Формула (7) для $\psi^+(x,0)$ при $k \neq 0$ заменяется следующей формулой с экспонентами $e^{\pm kx}$:

$$\psi^+(x,k) = \begin{cases} e^{kx}, \ x \leq x_1, \\ \psi^+(x,k) = a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, \ x \geq x_N. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогично из формулы (3) определяется вторая функция Йоста, $\psi^-(x,k)$, равная e^{-kx} при $x \in I_N$ и убывающая, $x \to \infty$, при $\mathrm{Re}\,k > 0$ на противоположной бесконечности. Вычисление вронскиана при $x \in I_N$ дает

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \langle a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, e^{-kx} \rangle = -2ka(k). \tag{13}$$

Известно, что функции Йоста являются целыми функциями по спектральному параметру k (равномерно по x на компактах). Поэтому вронскиан $2ka(k)$ тоже является целой функцией. При этом (см. [4]) справедливо важное уравнение:

$$\lim_{k\to 0} 2ka(k) = \tau(\boldsymbol{\gamma}), \tag{14}$$

где $\tau(\boldsymbol{\gamma})$ – угол наклона ломаной (8) из формулы (7), а дискретный спектр рассматриваемого оператора Шредингера определяется уравнениями (явный вид целой функции $2ka(k)$ будет указан ниже)

$$\lambda_s = -k_s^2, \ \mathrm{Re}\,k_s > 0, \ a(k_s) = 0. \tag{15}$$

В силу (12) соответствующие функции Йоста $\psi^+(x,k_s) \to 0$, $x \to \pm\infty$. При $\tau(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ мы добавляем к спектру (15) точку $k_0 = 0$. В случае вещественного потенциала $q(x)$ нули $a(k)$, $\mathrm{Re}\,k > 0$, располагаются на вещественной оси, а на вертикальной оси выполняется условие

$$a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k) = 1 + |b(k)|^2 > 0, \\ k = i\xi, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Переходя к исследованию связи собственных значений (15) с параметрами γ_j потенциала (1), мы формулируем следующее дополнительное условие: (i) ломаная $\mathbf{\Gamma}$ из формулы (8) с N узлами является вещественной и имеет *максимально возможное при данном N число пересечений с осью x*.

Ясно, что кусочно-линейная функция $\psi^+(x,0)$ не может иметь более одного нуля на каждом из интервалов I_n. Поэтому в случае N узлов максимальное число пересечений ломаной $\mathbf{\Gamma}$ с осью x совпадает с числом N. С другой стороны, в вещественном случае общее число собственных значений (15), как известно (см., например, [5]), совпадает с числом перемен знака функции $\psi^+(x,0)$ и, следовательно, равно числу узлов ломаной $\mathbf{\Gamma}$ при выполнении условия (i). Таким образом, условие (i) уравнивает число неизвестных γ_j, $j \in [N]$, с числом уравнений $a(k_s) = 0$ (см. (15)) в обратной спектральной задаче. В этой задаче (ISP) требуется построить потенциал с заданными собственными значениями и длинами интервалов $l_n \stackrel{\text{def}}{=} |I_n|$, $n \in [N-1]$. Другой вариант условия (i) заключается в добавлении к спектру из $N-1$ положительных собственных значений точки $k_0 = 0$ и замене одного из уравнений (15) уравнением $\tau(\boldsymbol{\gamma}) = 0$:

$$\tau(\boldsymbol{\gamma}) = g_N(\gamma_1, \ldots, \gamma_N) = 0, \\ a(k_s) = 0, \ k_s > 0, \ s \in [N-1]. \tag{16}$$

Здесь явный вид квазисимметрического многочлена $g_N(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ определяется формулой (10). Соответствующая ломаная $\mathbf{\Gamma}$ с узлами x_j, $j \in [N]$, в таком случае должна иметь горизонтальные асимптоты и $N-1$ пересечений с осью x. Условие $\tau(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ позволяет при этом исключить одну из неизвестных γ_j в системе из $N-1$ уравнений (15).

Явную форму уравнений $a(k) = 0$ для нулей вронскиана (13) можно получить при помощи замены

$$x_j - x_i \leftrightarrow R_{ij}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - e^{2k(x_i - x_j)}}{2k}, \ x_j > x_i, \tag{17}$$

в коэффициентах многочленов из формулы (10). Точнее, интересующая нас целая функция $2ka(k)$ экспоненциального типа допускает следующее представление (ср. [4]):

$$2ka(k) = 2k + \sum_{m=1}^{N} a^{(m)},$$
$$a^{(m)} = \sum_{i_1>i_2>\dots>i_m} \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\dots\gamma_{i_m} R_{i_1 i_2} R_{i_2 i_3}\dots R_{i_{m-1} i_m}. \quad (18)$$

Так как

$$\lim_{k\to 0} \frac{1-e^{2k(x_i-x_j)}}{2k} = x_j - x_i,$$

первое из уравнений системы (16) получается в этом предельном переходе из остальных. С другой стороны, замена (17) и формулы (10) позволяют по предельному ($k_0 = 0$) уравнению восстановить вид всей системы уравнений (16).

Рассматриваемое уравнение Шредингера (1) допускает группу растяжений:

$$x_j \to \kappa\, x_j, \quad \gamma_j \to \frac{\gamma_j}{\kappa}, \ k \to \frac{k}{\kappa},$$

которую можно использовать в рассматриваемой обратной задаче ISP и которая отражается в автомодельном характере самой системы уравнений (16). "Автомодельные" переменные типа $\hat\gamma_j = \gamma_j/2k$ (см. ниже) позволяют, в частности, найти простую асимптотическую формулу для $a(k)$ при $\operatorname{Re} k \gg 1$ (см. [6]). Например, при $N = 3$ и $x_1 < x_2 < x_3$ формула (18) в автомодельных переменных принимает следующий вид:

$$a(k) = \prod_{j=1}^{3}(1+\hat\gamma_j) - e_1\bar e_2 \hat\gamma_1\hat\gamma_2(1+\hat\gamma_3) -$$
$$- e_2\bar e_3\hat\gamma_2\hat\gamma_3(1+\hat\gamma_1) - e_1\bar e_3\hat\gamma_1\hat\gamma_3(1-\hat\gamma_2), \quad (19)$$
$$\hat\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_n}{2k}, \ e_n = e^{2kx_n}, \ \bar e_n = e^{-2kx_n}.$$

Отбрасывая экспоненциально малые при $\operatorname{Re} k \gg 1$ члены, мы получаем $a(k) \approx \prod(1+\hat\gamma_j)$, что напоминает о квазиклассике и солитонных формулах для $a(k)$.

2. Обратная задача ISP при $N = 2$ и 3. Используя заготовленные ранее формулы (5) и (19), несложно выписать в явном виде систему уравнений ISP. Полагая в этих формулах $\gamma_3 = 0$, мы получаем[2)], что при $N = 2$

$$2ka(k) = 2k + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\frac{1-e^{-2kl}}{2k},$$
$$\tau = \gamma_1 + \gamma_2 + l\gamma_1\gamma_2, \ l = x_2 - x_1 > 0. \quad (20)$$

Учитывая инвариантность этих формул относительно замены $\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$ и используя формулы Виета, мы находим, что задача ISP сводится при $N = 2$ к квадратному уравнению для $\gamma = \gamma_1, \ \gamma_2$:

$$\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta = 0, \ \alpha = \frac{z_1 Z_2 - z_2 Z_1}{Z_2 - Z_1},$$
$$\beta = \frac{z_1 - z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad Z_s = \frac{1 - e^{-z_s l}}{z_s}, \ z_s = 2k_s. \quad (21)$$

В случае, когда один из корней k_2 обращается в нуль, это квадратное уравнение упрощается и при $l = 1$ мы получаем, что задача (16) разрешима только при $k_1 \ge z$, где $z > 1$ – единственный положительный корень уравнения $z - 1 = e^{-z}$. При этом $\gamma_1 = \gamma_2 = -2$ при $k_1 = z$ и

$$\frac{2}{\gamma} = -1 \pm \frac{1}{k_1}\sqrt{(k_1-1)^2 - \exp(-2k_1)}, \ k_1 > z.$$

Случай $N = 3$ с квазисимметрическим многочленом $\tau(\boldsymbol\gamma)$, не инвариантным относительно перестановок $\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j$:

$$\tau = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 x_{21} + \gamma_1\gamma_3 x_{31} +$$
$$+ \gamma_2\gamma_3 x_{32} + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 x_{21} x_{32},$$

оказывается уже достаточно сложным при выяснении структуры области допустимых собственных чисел (k_1, k_2, k_3) из первого октанта. Предположив для простоты решетку узлов равномерной, $x_{21} = x_{32} = 1$, $x_{31} = 2$, мы ограничимся здесь выяснением границы области определения обратного отображения:

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \ \mapsto \ (k_1, k_2, k_3).$$

Хотя речь идет о расположении нулей целой функции (19) экспоненциального типа (см. [7]), здесь удобно использовать автомодельность задачи и сформулированное выше условие (i). Формула (5) и условия чередования знаков значений функции $\varphi(x) \equiv \psi^+(x,0)$ в узлах x_j дают

$$\varphi(x_1) = 1, \ \varphi(x_2) = 1 + \gamma_1,$$
$$\varphi(x_3) = 1 + 2\gamma_1 + \gamma_2(1+\gamma_1) \Rightarrow 1 + \gamma_1 < 0.$$

Аналогично для второй функции Йоста $\widetilde\varphi(x) \equiv \psi^-(x,0)$

$$\widetilde\varphi(x_1) = 1 + 2\gamma_3 + \gamma_2(1+\gamma_3), \ \widetilde\varphi(x_2) = 1 + \gamma_3,$$

2)Простой случай $N = 1$ с $2ka(k) = 2k + \gamma_1$ хорошо известен (см., например, [1]).

$$\widetilde{\varphi}(x_3) = 1 \Rightarrow 1 + \gamma_3 < 0.$$

Привлекая условие $\tau(\boldsymbol{\gamma}) = 0$, окончательно получаем, что условие (i) при $N = 3$ и $x_{21} = x_{32} = 1$ дает

$$\tau = \prod_{j=1}^{3}(1+\gamma_j) + \gamma_1\gamma_3 - 1;\ 1+\gamma_j < 0,\ j = 1,\ 3,$$
$$1 + \gamma_2 \le \frac{1-\gamma_1\gamma_3}{(1+\gamma_1)(1+\gamma_3)} < 0. \tag{22}$$

Аналогичные условия при $N = 2$ записываются в виде

$$\gamma_1,\ \gamma_2 < 0,\ \frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} < x_2 - x_1 = l. \tag{23}$$

Заметим, что при $k = 0$ рассматриваемое уравнение Шредингера сводится (ср. [4]) к разностному уравнению второго порядка:

$$\frac{1}{l_{j+1}}\psi_{j+1} + \frac{1}{l_j}\psi_{j-1} = \left(\frac{1}{l_{j+1}} + \frac{1}{l_j} + \gamma_j\right)\psi_j,$$
$$l_j = |I_j| = x_{j+1} - x_j, \tag{24}$$

которое принимает вид

$$\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\psi_j = l\gamma_j\psi_j,\ l = l_j\ \forall\ j, \tag{25}$$

для регулярной решетки с постоянным шагом l. Указанные выше условия (22), (23) являются, таким образом, условиями осцилляционности решений простого разностного уравнения (25).

Работа была поддержана грантом Российского научного фонда (проект # 15-11-20007).

1. U. Aglietti and P. Santini, J. Math. Ph. **56**, 062104 (2015).
2. А. Б. Шабат, Функц. анализ и его прилож. **9**(3), 75 (1975).
3. Evg. Korotyaev, Inverse Probl. **21**, 325 (2005).
4. А. Шабат, ТМФ **184**(2), 216 (2015).
5. Э. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М. (1958).
6. А. Шабат, ТМФ **183**(1), 105 (2015).
7. B. Levin, *Lectures on entire functions*, AMS (1996).