ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФАЗЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ СМЕШАННЫХ ДИРАКОВСКИХ НЕЙТРИНО В СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

В.А.Наумов

Иркутский государственный университет
664008, Иркутск

Поступила в редакцию 7 июня 1991 г.

Рассматриваются трехнейтринные осцилляции в среде с произвольным (гладким) распределением плотности и состава. В рамках адиабатического подхода Берри исследуются условия возникновения топологических фаз и их связь с фазой CP-нарушения.

Общим свойством шредингеровской эволюции динамических систем с гамильтонианами, зависящими от времени через набор адиабатических параметров $\{\lambda_\alpha(t)\}$, является возникновение топологических фаз (ТФ) [1], входящих в амплитуды квантовых переходов в сумме с динамическими фазами. Осцилляции нейтрино в среде с переменной (зависящей от координаты $x \simeq ct$) плотностью [2] - типичный пример такой эволюции, причем роль параметров λ_α здесь играют показатели преломления нейтрино в среде n_α или их комбинации. Правомерно поставить вопрос об условиях появления ТФ в нейтринной системе и их влиянии на вероятности осцилляций. Если пренебречь поглощением и возможным вкладом недиагональных нейтральных токов [3], то ТФ могут появиться только в системе $N \geq 3$ смешанных нейтрино, поскольку вакуумная матрица смешивания V, а следовательно и гамильтониан 2ν-системы вещественны.

В этой статье рассматривается простейший случай трех смешанных дираковских нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ), распространяющихся в среде с произвольным ("гладким") распределением плотности и состава. Уравнение для оператора эволюции [1)] $S(t) = \| S_{\alpha\beta}(t) \|$ такой системы [3] может быть записано в виде

$$i\dot{S}(t) = H[\vec{q}(t)]S(t), \tag{1}$$

с начальным условием $S(0) = I$. Фигурирующий в (1) гамильтониан

$$H[\vec{q}] = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_e - q_e & \mathcal{H}_\tau & \mathcal{H}_\mu^* \\ \mathcal{H}_\tau^* & \mathcal{W}_\mu - q_\mu & \mathcal{H}_e \\ \mathcal{H}_\mu & \mathcal{H}_e^* & \mathcal{W}_\tau - q_\tau \end{pmatrix}$$

зависит от времени только через компоненты вектора $\vec{q} = (q_e, q_\mu, q_\tau)$, связанные с показателями преломления n_α,

$$q_\alpha(t) = p_\nu[n_\alpha(t) - < n(t) >], \quad < n(t) >= \frac{1}{3}\sum_\alpha n_\alpha(t).$$

Здесь p_ν - импульс нейтрино ($p_\nu \gg max(m_i)$, $c = 1$). В дальнейшем будем предполагать существование непрерывных производных $\dot{q}_\alpha$ при всех t, хотя это ограничение не является обязательным. Постоянные величины $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\alpha$

[1)] Всюду далее греческие индексы α, β,... используются для нумерации ароматов (e, μ, τ), а латинские i, j,... принимают значения 1, 2, 3.

определяются матрицей $V = ||V_{\alpha i}||$, зависящей в общем случае от трех углов смешивания θ_i и параметра CP-нарушения δ ("фазы Дирака") и массами m_i состояний $|\nu_i>=\sum_\alpha V^*_{\alpha i}|\nu_\alpha>$:

$$\mathcal{W}_\alpha = \sum_i |V_{\alpha i}|^2\Delta_i, \quad \mathcal{H}_\alpha = \eta^{\beta\gamma}_\alpha \sum_i V_{\beta i}V^*_{\gamma i}\Delta_i,$$
$$\Delta_i = \frac{m_i^2-<m^2>}{2p_\nu}, \qquad <m^2>=\frac{1}{3}\sum_i m_i^2,$$

$\eta^{\beta\gamma}_\alpha = 1$, если $(\alpha\beta\gamma)$ является циклической перестановкой индексов $(e\mu\tau)$ и $\eta^{\beta\gamma}_\alpha = 0$ в остальных случаях [2)]. Отметим, что H - эрмитовая, а S - унитарная матрицы, так как считаем $\mathrm{Im} n_\alpha(t) = 0$.

Пусть $\mathcal{E}_j[\vec{q}]$ - собственные значения, а $|\mathcal{U}_j[\vec{q}]>$ - соответствующие им ортонормированные собственные векторы гамильтониана $H[\vec{q}]$. Можно показать, что при произвольной эволюции 3ν-системы, уровни $\mathcal{E}_j$ не пересекаются, если отличен от нуля динамический инвариант

$$J = \mathrm{Im}\prod_\alpha \sum_i \eta^{\beta\gamma}_\alpha U_{\beta i}U^*_{\gamma i}\mathcal{E}_i = \mathrm{Im}\prod_\alpha \mathcal{H}_\alpha,$$

где $U = ||U_{\alpha i}|| = (|\mathcal{U}_1>, |\mathcal{U}_2>, |\mathcal{U}_3>)$ - матрица смешивания нейтрино в среде. Это означает, что при $J \neq 0$ возможно появление только абелевых ТФ [1]. С другой стороны, $J = 0$ либо в отсутствии смешивания, либо в случае сводящемся к двухнейтринным осцилляциям (если $\sum_\alpha |\mathcal{H}_\alpha|^2 \neq 0$). Таким образом, при $J = 0$ ТФ не возникают.

Согласно Берри [1], абелевы ТФ γ_j определяются интегралами

$$\gamma_j[\vec{q}(t)] = \int_C \mathcal{A}_j[\vec{q}]d\vec{q},$$

где $\mathcal{A}_j[\vec{q}]$ - калибровочное поле с компонентами (связностями Берри) $\mathcal{A}^\alpha_j = i < \mathcal{U}_j|\partial/\partial q_\alpha|\mathcal{U}_j >$, а интегрирование ведется между точками $q(0)$ и $q(t)$ по контуру C, лежащему на плоскости $Q = \{\vec{q}|\sum_\alpha q_\alpha = 0\}$. Налагая на общую фазу $|\mathcal{U}_j>$ условие $\sum_\alpha \arg(U_{\alpha j}) = \sum_\alpha \arg(V_{\alpha j})$ и находя величины $U_{\alpha j}$ в явном виде [3)], получим

$$\mathcal{A}^\alpha_j = (J/3\xi_j)\eta^{\beta\gamma}_\alpha(1/\xi^\beta_j - 1/\xi^\gamma_j),$$

$$\xi^\alpha_j = \eta^{\beta\gamma}_\alpha(\mathcal{E}_j - \mathcal{W}_\beta + q_\beta)(\mathcal{E}_j - \mathcal{W}_\gamma + q_\gamma) - |\mathcal{H}_\alpha|^2, \quad \xi_j = \sum_\alpha \xi^\alpha_j.$$

Можно показать, что при $J \neq 0$ функции ξ^α_j не имеют нулей и, следовательно, поле $\mathcal{A}_j[\vec{q}]$ регулярно на Q-плоскости. Разумеется, $\mathcal{A}^\alpha_j \sim J$ только в выбранной калибровке (назовем ее "J-калибровкой"). При переходе к унитарно-эквивалентному базису $|\tilde{\mathcal{U}}_j>=\exp\{i\chi_j[\vec{q}]\}|\mathcal{U}_j>$ связности $\mathcal{A}^\alpha_j$ и фазы γ_j преобразуются по закону

$$\mathcal{A}^\alpha_j \to \mathcal{A}^\alpha_j - \partial\chi_j/\partial q_\alpha, \quad \gamma_j \to \gamma_j - \chi_j[\vec{q}(t)] + \chi_j[\vec{q}(0)].$$

Очевидным калибровочно-инвариантным следствием несингулярности поля $\mathcal{A}_j[\vec{q}]$ является равенство нулю фаз Берри

[2)] Аналогичным образом определяется символ η^{jk}_i, который будет использоваться ниже.

[3)] Мы не приводим здесь выражение для $U_{\alpha j}$ из-за его громоздкости.

$$\gamma_j^B \equiv \gamma_j[\vec{q}(T)] = \oint\limits_C \mathcal{A}_j d\vec{q}, \quad \vec{q}(T) \stackrel{def}{=} \vec{q}(0),$$

возникающих при периодическом изменении параметров среды. Это означает, что ТФ $\gamma_j[\vec{q}(t)]$ не зависят от распределения плотности и состава вещества между точками $x(0)$ и $x(t)$ в среде.

Для пояснения физического смысла J-калибровки полезно привести явный вид J в представлении Кобаяши - Маскавы [4]:

$$J = \sin\delta \sin\theta_1 \prod_i \left[\eta_i^{jk} \frac{1}{4p_\nu}(m_j^2 - m_k^2)\sin 2\theta_i\right]. \tag{2}$$

Как видно из (2), $\gamma_j = 0$ (в J-калибровке), если какой-нибудь из углов смешивания θ_i равен 0 или $\pi/2$, либо фаза Дирака δ кратна π (нет CP-нарушения), либо спектр масс нейтрино вырожден.

Остановимся на решении уравнения эволюции (1) в адиабатическом приближении, важном для многих приложений теории нейтринных осцилляций в материи [2]. Как нетрудно проверить, адиабатический оператор эволюции 3ν-системы имеет вид

$$S^A(t) = U[\vec{q}(t)]D(-\vec{\Omega}(t))U^+[\vec{q}(0)], \tag{3}$$

где $D(\vec{\Omega})$ - унитарная диагональная матрица: $D(\vec{\Omega}) = ||\exp(i\Omega_j)\delta_{jk}||$, $\Omega_j(t) = \phi_j(t) - \gamma_j[\vec{q}(t)]$ - полные, а $\phi_j(t)$ - "динамические" фазы, определяемые формулой

$$\phi_j(t) = \int\limits_0^t \mathcal{E}_j[\vec{q}(\tau)]d\tau.$$

Из (3) следует, что оператор S^A совершенно равноправно зависит от динамических и топологических фаз, а поскольку он калибровочно-инвариантен, то топологические эффекты невозможно устранить никаким переопределением базиса $\{|\mathcal{U}_j>\}$. Достаточно очевидно, что аналогичное утверждение справедливо и в общем случае неадиабатической эволюции. Согласно (3), вероятность адиабатического перехода $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ за время t равна

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(t) = \sum_i |U_{\alpha i}^\circ U_{\beta i}^t|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_i \eta_i^{jk} U_{\alpha j}^\circ U_{\beta k}^t (U_{\alpha k}^\circ U_{\beta j}^t)^* \exp(i\Omega_{jk}^t),$$

где обозначено для компактности

$$U_{\alpha i}^t = U_{\alpha i}[\vec{q}(t)], \quad \Omega_{jk}^t = \Omega_j(t) - \Omega_k(t).$$

Особый интерес представляет случай периодически изменяющихся параметров среды, $\vec{q}(t+T) = \vec{q}(t)$. Этот случай приближенно реализуется, в частности, при пересечении нейтринным пучком земного шара и важен для анализа нейтринных экспериментов на подземных установках. В силу тождества $\gamma_j^B = 0$, топологические эффекты не влияют на амплитуды переходов за время равное целому числу (K) периодов T и выражение для оператора эволюции становится очень простым:

$$S^A(KT) = U[\vec{q}(0)]D(-K\vec{\phi}(T))U^+[\vec{q}(0)]. \tag{4}$$

Из (4) вытекают формулы для вероятностей переходов, обобщающие аналогичные результаты [5] для среды с постоянной плотностью:

$$\mathcal{P}_{\alpha\alpha}(KT) = 1 - 4\sum_i \eta_i^{jk}\left\{|U^{\circ}_{\alpha j}U^{\circ}_{\alpha k}|\sin\left(\frac{1}{2}K\phi^T_{jk}\right)\right\}^2,$$

$$\mathcal{P}(KT) \equiv \eta_\alpha^{\beta\gamma}(\mathcal{P}_{\beta\gamma}(KT) - \mathcal{P}_{\gamma\beta}(KT)) = 4J_0\sum_i \eta_i^{jk}\sin(K\phi^T_{jk}), \tag{5}$$

где

$$J_0 = -\frac{1}{9}\mathrm{Im}\{\det U^+[\bar{q}(0)]\sum_\alpha\sum_i \eta_\alpha^{\beta\gamma}\eta_i^{jk}U^{\circ}_{\alpha i}U^{\circ}_{\beta j}U^{\circ}_{\gamma k}\}, \tag{6}$$

$$\phi^T_{jk} = \phi_j(T) - \phi_k(T).$$

Как следует из (5) и (6), различие вероятностей переходов $\nu_\beta \to \nu_\gamma$ и $\nu_\gamma \to \nu_\beta$ $(\beta \neq \gamma)$ обусловлено CP-нарушением в лептонном секторе при наличии полного трехнейтринного смешивания. К сожалению, четыре величины $\mathcal{P}_{ee}$, $\mathcal{P}_{\mu\mu}$, $\mathcal{P}_{\tau\tau}$ и $\mathcal{P}$ нельзя одновременно измерить в эксперименте с нейтринным пучком фиксированного флейворного состава. Тем не менее, эффекты CP- (T-) нарушения можно будет пытаться изучать в экспериментах на подземных детекторах следующего поколения (Super Kamiokande, MACRO, LVD и др.), используя пучки нейтрино от ускорителя и атмосферные нейтрино. Этот важный вопрос требует отдельного рассмотрения.

Благодарю Валла А.Н. и Левианта В.М. за полезные обсуждения.

---

1. Berry M.V. Proc. Roy. Soc. London, 1984, A392, 45.
2. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. УФН, 1987, 153, 3.
3. Wolfenstein L. Phys. Rev., 1978, D17, 2369.
4. Kobayashi M., Maskawa T. Prog. Theor. Phys., 1973, D49, 652.
5. Kuo T.K., Pantaleone J. Phys. Lett., 1987, B198, 406; Krastev P.I., Petcov S.T. Phys. Lett., 1988, B205, 84; Toshev S. Phys. Lett., 1989, B226, 335.