Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 2, с. 93 – 99 

# Асимметрия углового распределения излучения релятивистских каналированных электронов в оптически прозрачных кристаллах

*К. Б. Коротченко*[+*1)], *Ю. Л. Пивоваров*[*]

[+]*Кафедра экспериментальной физики, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634050 Томск, Россия*

[*]*Институт оптики атмосферы им. Зуева СО РАН, 634000 Томск, Россия*

Поступила в редакцию 18 ноября 2015 г.

Показано, что угловое распределение излучения оптического и ультрафиолетового диапазонов релятивистских электронов при плоскостном каналировании в оптически прозрачных кристаллах характеризуется необычной зависимостью от полярного и азимутального углов излучения. Часть излучения с частотой $\omega$, в окрестности которой производная показателя преломления $n'(\omega) = dn(\omega)/d\omega \neq 0$, должна наблюдаться под углом к направлению электронного пучка, близким к $\pi/2$. Для нормальной дисперсии ($n'(\omega) > 0$) этот угол меньше $\pi/2$, для аномальной ($n'(\omega) < 0$) – больше $\pi/2$ (излучение “назад”). Вне областей нормальной и аномальной дисперсии при фиксированном полярном угле $\theta$ появляется ярко выраженная зависимость интенсивности излучения от азимутального угла $\varphi$ – азимутальная асимметрия. В частности, при $\theta = \pi/2$ отношение интенсивностей излучения под углами $\varphi = 0$ и $\pi/2$ достигает максимального значения порядка квадрата показателя преломления.

DOI: 10.7868/S0370274X1602003X

**1.** В настоящее время излучение при каналировании (Channeling Radiation, CR) релятивистских электронов хорошо изучено и теоретически, и экспериментально. Однако все основные результаты, полученные для CR, относятся к CR-фотонам рентгеновского и гамма-диапазонов [1, 2].

Цель нашей работы – проанализировать особенности углового распределения CR оптического и ультрафиолетового диапазонов, возникающего за счет переходов между квантовыми состояниями поперечного движения электронов при плоскостном каналировании, с учетом реальной сложной зависимости показателя преломления кристалла от частоты фотона.

**2.** Следуя [3], вероятность излучения CR-фотона с энергией $\hbar\omega$ каналированным электроном вычисляем в первом порядке теории возмущений:

$$dw_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|M_{if}\right|^2 \delta\left[\hbar\omega - (E_i - E_f)\right] d\varrho, \qquad (1)$$

где

$$M_{if} = -e\big\langle \Psi_f(\mathbf{r})\big|\mathbf{A}^*(\mathbf{r})\boldsymbol{\gamma}\big|\Psi_i(\mathbf{r})\big\rangle \qquad (2)$$

есть матричный элемент вероятности перехода каналированного электрона между квантовыми состояниями поперечного движения $i \rightarrow f$, $d\varrho = L^3 d^3\kappa/(2\pi)^3$ – плотность конечных состояний, $\boldsymbol{\kappa}$ – волновой вектор.

1) e-mail: korotchenko@tpu.ru

В уравнении (2) $\Psi_i(\mathbf{r})$ – собственные функции каналированного электрона, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – волновая функция CR-фотона:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\tau} A_o(\kappa)\boldsymbol{\epsilon}_\tau e^{\mathbf{i}\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}, \qquad (3)$$

$A_o(\kappa) = \sqrt{2\pi\hbar c\kappa/L^3}$ [3], $\tau = (\sigma, \pi)$ – индекс, обозначающий 4-компоненты вектора поляризации $\boldsymbol{\epsilon}_\tau$ CR-фотона.

Примем, что при плоскостном каналировании электроны с импульсом $p_z$ движутся вдоль оси $Z$, а поперечное движение происходит вдоль оси $X$, т.е. $p_y = 0$ (рис. 1). Соответственно $\theta$ – угол между волновым вектором CR-фотона $\boldsymbol{\kappa}$ и осью $Z$, $\varphi$ – азимутальный угол вектора $\boldsymbol{\kappa}$ в плоскости $XY$.

Представим 4-вектор поляризации CR-фотона $\boldsymbol{\epsilon}_\tau$ в виде $\boldsymbol{\epsilon}_\tau = (0, \boldsymbol{e}_\tau)$. Тогда формула (2) для матричного элемента $M_{if}$ примет вид

$$M_{if} = -e\big|\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{\alpha}_{if}\big| \qquad (4)$$

с матричным элементом перехода

$$\boldsymbol{\alpha}_{if} = \big\langle f \mid \boldsymbol{\alpha} e^{-\mathbf{i}\boldsymbol{\kappa}_x x} \mid i\big\rangle \delta\Big(\frac{\Delta\mathbf{p}_{if|z}}{\hbar}\Big|\kappa_z\Big)\,. \qquad (5)$$

Подробный вывод формулы (5) приведен в наших работах [4–7].

В формуле (5) $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_\circ\boldsymbol{\gamma}$ – $\alpha$-матрица, $\gamma_\circ$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – матрицы Дирака, $\delta(\,|\,)$ – дельта Кронекера, $\langle f|\ldots|i\rangle = \langle\phi_f(x)|\ldots|\phi_i(x)\rangle$, где $\phi_i(x)$ – собственная функция

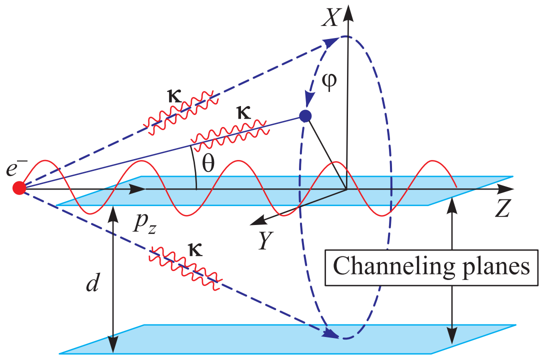


Рис. 1. (Цветной онлайн) Система координат и плоскости каналирования: ось $X$ перпендикулярна этим плоскостям, оси $Y$ и $Z$ лежат в плоскости каналирования, $\theta$ – угол между волновым вектором CR-фотона $\boldsymbol{\kappa}$ и осью $Z$, $\varphi$ – азимутальный угол вектора $\boldsymbol{\kappa}$, $p_z$ – продольный импульс электрона. Для наглядности показана классическая траектория электрона при плоскостном каналировании

$i$-го квантового состояния для поперечного движения каналированного электрона, $\Delta\mathbf{p}_{if|z} = p_{iz} - p_{fz}$ – изменение продольного импульса каналированного электрона при излучении.

Вероятность излучения (1) с матричными элементами (5) преобразуем к виду

$$dw_{if} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} P_i(\theta_0)(|M_1|^2 + |M_2|^2)\delta(\kappa_{if} - \kappa)\frac{d^3\kappa}{\kappa}. \quad (6)$$

Здесь $c^*\hbar\kappa_{if} = (E_i - E_f)$, $c^*$ – фазовая скорость CR-фотона в кристалле, $E_i \simeq \varepsilon_i + c(p_{iz}^2 + m^2c^2)^{1/2}$ и $E_f \simeq \varepsilon_f + c(p_{fz}^2 + m^2c^2)^{1/2}$ – полная релятивистская энергия каналированного электрона в начальном $(i)$ и конечном $(f)$ квантовых состояниях, $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_f$ – энергии $i$-го и $f$-го квантовых состояний поперечного движения каналированного электрона. Наконец, из (5) следует, что $p_{fz} = p_{iz} - \hbar\kappa_z$.

При каналировании в кристалле электрон находится в периодическом поле плоскостей кристалла. Поэтому энергии $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_f$ образуют энергетические зоны и являются непрерывными функциями поперечного волнового вектора электрона [8]. Как следствие разность поперечных энергий $\hbar\Omega_{if} = \varepsilon_i - \varepsilon_f$ **не** обязательно **обращается в нуль** при $i = f$ (возможны внутризонные переходы).

В выбранной системе координат

$$M_1 = (\alpha_{if})_x \cos\theta\cos\varphi - (\alpha_{if})_z \sin\theta,$$
$$M_2 = (\alpha_{if})_x \sin\varphi \quad (7)$$

и компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}_{if}$ имеют вид

$$(\alpha_{if})_x = -\mathbf{i}x_{if}\frac{\Omega_{if}}{c} \; \left(x_{if} = \langle f|xe^{-\mathbf{i}\kappa_x x}|i\rangle\right),$$
$$(\alpha_{if})_y = 0,$$
$$(\alpha_{if})_z = -\mathbf{i}F_{if}\beta \; \left(F_{if} = \mathbf{i}\langle f|e^{-\mathbf{i}\kappa_x x}|i\rangle\right), \quad (8)$$

где $\kappa_x = |\boldsymbol{\kappa}|\sin\theta\cos\varphi$, $\beta = v/c$, $v$ – продольная скорость каналированного электрона.

В дипольном приближении[2)] $\langle f|xe^{-\mathbf{i}\kappa_x x}|i\rangle \to \langle f|x|i\rangle$, $\langle f|e^{-\mathbf{i}\kappa_x x}|i\rangle \to -\mathbf{i}\kappa_x\langle f|x|i\rangle$, т.е.

$$x_{if} = \widetilde{x}_{if} = \langle f|x|i\rangle,$$
$$F_{if} = \kappa_x\widetilde{x}_{if}, \quad (9)$$

и формулы (8) совпадают с формулами, полученными в [9].

В формуле (6) вероятность излучения домножена на начальную заселенность $P_i(\theta_0)$ – вероятность того, что электрон, влетевший в кристалл под углом $\theta_0 \simeq p_x/p_z$ по отношению к плоскостям каналирования ($p_z$ и $p_x$ – продольная и поперечная компоненты вектора импульса электрона), будет захвачен в квантовое состояние (энергетическую зону) поперечного движения, описываемое волновой функцией $\phi_i(x)$:

$$P_i(\theta_0) = \frac{1}{d}\left|\int_{-d/2}^{d/2} \exp(\mathbf{i}\theta_0 x p_z/\hbar)\phi_i(x)dx\right|^2, \quad (10)$$

где $d$ – межплоскостное расстояние (см. рис. 1).

**3.** Точной аналитической формы зависимости показателя преломления $n = n(\omega)$ от частоты для оптического и ультрафиолетового диапазонов нет, а экспериментальные графики очень сложны для аналитической аппроксимации.

На рис. 2 представлена зависимость $n = n(\hbar\omega)$ для C (diamond). Диапазон $\hbar\omega \in (0.2, 35)$ эВ взят из [10], а диапазон $\hbar\omega \in (36, 5000)$ эВ рассчитан с помощью программы X0h Request Form на X-ray Server [11].

Нас интересует вероятность (6) излучения CR-фотона в кристалле, для которого известна зависимость $n = n(\omega)$. Для вычисления $w_{if}$ необходимо учесть, что в этом случае $\kappa = \omega n(\omega)/c$, и перейти от интеграла по $\kappa$ к интегралу по $\omega$:

$$d^3\kappa = J(\omega)d\omega do, \quad (11)$$

где $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла, $J(\omega)$ – якобиан преобразования:

$$J(\omega) = \left[n(\omega)\frac{\omega}{c}\right]^2\left[n(\omega) + \omega\frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega}\right]. \quad (12)$$

2) Дипольное приближение соответствует разложению экспоненты $e^{\mathbf{i}\kappa_x x}$ в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием членов выше первого порядка по $x$ в матричных элементах.

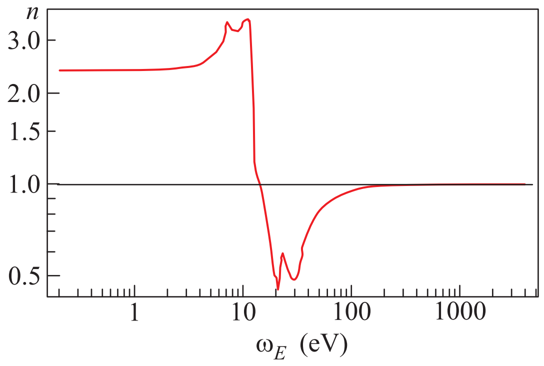


Рис. 2. (Цветной онлайн) Дисперсия $n = n(\hbar\omega)$ для C (diamond) по данным из [10] (диапазон $(0.2, 35)$ эВ) и [11] (диапазон $(36, 5000)$ эВ)

Тогда согласно уравнениям (6)–(9), интенсивность $dI_{if} = \hbar\omega dw_{if}$ углового распределения CR будет описываться формулой, содержащей два слагаемых:

$$\frac{dI_{if}}{do} = \frac{e^2}{2\pi c^2} P_i(\theta_0) \widetilde{x}_{if}^2 \left( \frac{dB_{if}}{do} + \frac{dC_{if}}{do} \right), \qquad (13)$$

где для упрощения мы воспользовались дипольным приближением (формулы (9)) и обозначили

$$\frac{dB_{if}}{do} = \int f_{if} \delta \left[ \kappa_{if} - \frac{n(\omega)\omega}{c} \right] n^2(\omega)\omega^2 d\omega, \qquad (14)$$

$$\frac{dC_{if}}{do} = \int f_{if} \delta \left[ \kappa_{if} - \frac{n(\omega)\omega}{c} \right] n(\omega)\omega^3 n'(\omega) d\omega, \qquad (15)$$

$$f_{if} = [n(\omega)\omega\beta \cos^2\theta - \Omega_{if} \cos\theta]^2 \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\, \Omega_{if}^2.$$

Интеграл (15) описывает **дополнительную** часть интенсивности углового распределения CR, которая возникает за счет аномальной или нормальной дисперсии кристалла.

Будем считать, что энергия CR-фотонов и поперечная энергия каналированных электронов много меньше полной энергии электронов. Тогда

$$c^* \kappa_{if} \simeq \Omega_{if} + \kappa_z c\beta = \Omega_{if} + \omega n(\omega)\beta \cos\theta. \qquad (16)$$

С учетом $\delta$-функции в интегралах (14) и (15) и формулы (16) получаем известное выражение для частоты CR-фотонов:

$$\omega = \frac{\Omega_{if}}{1 - \omega n(\omega)\beta \cos\theta}. \qquad (17)$$

Рассмотрим два важных случая, когда эти интегралы можно вычислить аналитически.

Первый случай соответствует условиям, при которых $n' = dn(\omega)/d\omega = 0$ и интеграл (15) равен нулю. Интеграл (14) берется. В результате получаем формулу, описывающую угловое распределение интенсивности CR фиксированной частоты:

$$\frac{dI_{if}}{do} = \frac{e^2}{2\pi c^2} P_i(\theta_0) \widetilde{x}_{if}^2 \Omega_{if}^2 A(\theta, \varphi), \qquad (18)$$

$$A(\theta, \varphi) = n \frac{(1 - n\beta\cos\theta)^2 - (1 - n^2\beta^2)\cos^2\varphi \sin^2\theta}{|n\beta\cos\theta - 1|^5},$$

которая отличается от полученных в [9, 12] наличием коэффициента заселенности $P_i(\theta_0)$.

Формула (18) описывает угловое распределение интенсивности CR, если в окрестности заданной частоты $\omega$ показатель преломления кристалла остается **постоянным**: $n = \text{const}$ (для алмаза это диапазоны $\hbar\omega \in (0.2, 6.0)$ эВ и $\hbar\omega > 100$ эВ на графике дисперсии; см. рис. 2).

К сожалению, авторы [9, 12] подробный анализ углового распределения CR (особенно при больших полярных углах $\theta$) не провели. Видимо, в то время излучение при каналировании привлекало внимание прежде всего как новый источник жесткого излучения, направленного в основном “вперед”, в конус углов $\theta \approx 1/\gamma$.

Второй случай соответствует условиям, при которых интеграл (15) не равен нулю и может быть вычислен аналитически. Это возможно, если $n' = dn(\omega)/d\omega = \text{const}$, т.е. для диапазонов частот CR-фотонов $\omega$, соответствующих аномальной или нормальной дисперсии кристалла. До настоящего времени влияние аномальной (нормальной) дисперсии кристалла на CR не изучалось. Формулы (13)–(15) позволяют описать угловое распределение интенсивности CR с частотой $\omega$, в окрестности которой **производная** показателя преломления среды остается **постоянной**, $n' = \text{const}$ (диапазон $\hbar\omega \in (6.0, 100)$ эВ на графике дисперсии; см. рис. 2).

Достаточно громоздкие вычисления приводят к следующему выражению:

$$\frac{dC_{if}}{do} = \frac{1}{(2\cos\theta)^8 c\beta^6 n'^4} \left( \frac{F_{if}^-}{|g_-^{if}|} + \frac{F_{if}^+}{|g_+^{if}|} \right), \qquad (19)$$

где функции $F_{if}^{\pm}$ и $g_{\pm}^{if}$ имеют вид

$$F_{if}^{\pm} = R_{\pm}(R_1^{\pm})^3 \Big[ 4n'\beta\cos^3\theta\,\Omega_{if} \big( 2R_{\pm}R_1^{\pm}\cos^2\varphi\sin^2\theta - - n'\beta\cos\theta(3 + \cos 2\theta - 2\cos 2\varphi \sin^2\theta)\Omega_{if} \big) - - (R_{\pm}R_1^{\pm})^2 \cos^2\varphi \sin^4\theta \Big], \qquad (20)$$

$$g_{\pm}^{if} = \frac{R_1^{\pm}}{\beta\cos\theta} \left( \frac{3}{4} R_1^{\pm} - 1 \right) + (n - n'\omega)(2R_1^{\pm} - 1) + + \beta\cos\theta(n - n'\omega)^2 + n'\Omega if \qquad (21)$$

и введены обозначения

$$R_1^{\pm} = R_{\pm} + 2\beta(n - n'\omega)\cos\theta, \quad (22)$$
$$R_{\pm} = 1 \pm R_0 - \beta(n - n'\omega)\cos\theta,$$
$$R_0^2 = [\beta(n - n'\omega)\cos\theta - 1]^2 - 4n'\beta\cos\theta\Omega_{if}.$$

Согласно формулам (19)–(21) при $\cos\theta = 1/n\beta$

$$g_-^{if} = \frac{2\beta}{n}\Big\{n'^2\omega^2 + n[-4n'\Omega_{if} + + (-2n + n'\omega)\sqrt{n'(n'\omega^2 - 4n\Omega_{if})}/n^2]\Big\}, \quad (23)$$
$$g_+^{if} = \frac{2\beta}{n}\Big\{n'^2\omega^2 + n[-4n'\Omega_{if} + + (2n + n'\omega)\sqrt{n'(n'\omega^2 - 4n\Omega_{if})}/n^2]\Big\}, \quad (24)$$

т.е. интенсивность $dC_{if}/do$ не имеет особенности при $1 - n(\omega)\beta\cos\theta = 0$ (в отличие от формулы (18)).

Таким образом, угловое распределение интенсивности CR с частотой $\omega$, для которой известны значения показателя преломления среды $n = n(\omega)$ и его производной $n' = dn(\omega)/d\omega$, должно рассчитываться как

$$\frac{dI_{if}}{do} = \frac{e^2}{2\pi c^2}P_i(\theta_0)\widetilde{x}_{if}^2\left[A(\theta,\varphi)\Omega_{if}^2 + \frac{dC_{if}}{do}\right], \quad (25)$$

где $A(\theta,\varphi)$ и $dC_{if}/do$ вычисляются по формулам (18) и (19)–(21).

**4.** Рассмотрим особенности угловых распределений CR, описываемые полученными формулами.

В недавних экспериментах на ускорительном комплексе SAGA-LS по исследованию черенковского излучения 255 МэВ электронов в кристалле C (diamond) влияния эффекта каналирования для выбранной геометрии наблюдения (фиксированные полярный и азимутальный углы наблюдения) обнаружено не было [13]. Как мы покажем ниже, такое влияние может быть обнаружено при измерении азимутальной зависимости интенсивности оптического CR при фиксированном полярном угле (от черенковского угла до $\pi/2$ и более).

Ориентируясь на возможность экспериментальной проверки полученных результатов на ускорителе SAGA-LS (Япония), рассмотрим излучение релятивистских электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond), полагая, что толщина кристалла не превышает длину деканалирования, которая, согласно [13, 14], для электронов с $\gamma = 500$ в кристалле C (diamond) приблизительно равна 40 мкм.

Для численной оценки величины асимметрии в угловом распределении CR-фотонов с энергией $\hbar\omega$ введем функцию, равную отношению суммарной интенсивности излучения от всех возможных переходов $dI/do = \sum_{if} dI_{if}/do$ (процедура таких расчетов описана в наших работах [15–17]) для азимутального угла $\varphi = 0$ к $dI/do$ для произвольного угла $\varphi$:

$$D(\omega,\varphi) = \frac{dI(\omega,\theta,0)/do}{dI(\omega,\theta,\varphi)/do}. \quad (26)$$

Экспериментальная установка SAGA-LS позволяет детектировать фотоны оптического диапазона под углом $\theta = \pi/2$ относительно продольного импульса электронов. В этом случае $D(\omega,\varphi)$, согласно уравнению (18), имеет вид

$$D(\omega,\varphi) = \frac{n^2(\omega)\beta^2}{\sin^2\varphi + n^2(\omega)\beta^2\cos^2\varphi}. \quad (27)$$

Отметим, что хотя (27) не содержит параметров каналирования (следствие дипольного приближения), эта формула получена из (18), выведенной для излучения при каналировании.

На рис. 3 показаны зависимости $D(\omega,\varphi)$ от угла $\varphi$ для электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль

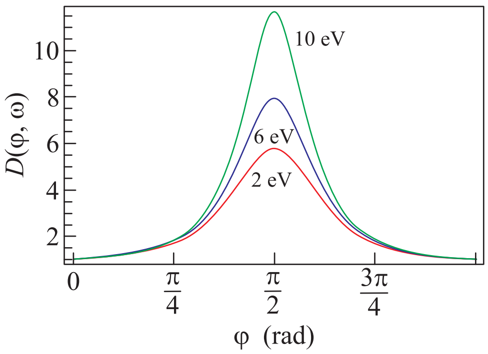


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости функции $D(\omega,\varphi)$ от азимутального угла $\varphi$ для C (diamond) при наблюдении под углом $\theta = \pi/2$

плоскостей (220) кристалла C (diamond), рассчитанные по формуле (27).

Из формулы (27) и рис. 3 следует, что величина асимметрии под углом $\varphi = \pi/2$ (при $\theta = \pi/2$) в $(n\beta)^2$ раз **больше**, чем под углом $\varphi = 0$ (она достигает максимума).

Для CR-фотонов с энергией от 2 до 10 эВ величина асимметрии $D(\omega,\pi/2)$ принимает значения в диапазоне от 5.8 до 11.7. Это, по мнению авторов, может быть обнаружено экспериментально на установке SAGA-LS, на которой исследовалось черенковское излучение 255 МэВ электронов в кристалле C (diamond) с регистрацией фотонов именно под углом $\pi/2$ к импульсу электронов [13].

**5.** На рис. 4а показано угловое распределение интенсивности CR по углу $\theta$ при $\varphi = 0$ (в отно-

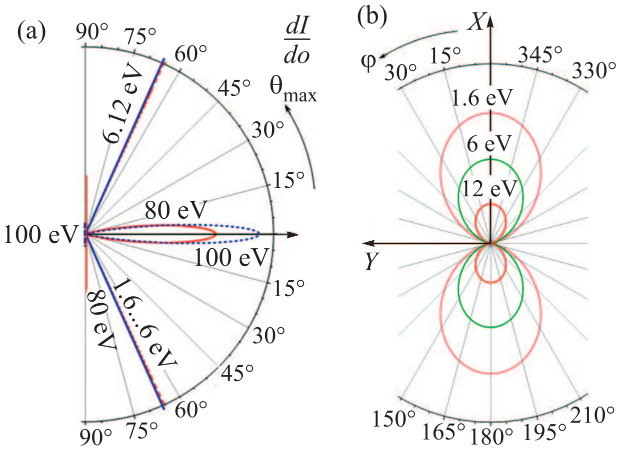


Рис. 4. (Цветной онлайн) Угловое распределение (в относительных единицах) интенсивности CR от электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond), по углу $\theta$ при $\varphi = 0$ (a) и по углу $\varphi$ при $\theta_{\max} \simeq \theta_{\mathrm{Ch}}$ (b) (численные значения $\theta_{\mathrm{Ch}}$ – на рис. 5)

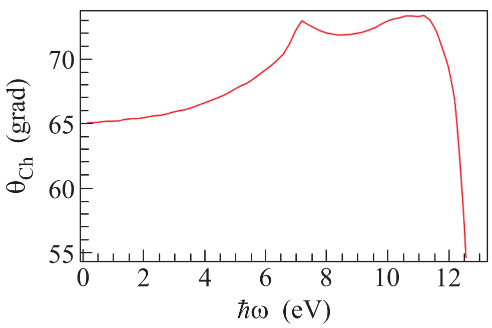


Рис. 5. (Цветной онлайн) Черенковские углы для CR-фотонов с энергией в диапазоне $\hbar\omega = (1.6, 12)$ эВ в кристалле C (diamond)

сительных единицах) от электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond). При вычислениях проведено суммирование интенсивностей излучения от всех возможных переходов $i \to f$. Принято, что $n' = dn(\omega)/d\omega = 0$, т.е. расчеты выполнены по формуле (18). Вклад в интенсивность в случае $n' = dn(\omega)/d\omega \neq 0$ отдельно рассмотрен ниже.

Согласно формуле (18) величины углов $\theta_{\max}$, под которыми наблюдается максимум интенсивности, для CR-фотонов с энергиями в диапазоне $\hbar\omega \in (1.6, 12)$ эВ (см. рис. 5) совпадают с черенковскими углами:

$$\theta_{\max} = \theta_{\mathrm{Ch}} = \arccos\frac{1}{n(\omega)\beta}, \tag{28}$$

и предел $dI/do \to \infty$ есть следствие того, что в квантовой электродинамике вероятность (1) излучения CR-фотона электроном вычисляется для бесконечно больших промежутков времени [3]. Поэтому при численных расчетах мы принимали $\theta_{\max} = \theta_{\mathrm{Ch}} - 10^{-12}$.

Согласно рис. 4а CR-фотоны ультрафиолетового диапазона, $\hbar\omega \in 80{-}100$ эВ, излучаются преимущественно в **двух** направлениях: вблизи $\theta = 0°$ (вдоль оси $Z$) и вблизи $\theta = \pi/2$. Соотношение интенсивностей излучения в этих направлениях сильно зависит от энергии фотонов. Так, для CR-фотонов с энергией $\hbar\omega = 80$ эВ интенсивность излучения под углами $\theta \simeq \pi/2$ в 1.3 раза меньше излучения "вперед" (вдоль оси $Z$), а для CR-фотонов с энергией $\hbar\omega = 100$ эВ – уже в 27 раз. Качественно это отражено на рис. 4а.

На рис. 4b показано распределение интенсивности CR по углу $\varphi$ (индикатриса излучения) вблизи черенковского угла, т.е. при $\theta_{\max} \simeq \theta_{\mathrm{Ch}}$ (в относительных единицах), от электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond), рассчитанное для всех переходов. Хорошо видно, что в диапазоне энергий CR-фотонов от 1.6 эВ до 12 эВ интенсивность излучения имеет ярко выраженную зависимость от азимутального угла $\varphi$: при $\varphi = \pi/2$ интенсивность $dI/do = 0$.

На рис. 6 показаны угловые 3D-распределения интенсивности CR (индикатриса излучения) с энергия-

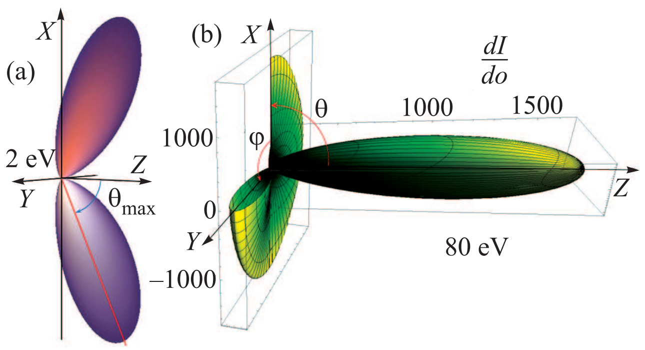


Рис. 6. (Цветной онлайн) Угловые 3D-распределения (индикатрисы излучения) интенсивности CR (относительные единицы), возникающего от релятивистских электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) C (diamond), с энергией $\hbar\omega = 2$ эВ (a) и 80 эВ (b)

ми $\hbar\omega = 2$ и 80 эВ, возникающего от релятивистских электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) C. Как и в случае рис. 4, расчеты проведены по формуле (18), т.е. без учета дополнительной интенсивности CR-фотонов, описываемой формулами (19)–(21).

Индикатрисы излучения на рис. 6 демонстрируют резкое отличие распределений CR-фотонов с энергиями $\hbar\omega = 2$ и 80 эВ по углу $\theta$, что является следствием резкого отличия величины показателя преломления для этих энергий фотонов. Действительно, формула (18) позволяет получить отношение интенсивностей CR-фотонов, излученных под углом $\theta = 0$ (излучение "вперед") с различными частотами:

$$F(\omega_1,\omega_2) = \frac{dI(\omega_1,0,\varphi)/do}{dI(\omega_2,0,\varphi)/do} = \\ = \left|\frac{1-n(\omega_1)\beta}{1-n(\omega_2)\beta}\right|^3 \frac{n(\omega_1)}{n(\omega_2)}. \quad (29)$$

Для $\hbar\omega = 80$ эВ (рис. 6b) и $\hbar\omega = 2$ эВ (рис. 6a) $F(\omega_1,\omega_2) = 1910$, т.е. излучение CR-фотонов с энергией $\hbar\omega = 2$ эВ на угол $\theta = 0$ практически отсутствует по сравнению с излучением фотонов с энергией $\hbar\omega = 80$ эВ.

К тому же индикатриса излучения фотонов с энергией $\hbar\omega = 80$ эВ (рис. 6b) демонстрирует нетривиальное угловое распределение вблизи $\theta = \pi/2$: при $\varphi = 0°$ и $\pi$ (перпендикулярно плоскостям каналирования) CR-фотоны излучаются строго под углом $\theta = \pi/2$.

**6.** Рассмотрим теперь особенности вклада в угловое распределение интенсивности CR-излучения, описываемого формулой (19).

На рис. 7 приведены результаты расчетов индикатрис этого вклада в CR-излучение для энергий фотонов $\omega = 6.5$ и 11.5 эВ от релятивистских электронов, каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond). Согласно рис. 7 данный вклад в излучение существует только под углами, очень близкими к 90°. При этом для нормальной дисперсии, $n'(\omega) > 0$, например для CR-фотонов с энергией $\hbar\omega = 6.5$ эВ (рис. 7a), угол $\theta_{\max} = \pi/2 - 4$ мрад, а для аномальной, $n'(\omega) < 0$, например для CR-фотонов с энергией $\hbar\omega = 11.5$ эВ (рис. 7b), угол $\theta_{\max} = \pi/2 + 4\cdot 10^{-14}$ рад (излучение "назад").

**7.** В заключение отметим, что угловое распределение излучения релятивистских электронов при плоскостном каналировании в оптически прозрачном кристалле с показателем преломления $n(\omega)$ обладает следующими весьма специфичными свойствами.

1. В оптическом диапазоне ($\hbar\omega \simeq (2{-}6)$ эВ, $n'(\omega) = dn(\omega)/d\omega \simeq 0$) излучение распространяется в основном вблизи черенковского конуса

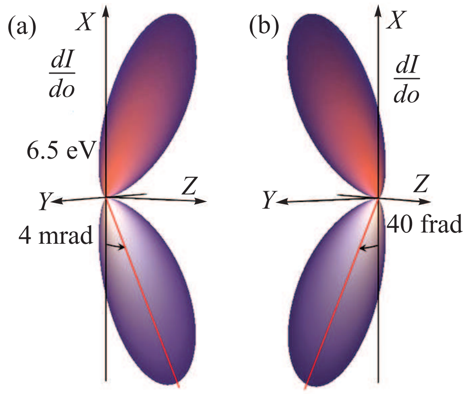


Рис. 7. (Цветной онлайн) Индикатрисы вклада в интенсивность CR (относительные единицы) на частоте, для которой $n'(\omega) = dn(\omega)/d\omega \neq 0$, от электронов ($\gamma = 500$), каналированных вдоль плоскостей (220) кристалла C (diamond). (a) – Нормальная дисперсия: $n'(\omega) > 0$, $\hbar\omega = 6.5$ эВ. (b) – Аномальная дисперсия: $n'(\omega) < 0$, $\hbar\omega = 11.5$ эВ

(см. рис. 4 и 6a). Однако в отличие от классического излучения Вавилова–Черенкова (в отсутствие каналирования) угловое распределение оптического излучения при плоскостном каналировании **существенно** зависит от азимутального угла.

2. В ультрафиолетовом диапазоне (энергия фотонов $\hbar\omega = (80{-}100)$ эВ, $n'(\omega) = dn(\omega)/d\omega \simeq 0$) излучение распространяется преимущественно под углами $\theta \simeq 0$ (излучение "вперед", вдоль оси $Z$) и под углами, очень близкими к $\pi/2$. Интенсивность излучения под углами $\theta \simeq \pi/2$ быстро убывает с ростом энергии CR-фотонов. Так, в кристалле алмаза для энергии фотонов $\hbar\omega = 80$ эВ интенсивность этой части излучения в 1.3 раза меньше излучения "вперед", а для энергии фотонов $\hbar\omega = 100$ эВ – уже в 27 раз.

3. Существует дополнительный вклад в излучение в диапазоне частот, для которых $n'(\omega) = dn(\omega)/d\omega \neq 0$. Такое излучение распространяется под углами, очень близкими к $\pi/2$. В случае кристалла алмаза и нормальной дисперсии (см. рис. 7), $n' = dn(\omega)/d\omega > 0$ (фотоны с энергией $\hbar\omega \simeq 6.5$ эВ), этот угол меньше $\pi/2$, а в случае аномальной, $n' = dn(\omega)/d\omega < 0$ (фотоны с энергией $\hbar\omega \simeq 11.5$ эВ), – больше $\pi/2$ (излучение "назад").

4. Функция $D(\omega,\varphi)$, характеризующая азимутальную асимметрию интенсивности излучения CR-фотонов под углом $\theta = \pi/2$ к продольному

импульсу каналированных электронов, имеет ярко выраженный **максимум** при $\varphi = \pi/2$, величина которого пропорциональна $n^2(\omega)$. В частности, для кристалла алмаза и фотонов с энергией от 2 до 10 эВ величина асимметрии $D(\omega, \varphi)$ принимает значения в диапазоне от 5.8 до 11.7 (эффект, который вполне может быть обнаружен экспериментально).

Авторы признательны Dr. Y. Takabayashi (SAGA-LS) за плодотворные дискуссии.


1. H. Genz, L. Groening, P. Hoffmann-Stascheck, A. Richter, M. Hofer, J. Hormes, U. Nething, J. P. F. Sellschop, C. Toepffer, and M. Weber, Phys. Rev. B **53**, 8922 (1996).
2. O. V. Bogdanov, K. B. Korotchenko, Yu. L. Pivovarov, and T. A. Tukhfatullin, Nucl. Instr. Meth. B **266**, 3858 (2008).
3. J. C. Kimball and N. Cue, Phys. Rep. (Rev. Sec. Phys. Lett.) **125**(2), 69 (1985).
4. K. B. Korotchenko and Y. L. Pivovarov, J. Phys.: Conf. Ser. **517**(1), 012019 (2014).
5. K. B. Korotchenko and Y. L. Pivovarov, JETP Lett. **101**(10), 719 (2015).
6. K. B. Korotchenko and Y. P. Kunashenko, Rad. Phys. Chem. **109**, 83 (2015).
7. K. B. Korotchenko, Y. L. Pivovarov, and Y. Takabayashi, JETP Lett. **95**(8), 433 (2012).
8. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart, and Winston, N.Y. (1976); Mir, M. (1979).
9. V. V. Beloshitskii and M. A. Kumakhov, Sov. Phys. JETP **47**(4), 652 (1978).
10. M. N. Polyanskiy, http://refractiveindex.info.
11. S. Stepanov, http://x-server.gmca.aps.anl.gov/.
12. V. G. Baryshevsky, *Channeling, Radiation and Reactions in CRystals at High Energy*, Belgosuniversitet, Minsk (1982) (in Russian).
13. Y. Takabayashi, E. I. Fiks, and Yu. L. Pivovarov, Phys. Lett. A **379**(14, 15), 1017 (2015).
14. H. Backe, D. Krambrich, W. Lauth, K. K. Andersen, J. Lundsgaard Hansen, and U. I. Uggerhoj, J. Phys. Conf. Ser. **438**, 012017 (2013).
15. K. B. Korotchenko, E. I. Fiks, Yu. L. Pivovarov, and T. A. Tukhfatullin, J. Phys. Conf. Ser. **236**, 012016 (2010).
16. K. B. Korotchenko, Yu. L. Pivovarov, and T. A. Tukhfatullin, Nucl. Instr. Meth. B **269**, 2840 (2011).
17. Y. Takabayashi, K. B. Korotchenko, Yu. L. Pivovarov, and T. A. Tukhfatullin, Nucl. Instr. Meth. B **315**, 105 (2013).