Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 8, с. 606 – 610

Оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду (модельные системы и нейрофизиологические данные)

О. И. Москаленко[1], А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина, 410054 Саратов, Россия

Поступила в редакцию 22 января 2016 г.
После переработки 16 марта 2016 г.

Предложен способ определения степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанный на оценке величины условного нулевого показателя Ляпунова. Эффективность метода проверена на модельных системах, находящихся вблизи границы возникновения синхронного режима. Метод применен для определения степени синхронизации, устанавливающейся между различными областями головного мозга крыс линии WAG/Rij, имеющих генетическую предрасположенность к эпилепсии.

DOI: 10.7868/S0370274X16080099

Одним из наиболее распространенных типов хаотической синхронизации в реальных физиологических системах является режим фазовой хаотической синхронизации [1, 2]. Он представляет собой обобщение классической синхронизации периодических колебаний на случай неавтономных и связанных хаотических систем и означает установление между их состояниями захвата фаз при отсутствии корреляции между их амплитудами [3, 4].

На границе фазовой хаотической синхронизации имеет место перемежающееся поведение – режим перемежающейся фазовой синхронизации [5, 6]. В данном случае условие захвата фаз выполняется только в определенные интервалы времени, соответствующие ламинарным (синхронным) участкам поведения, прерывающиеся кратковременными интервалами роста разности фаз, называемыми турбулентными участками. Такой тип поведения характерен и для периодических осцилляторов, подверженных внешнему шумовому воздействию [7]. Он наблюдается при развитии эпилептической активности у человека и лабораторных животных [8]. Иными словами, режим перемежающейся фазовой синхронизации является достаточно распространенным типом поведения, характерным как для модельных, так и для реальных биологических систем.

В случае, когда управляющие параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно слабо, режим перемежающейся фазовой синхронизации классифицируется, как правило, как перемежаемость "игольного ушка", характеризующаяся очень длинными участками ламинарного поведения [5, 9]. Определить степень синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации возможно путем расчета статистических характеристик длительностей ламинарных фаз (распределения длительностей ламинарных участков при фиксированных значениях управляющих параметров, зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) [5, 9] или зависимости условного нулевого показателя Ляпунова от управляющего параметра [10]. В режиме перемежаемости "игольного ушка" условный нулевой показатель Ляпунова оказывается уже отрицательным, а его абсолютная величина может быть рассмотрена как характеристика степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации [10, 11]. Принимая во внимание тот факт, что за отрицательность нулевого условного показателя Ляпунова отвечают ламинарные фазы поведения (см., например, [10, 12]), можно полагать, что оценить степень синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации возможно с помощью расчета условного нулевого показателя Ляпунова по участкам временного ряда, соответствующим только ламинарным фазам поведения систем.

Рассчитать величину условного нулевого показателя Ляпунова систем, оператор эволюции которых задан в явном виде, возможно при помощи класси-

[1] e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

ческих методов и алгоритмов (алгоритм Бенеттина, процедура ортогонализации Грама–Шмидта) [13]. В то же самое время при анализе временных рядов необходимо использовать модифицированные методы и подходы. В частности, в работах [11, 14] предложены методы, позволяющие определить величину нулевого условного показателя Ляпунова неавтономных и связанных систем, находящихся в режиме фазовой хаотической синхронизации, в том числе в присутствии шума, по временному ряду. Целью настоящей работы является обобщение разработанных ранее методов и подходов на случай оценки степени перемежающейся фазовой синхронизации и их применение к модельным и реальным физиологическим системам.

Прежде всего, рассмотрим основные этапы метода оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду. Следует подчеркнуть, что в качестве анализируемого сигнала должна выступать сдвинутая на некоторую константу θ (определяемую экспериментально) временная зависимость разности фаз $x(t) = \Delta\varphi(t) - \theta$ двух различных сигналов (например, снятых с различных областей головного мозга лабораторного животного или человека). При этом, как отмечалось выше, в данной зависимости должны содержаться только ламинарные (синхронные) участки поведения взаимодействующих систем. Следующим этапом являются построение распределения сигнала $x(t)$ и его аппроксимация аналитической закономерностью

$$\rho(x) = A\exp\left[-\frac{2}{D}\left(\varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3}\right)\right], \qquad (1)$$

где ε и Ω – управляющие параметры, A – коэффициент нормировки, и поиск параметров аппроксимации A, D, ε и Ω (более подробно см. [11]). Последним этапом, как и в случае режима фазовой синхронизации, является оценка величины условного нулевого показателя Ляпунова, определяющего степень синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации, по формуле

$$\Lambda = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)\ln|1 + 2\Omega x|dx. \qquad (2)$$

При этом параметры x_1 и x_2 должны быть определены эмпирически из вида $\rho(x)$.

Применим метод оценки степени перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду к конкретным системам. Начнем рассмотрение с модельных систем, а именно с классического неавтономного автогенератора Ван дер Поля, находящегося под внешним шумовым воздействием:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B\sin(\omega t) + \xi, \qquad (3)$$

где $\lambda = 0.1$ – управляющий параметр, B и $\omega = 0.98$ – амплитуда и частота внешнего воздействия, ξ – стохастический гауссов процесс с нулевым средним и единичной дисперсией, и двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1,\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2),\\ \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + a y_1,\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + a y_2,\\ \dot{z}_1 = p + z_1(x_1 - c),\ \dot{z}_2 = p + z_2(x_2 - c),\end{gathered} \qquad (4)$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, $\omega_1 = 0.93$, $\omega_2 = 0.95$ – управляющие параметры, ε – параметр связи [11]. При выбранных значениях управляющих параметров режим фазовой синхронизации возникает при $B_c = 0.029$ в системе (3) и при $\varepsilon_c = 0.042$ в системе (4). При $B \in (0.0238; 0.029)$ и $\varepsilon = (0.0345; 0.042)$ в системах (3) и (4) имеет место перемежающееся поведение: перемежаемость типа I в присутствии шума в системе (3) и перемежаемость "игольного ушка" в системе (4), характеристики которых оказываются идентичными друг другу [15]. Зависимости разности фаз $\Delta\varphi(t)$[2)] от времени в обоих случаях содержат как участки синхронного поведения (ламинарные фазы), где разность фаз оказывается ограниченной ($|\Delta\varphi| < 2\pi$), так и периоды скачкообразного изменения разности фаз на величину 2π, называемые, как отмечалось выше, турбулентными всплесками. Применение метода, описанного выше, только к участкам синхронной динамики взаимодействующих систем при различных значениях управляющих параметров B и ε в указанных выше диапазонах позволяет получить распределения разностей фаз, подчиняющиеся аналитической закономерности (1). Это утверждение иллюстрирует рис. 1, где в качестве примера приведены временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля (3) при $B = 0.027$ в течение ламинарных фаз поведения (a), а также распределение разностей фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (1) с параметрами, указанными в подрисуночной подписи (b). Величина условного нулевого показателя Ляпунова, рассчитанная таким способом, оказывается равной $\Lambda = -0.00904$ (см. табл. 1),

[2)] Для автогенератора Ван дер Поля $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \omega t$, для систем Ресслера $\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Фазы автогенератора Ван дер Поля $\varphi(t)$ и взаимодействующих систем Ресслера $\varphi_{1,2}(t)$ могут быть введены в рассмотрение традиционным способом, например как углы в полярной системе координат на плоскостях $(x, \dot{x})$ и $(x_{1,2}, y_{1,2})$ соответственно.

Таблица 1. Результаты расчета условного нулевого показателя Ляпунова в модельных системах (3) и (4) при различных значениях управляющих параметров*)

Система	Параметр	Λ	Λ_0	δ
Неавтономный автогенератор Ван дер Поля (3)	$B = 0.027$	-0.00904 ± 0.00037	-0.0091 ± 0.00034	0.0066
	$B = 0.028$	-0.0103 ± 0.00035	-0.0106 ± 0.00028	0.0283
	$B = 0.029$	-0.0115 ± 0.00029	-0.0119 ± 0.00024	0.0336
Однонаправленно связанные системы Ресслера (4)	$\varepsilon = 0.035$	-0.0051 ± 0.00106	-0.00547 ± 0.00101	0.0676
	$\varepsilon = 0.037$	-0.0081 ± 0.00109	-0.00847 ± 0.00107	0.0437
	$\varepsilon = 0.040$	-0.0137 ± 0.00104	-0.01302 ± 0.00102	0.0522

*) Λ – значение нулевого условного показателя Ляпунова, полученное при помощи предложенного метода, Λ_0 – аналогичное значение показателя Ляпунова, рассчитанное при помощи алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама–Шмидта, δ – точность разработанного метода, рассчитанная по формуле (5)

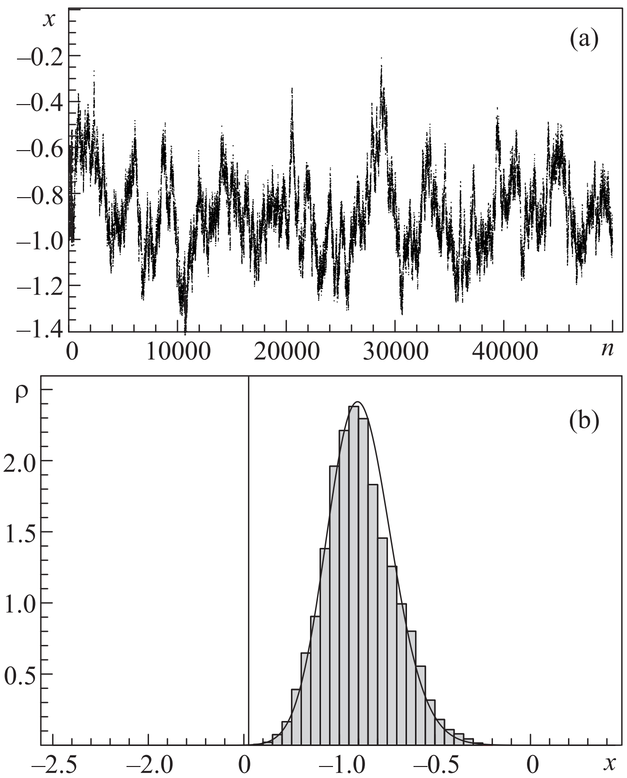

Рис. 1. (a) – Временная зависимость разности фаз $\Delta\varphi) = \varphi(t) - \omega t$ неавтономного автогенератора Ван дер Поля (3) при $B = 0.027$ в течение фаз синхронного поведения (n – дискретное время). (b) – Распределение разности фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (1), $A = 0.000137$, $\Omega = 0.009$, $\varepsilon = 0.00737$, $D = 0.0009$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $\theta = 1.0$

что находится в хорошем соответствии с результатами расчета аналогичного показателя Ляпунова при помощи алгоритма Бенеттина. Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях управляющих параметров автогенератора Ван дер Поля (3) и взаимодействующих систем Ресслера (4). В табл. 1 приведены результаты расчета показателя Ляпунова в исследуемых системах при нескольких значениях управляющих параметров при помощи как предложенного метода, так и алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Там же содержится оценка точности разработанного метода по формуле

$$\delta = \frac{|\Lambda - \Lambda_0|}{|\Lambda_0|}, \tag{5}$$

где Λ – значение нулевого условного показателя Ляпунова, полученное при помощи предложенного метода, Λ_0 – аналогичное значение показателя Ляпунова, рассчитанное при помощи алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Видно, что во всех рассмотренных случаях величина ошибки оказывается достаточно малой, что делает разработанный метод пригодным для определения степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации.

Теперь рассмотрим результаты применения метода к экспериментальным временным рядам, для которых прямой расчет показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов является невозможным в связи с отсутствием оператора эволюции, описывающего динамику системы (см. выше). Для оценки величины показателя Ляпунова были использованы реальные экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм (ЭЭГ), снятые с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij, имеющей генетическую предрасположенность к эпилепсии. Все эксперименты проводились в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалара. Они были выполнены в соответствии с этическими нормами и включали регистрацию ЭЭГ у свободнодвижущихся животных в течение 24 ч.

Известно, что эпилептические ЭЭГ представляют собой перемежающиеся временные реализации, содержащие паттерны синхронной активности (пик-волновые разряды), чередующиеся с фоновой активностью головного мозга (рис. 2) [16]. Пик-волновые

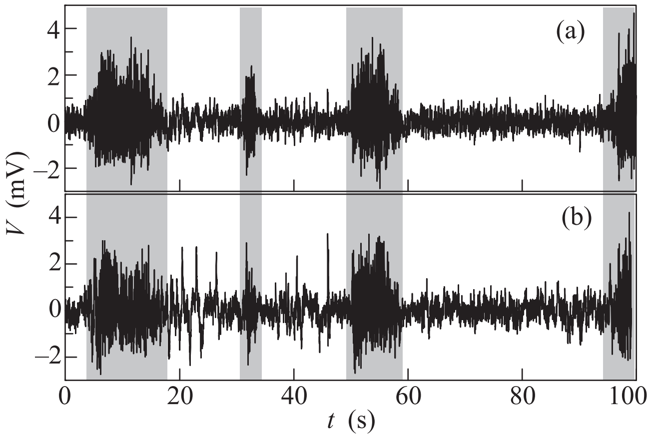

Рис. 2. Сигналы ЭЭГ, снятые с ретикулярного (a) и вентробазального (b) ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij. Участки ЭЭГ, соответствующие пик-волновым разрядам, отмечены серыми прямоугольниками

разряды характеризуются высокой степенью синхронизма. Следовательно, они являются ламинарными фазами поведения на сигналах ЭЭГ, в то время как участки фоновой активности могут быть рассмотрены как турбулентные фазы. Иными словами, для оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по сигналам ЭЭГ разработанный метод должен быть применен только к тем участкам, где содержатся пик-волновые разряды (серые прямоугольники на рис. 2). Выделение пик-волновых разрядов из сигналов ЭЭГ осуществлялось автоматически при помощи метода [17], основанного на непрерывном вейвлетном преобразовании, и контролировалось опытным нейрофизиологом. Непрерывное вейвлетное преобразование с материнским вейвлетом Морле использовалось также для введения фазы анализируемых сигналов во время пик-волновых разрядов на обоих отводах ЭЭГ [18, 19].

Рис. 3 иллюстрирует результаты применения метода к исследуемым сигналам ЭЭГ. На нем представлены временная зависимость разности фаз между сигналами ЭЭГ, снятыми с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij в течение пик-волновых разрядов (a), а также распределение этой разности фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (1) (b). Видно, что несмотря на наличие "тяжелых хвостов", аналитическая закономерность является хорошей аппроксимацией численно полученного распределения. Значение показателя Ляпунова, рассчитанное по этому распределению, составляет $\Lambda = -0.0524357\,\text{c}^{-1}$, что свидетельствует о наличии перемежающейся фазовой синхронизации между указанными отделами головного мозга. Подобная ситуация характерна и для других областей головного мозга рассматриваемой крысы линии WAG/Rij. Однако, как показывают проведенные расчеты, степень синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации, устанавливающейся между различными областями головного мозга, оказывается также различной. В частности, значение нулевого условного показателя Ляпунова, вычисленное по сигналам ЭЭГ, снятым с лобного отдела коры головного мозга и вентробазального ядра таламуса, составляет $\Lambda = -0.429936\,\text{c}^{-1}$, а величина того же показателя Ляпунова, полученная по сигналам ЭЭГ, снятым с затылочного отдела коры головного мозга и ретикулярного ядра таламуса, оказывается равной $\Lambda = -0.398955\,\text{c}^{-1}$. Это свидетельствует о более высокой степени синхронности режима перемежаю-

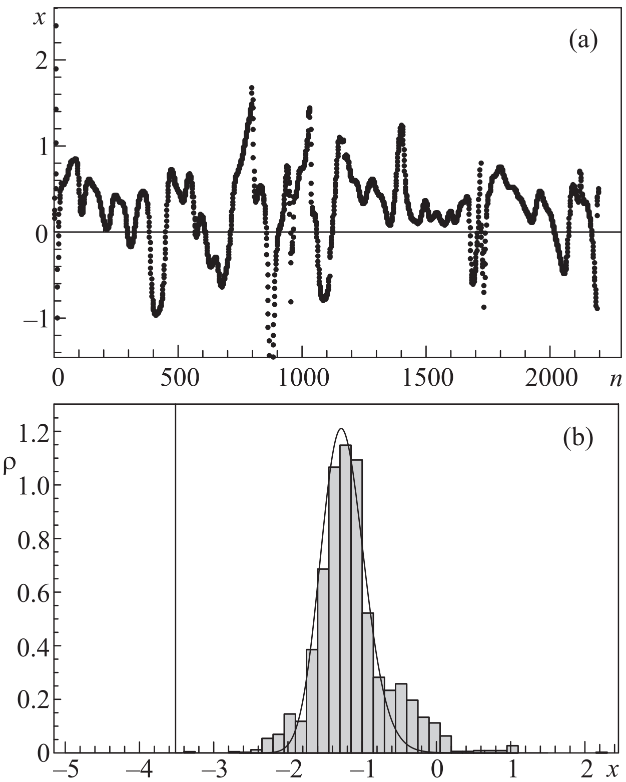

Рис. 3. (a) – Временная зависимость разности фаз между сигналами ЭЭГ, снятыми с ретикулярного и вентробазального ядер таламуса головного мозга крысы линии WAG/Rij в течение пик-волновых разрядов (n – дискретное время). (b) – Распределение разности фаз и его аппроксимация аналитической закономерностью (1), $A = 0.0016$, $\Omega = 0.09$, $\varepsilon = 0.148$, $D = 0.038$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $\theta = -0.8824$

щейся фазовой синхронизации, устанавливающейся между данными отделами головного мозга крысы, по сравнению со случаем, приведенным на рис. 3.

Таким образом, в настоящей работе предложен метод оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду, основанный на вычислении условного нулевого показателя Ляпунова. Его эффективность проверена на модельных системах (неавтономном автогенераторе Ван дер Поля в присутствии шума, двух однонаправленно связанных системах Ресслера), допускающих расчет показателей Ляпунова при помощи классических методов и алгоритмов. Метод применен для оценки степени синхронности режима, устанавливающегося между различными областями головного мозга крысы линии WAG/Rij. Выявлено, что различные области головного мозга характеризуются различной степенью синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации.

Работа выполнена при поддержке совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых–кандидатов наук (проект МК-4574.2016.2), а также гранта Министерства образования и науки РФ (соглашения # 3.23.2014К и 931). Исследование сигналов электроэнцефалограмм осуществлялось в рамках гранта Российского научного фонда (проект # 14-12-00224).

1. N. B. Janson, A. G. Balanov, V. S. Anishchenko, and P. V. E. McClintock, Phys. Rev. Lett. **86**(9), 1749 (2001).
2. P. Bob, M. Palus, M. Susta, and K. Glaslova, Neuroscience Lett. **447**, 73 (2008).
3. В. С. Анищенко, Д. Э. Постнов, Письма в ЖТФ **14**(6), 569 (1988).
4. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**(11), 1804 (1996).
5. A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **79**(1), 47 (1997).
6. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and S. Boccaletti, Phys. Rev. Lett. **97**, 114101 (2006).
7. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, A. A. Ovchinnikov, and S. Boccaletti, Phys. Rev. E **76**(2), 026206 (2007).
8. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. A. Makarov, A. N. Pavlov, and E. Sitnikova, *Wavelets in Neuroscience*, Springer, Heidelberg, N.Y., Dordrecht, London (2015).
9. М. К. Куровская, Письма в ЖТФ **34**(24), 48 (2008).
10. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and M. K. Kurovskaya, Phys. Rev. E **78**, 036212 (2008).
11. O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, and A. E. Hramov, Phys. Rev. E **92**, 012913 (2015).
12. А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина, ЖТФ **79**(10), 1 (2009).
13. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, Meccanica **15**, 9 (1980).
14. О. И. Москаленко, А. С. Павлов, Письма в ЖТФ **40**(12), 66 (2014).
15. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and O. I. Moskalenko, Phys. Lett. A **375**, 1646 (2011).
16. E. Sitnikova, A. E. Hramov, V. V. Grubov, A. A. Ovchinnkov, and A. A. Koronovsky, Brain Research **1436**, 147 (2012).
17. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, I. S. Midzyanovskaya, E. Sitnikova, and C. M. Rijn, Chaos. **16**(4), 043111 (2006).
18. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, Chaos. **14**(3), 603 (2004).
19. А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Письма в ЖЭТФ **79**(7), 391 (2004).