Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 5, стр. 296-298 10 сентября 1991 г.

О СВЯЗИ ТОЧНОРЕШАЕМЫХ И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫХ КВАНТОВЫХ МЕХАНИК С УРАВНЕНИЯМИ НА КОНФОРМНЫЕ БЛОКИ В ДВУМЕРНЫХ ТЕОРИЯХ

А.С.Горский

Институт теоретической и экспериментальной физики АН СССР
117259, Москва

Поступила в редакцию 22 июля 1991 г.

Обнаружена связь между квазиклассическим пределом уравнений на конформные блоки в двумерной конформной теории и специальными типами одномерных квантовых механик.

В работе [1] была высказана гипотеза, что имеется аналогия между недавно обнаруженными квазиточнорешаемыми задачами (КТРЗ) квантовой механики (КМ) [2-4] и рациональными двумерными конформными теориями поля. Авторы надеялись, что представляется возможным найти в квантовой механике объекты, имеющие смысл конформных блоков, структурных констант операторной алгебры, спектра конформных размерностей. В настоящей работе мы получим явные формулы между ТРЗ и КТРЗ и трех и четырехточечными конформными блоками в теории с нуль-вектором на втором уровне.

Напомним необходимые нам в дальнейшем сведения о ТРЗ и КТРЗ. Их выделенность состоит в том, что они естественным образом могут быть описаны в терминах группы $SL(2,R)$ [2-5]. Действительно, гамильтонианы специальных квантовых механик имеют следующий вид

$$H = C_{ab}J^aJ^b + C_aJ^a, \tag{1}$$

где C_{ab} и C_a - постоянные величины, а J^a являются генераторами $SL(2,R)$ в дифференциальном представлении

$$J_0 = -j + \xi\frac{d}{d\xi},\ \ J_+ = 2j\xi - \xi^2\frac{d}{d\xi},\ \ J_- = \frac{d}{d\xi}, \tag{2}$$

ξ - переменная группового многообразия, j - спин представления. В дифференциальной форме (1) принимает следующий вид

$$H = Q_4(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + Q_3(\xi)\frac{d}{d\xi} + Q_2(\xi), \tag{3}$$

где $Q_n(\xi)$ - полином n-й степени по ξ. После выполнения необходимых диффеоморфизмов и калибровочных преобразований гамильтониан (3) приводится к стандартному виду

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),\ \ x = \int^{\xi} d\xi'/\sqrt{Q_4(\xi')}. \tag{4}$$

Критерий точнорешаемости сводится к наложению условия независимости (3) от спина представления j после чего $H_{\text{тр}}$ редуцируется к

$$H_{\text{тр}} = Q_2(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + Q_1(\xi)\frac{d}{d\xi}. \tag{5}$$

Заметим, что число неподвижных точек при диффеоморфизме (4) равно двум для ТРЗ и трем или четырем для КТРЗ. В дальнейшем нам будет удобно другое описание квантовых механик, предложенное в [3]. Для этого спектральная задача $H\Psi = E\Psi$ переписывается в следующем виде

$$Q_4(\xi)\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{b_\alpha}{\xi-\xi_\alpha}\frac{d}{d\xi} + \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{C_\alpha}{\xi-\xi_\alpha}\right]\Psi(\xi) = 0, \tag{6}$$

где спектральный параметр включен в C_α. Задача определения спектра сводится к определению чисел с при фиксированных значениях b_α и ξ_α. После калибровочного преобразования (6) приводится к каноническому виду

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \sum_{\alpha}\frac{b_\alpha(b_\alpha-1)}{(\xi-\xi_\alpha)^2} + \sum_{\alpha}\frac{C_\alpha}{\xi-\xi_\alpha}\right]\tilde{\Psi} = 0, \tag{7}$$

причем, как было показано в [3], C_α имеют смысл спинов представлений $SL(2,R)$, задающих потенциал. Для ТРЗ $\alpha = 1, 2$, а для КТРЗ $\alpha = 1-3$ или $1-4$, причем на спины имеется ограничение

$$\sum_{\alpha} b_\alpha = 1 - 2j. \tag{8}$$

В [3] была также предложена полезная интерпретация задачи о нахождении спектра, как задачи о нахождении состояния равновесия подвижных заряженных частиц (нулей волновых функций) в поле неподвижных дионов, расположенных в точках ξ_α.

Перейдем к описанию конформных блоков в двумерной теории с нуль-вектором на втором уровне. Условие отщепления нуль-вектора позволяет получить уравнение на конформные блоки в квазиклассическом пределе $c \to \infty$, где c - центральный заряд

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1-m_i^2}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{c_i}{z-z_i}\right)y_c(z) = 0. \tag{9}$$

Конформные блоки связаны с $y_c(z)$ соотношением

$$\int_c dt < J_+(t)V_{2,1}(z)\prod_{i=1}^{N}V_i(z_i) >= \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{-\frac{(1-m_i)(1-m_j)}{\gamma^2}}y_c(z), \tag{10}$$

где $J_+(t)$ - экранирующий оператор, $V_{2,1}$ - нуль-вектор, $V_i(z)$ - вертексные операторы с классическими конформными размерностями $\Delta_i = \frac{1}{2}(1-m_i^2)$, а $\gamma^2 = \frac{2}{3c^2}$. Условие нейтральности приводит к соотношению

$$\sum_{i=1}^{N}(1-m_i) = 2. \tag{11}$$

В (9) подразумевается топология сферы.

Сравнивая уравнения (7) и (9) можно провести отождествление

$$b_\alpha = \frac{1-m_\alpha}{2},\ \Delta_\alpha = -2b_\alpha(b_\alpha - 1) \tag{12}$$

и, таким образом, классическая конформная размерность выражается через спин представления $SL(2,R)$. Так как число полюсов потенциала в (7), как правило, $K = 2$ для ТРЗ и $K = 3$ для КТРЗ можно утверждать, что имеется соответствие между ТРЗ и трехточечниками и между КТРЗ и четырехточечниками в конформной теории. Заметим, что связь между конформными размерностями и собственными значениями оператора J^2 соответствует конструкции Сугавары для $SL(2,R)$ Каца - Муди.

Аналогия между (7) и (9) позволяет понять смысл операторного разложения в КМ. Действительно, операторное разложение типа

$$V_{\Delta_1}(z_1)V_{\Delta_2}(z_2) \to \frac{C^{\Delta_3}_{\Delta_1\Delta_2}}{(z_1 - z_2)^{\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2}} V_{\Delta_3}(z_1) \qquad (13)$$

может быть переформулировано в терминах соотношения между волновыми функциями КТРЗ и ТРЗ. Изменение числа вертексных операторов в (13) с точки зрения КМ соответствует уменьшению числа полюсов в потенциале (7) на единицу, а аналог (13) имеет вид

$$\Psi^{\text{ктр}}_{b_1,b_2}(z_1,z_2) = \sum_b \frac{C^b_{b_1b_2}}{(z_1 - z_2)^{\alpha}} \Psi^{\text{тр}}_b(z_1), \qquad (14)$$

т.е. структурные константы $C^b_{b_1b_2}$ соответствуют коэффициентам разложения волновых функций КТРЗ по волновым функциям ТРЗ. С точки зрения КМ операторное разложение формулируется в пространстве параметров задачи, поэтому естественно ожидать особенностей, приводящих к нетривиальным фазам Берри [7]. В нашем случае пространство параметров трехмерно, поэтому в точках пересечения уровней гамильтониана, как функции (ξ_1, ξ_2, ξ_3) возникают монопольные особенности. В картине кулоновских зарядов структура разложения (14) соответствует различным типам слияния зарядов, образования мультиполей. Отметим также, что наша точка зрения на операторное разложение в КМ не согласуется с выдвинутой в [1] гипотезой, что его аналогом является соотношение, трилинейное по волновым функциям.

В [6] была отмечена связь квазиклассического уравнения (9) с уравнением, определяющим униформизацию римановой поверхности с отмеченными точками. При этом (11) играло роль соотношения Римана - Роха для 2-дифференциалов на римановой сфере, что соответствовало $j = 0$ в КМ. Обобщение на высшие рода приводит к (8) с произвольным j, поэтому естественно предположить, что уравнение (7) с произвольным j. Тогда для ТРЗ и, соответственно, трехточечников можно алгебраическим образом определять конформные блоки при произвольных j, а для четырехточечников вплоть до j.

Подробно предложенная картина будет рассмотрена в отдельной публикации.

Автор благодарен Ольшанецкому М.А., Рослому А.А., Селиванову К.Г. и Фоку В.А. за полезные обсуждения.

---

1. Morozov A.Yu. et al. Int. J. Mod. Phys., 1990, A5, 803.

2. Turbiner A.V. Comm. Math. Phys., 1989, 118, 467.

3. Ушверидзе А.В. ЭЧАЯ, 1989, 20, 1185.

4. Shifman M.A. Int. J. Mod. Phys., 1989, A4, 2897.

5. Alhassid Y., Gursey F., Iachello F. Ann. Phys., 1983, 148, 346.

6. Gomez C., Sierra G. Phys. Lett., 1991, 255, 51.

7. Berry M.V. Proc. Roy. Soc., 1984, 45, 392.