

Гамильтоновы уравнения движения вихревой нити во вращающемся бозе-конденсате и их “солитонные” решения

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 19 мая 2016 г.

Уравнение движения квантованной вихревой нити в захваченном бозе-конденсате [A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000)] обобщено на случай произвольной агармонической анизотропной вращающейся ловушки и представлено в вариационной форме. Для профилей плотности конденсата вида $\rho = f(x^2 + y^2 + \text{Re } \Psi(x + iy))$ при наличии плоскости симметрии $y = 0$ найдены в квадратурах решения $x(z)$, описывающие выходящие на поверхность стационарные вихри U- и S-типов, а также уединенные волны. В строго цилиндрической геометрии получены также аналогичные трехмерные конфигурации вихревой нити, равномерно движущиеся вдоль оси z . Проанализирована зависимость решений от вида функции $f(q)$.

DOI: 10.7868/S0370274X16120092

Введение. Динамика квантованных вихревых нитей составляет важную часть физики бозе-конденсированных газов (см., например, обзоры [1, 2] и многочисленные ссылки в них). При низких температурах бозе-конденсат хорошо описывается уравнением Гросса–Питаевского,

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\mathbf{r}_{\text{lab}}, t)\psi + g|\psi|^2\psi. \quad (1)$$

При достаточно быстром вращении удерживающего потенциала $V(\mathbf{r}_{\text{lab}}, t)$ безвихревое состояние квантового газа из атомов массы m оказывается энергетически невыгодным, и вихрь с циркуляцией $\Gamma = 2\pi\hbar/m$ проникает внутрь конденсата. Вихревая нить со своим полем скорости существует на фоне неоднородной невозмущенной (массовой) плотности $\rho_0 = m|\psi_0|^2$ и невозмущенной скорости \mathbf{v}_0 , которые не зависят от времени во вращающейся вокруг оси z системе координат:

$$\mathbf{v}_0 = \Omega(\nabla\varphi - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}]), \quad \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0. \quad (2)$$

Предположим, что частота вращения Ω мала по сравнению с характерной поперечной частотой ловушки ω_\perp , чем обеспечивается устойчивость невозмущенного течения [3, 4]. Тогда поле плотности $\rho_0(\mathbf{r})$ в приближении Томаса–Ферми и в пренебрежении членами порядка $(\Omega/\omega_\perp)^2$ определяется через уравнение

$$V(\mathbf{r}) + (g/m)\rho_0(\mathbf{r}) \approx \mu = \text{const}, \quad (3)$$

где $V(\mathbf{r})$ – потенциал ловушки во вращающейся системе, μ – достаточно большой химический потенциал газа, удовлетворяющий условию $\mu \gg \hbar\omega_\perp$. Отметим, что характерный поперечный размер конденсата $R_0 \sim (\mu/m\omega_\perp^2)^{1/2}$, тогда как характерная толщина кора вихря $\xi \sim \hbar/(m\mu)^{1/2}$. Их отношение велико, $R_0/\xi \sim \mu/\hbar\omega_\perp \gg 1$, что позволяет использовать т.н. приближение локальной индукции в динамике вихревой нити. Условие $\rho_0(\mathbf{r}) = 0$ определяет (обычно замкнутую) поверхность Томаса–Ферми Σ , которую можно считать эффективной границей конденсата. Топология поверхности Σ на практике чаще всего бывает сферической либо тороидальной (см., например, [5, 6]), но может оказаться и более сложной в зависимости от потенциала ловушки – конденсат может иметь несколько сквозных “дыр” и/или внутренние полости.

Поскольку вихревая нить переносится полным полем скорости, уравнение ее движения в приближении локальной индукции имеет вид

$$\mathbf{R}_t = \frac{\Gamma\Lambda}{4\pi} \{ \kappa \mathbf{b} + [(\nabla\rho_0(\mathbf{R}))/\rho_0(\mathbf{R})] \times \mathbf{t} \} + \mathbf{v}_0(\mathbf{R}), \quad (4)$$

где $\Lambda = \log(R_0/\xi) \approx \log(\mu/\hbar\omega_\perp) \approx \text{const} \gg 1$ – большой логарифм, κ – локальная кривизна нити, \mathbf{t} – единичный вектор касательной, \mathbf{b} – единичный вектор бинормали. Для гармонической ловушки это уравнение было выведено в работе [7] с помощью спивающихся асимптотических разложений и затем в линеаризованном виде было использовано в нескольких работах [8, 9]. Существенно, что гамильтонова структура уравнения (4) ранее не обсуждалась, за исклю-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

чением случая $\Omega = 0$ (см. [10], где уравнение локальной индукции на неоднородном статичном фоне выводится из неканонического гамильтонова формализма). Однако известно, что стационарные решения уравнения (4) в случае квадратичного потенциала являются экстремальными определенными функционала [11].

Целью данной работы является формулировка вариационного принципа для уравнения (4) в общем случае, а также нахождение аналитических нелинейных решений для некоторого (довольно широкого) класса профилей плотности, однородных по z . Хотя реальные бозе-конденсаты ограничены в осевом направлении, полученные аналитические решения могут оказаться приближенно верными для достаточно длинных конденсатов.

Вариационная формулировка. Пусть расположение вихревой нити в пространстве задается векторной функцией $\mathbf{R}(\beta, t)$ с помощью произвольного продольного параметра β . Заметим, что из уравнений (2) следует существование векторного потенциала для невозмущенной плотности тока:

$$\rho_0(\nabla\varphi - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}]) = \text{curl } \mathbf{A}. \quad (5)$$

При этом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\text{curl } \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r})} \text{curl } \mathbf{A} = -2\mathbf{e}_z. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (4) можно переписать следующим образом (см. подробности в [10] для случая $\Omega = 0$):

$$\Gamma [\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_t] \rho_0(\mathbf{R}) = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}, \quad (7)$$

где гамильтонов функционал есть

$$\mathcal{H} = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \Lambda \int \rho_0(\mathbf{R}) |\mathbf{R}_\beta| d\beta + \Gamma \Omega \int (\mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}_\beta) d\beta. \quad (8)$$

Этот функционал при граничном условии $\mathbf{A}|_\Sigma = 0$ приближенно (в силу соотношения $R_0/\xi \gg 1$) представляет собой ту часть полной кинетической энергии течения, которая зависит от положения вихревой нити. Важно, что уравнение (7) следует из вариационного принципа с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \Gamma \int (\mathbf{D}(\mathbf{R}) \cdot [\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_t]) d\beta - \mathcal{H}, \quad (9)$$

причем векторная функция $\mathbf{D}(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{R}) = \rho_0(\mathbf{R}). \quad (10)$$

Таким образом, требуемая вариационная формулировка динамики одной вихревой нити найдена,

если известен векторный потенциал \mathbf{A} . Обобщение для нескольких нитей просто в идейном смысле, но затруднительно технически, поскольку нужно учитывать нелокальное взаимодействие между нитями, для чего необходимо знать решение уравнения

$$\text{curl } \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r})} \text{curl } \mathbf{A}_\Gamma = \mathbf{\Omega}_\Gamma, \quad (11)$$

где $\mathbf{\Omega}_\Gamma$ – сингулярное поле завихренности, создаваемое нитями, \mathbf{A}_Γ – векторный потенциал соответствующей плотности тока.

При необходимости, используя результаты работы [12], можно сформулировать вариационный принцип в динамике вихревой нити и при полностью нестационарном профиле фоновой плотности. Это значит, что потенциал ловушки не только вращается, но и деформируется. Мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

Случай глобальной функции тока. Чтобы вести дальнейшее рассмотрение более конкретно, необходимо иметь явное решение уравнения (6). Обратимся к случаю, когда поле невозмущенной скорости двумерно, соленоидально и не зависит от координаты z . Это значит, что существует общая для всех z функция тока невозмущенной скорости:

$$\Theta(x, y) = \frac{\Omega}{2} [x^2 + y^2 + \theta(x, y)], \quad \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0, \quad (12)$$

где гармоническая функция $\theta(x, y)$ определяет собой осевую асимметрию течения. Поле плотности при этом имеет вид

$$\rho_0(\mathbf{r}) = f(x^2 + y^2 + \theta(x, y); z), \quad (13)$$

где $f(q; z)$ – достаточно произвольная функция двух переменных. Введем функцию $Q(z)$, определяемую условием $f(Q; z) = 0$, и функцию

$$F(q; z) = \int_q^{Q(z)} f(u; z) du, \quad (14)$$

которая положительна внутри и обращается в ноль на границе конденсата. Тогда векторный потенциал есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{e}_z}{2} F(x^2 + y^2 + \theta(x, y); z). \quad (15)$$

Если конденсат не имеет “дыр”, то гармоническая функция $\theta(x, y)$ может быть представлена в виде суммы

$$\theta(x, y) = \text{Re} \sum_{n \geq 2} c_n (x + iy)^n \quad (16)$$

с произвольными комплексными коэффициентами c_n . Если же поверхность Σ топологически не эквивалентна сфере, то разнообразие аналитических функций комплексной переменной $\Psi(x+iy)$ позволяет рассматривать довольно экзотические формы конденсатов, в том числе с квантованными циркуляциями невозмущенной скорости $l_j\Gamma$ вокруг каждой из дыр.

Стоит отметить, что квадратичной анизотропной ловушке соответствует выбор $\theta = \epsilon(x^2 - y^2)$ и

$$f_{\text{quadr}} \propto 1 - (1 + \epsilon)x^2 - (1 - \epsilon)y^2 - z^2/z_{\text{max}}^2.$$

Здесь и далее все длины обезразмерены на R_0 , а все времена – на $2\pi R_0^2/\Gamma\Lambda \gg 1/\omega_{\perp}$.

Выберем в качестве продольного параметра β координату z . Тогда $\mathbf{R} = (x(z, t), y(z, t), z)$ и обезразмеренный гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int f(x^2 + y^2 + \theta(x, y); z) \sqrt{1 + x_z^2 + y_z^2} dz - \frac{\tilde{\Omega}}{2} \int F(x^2 + y^2 + \theta(x, y); z) dz, \quad (17)$$

где $\tilde{\Omega} = 2\pi R_0^2 \Omega/\Gamma\Lambda$. Соответствующие неканонические гамильтоновы уравнения движения имеют структуру

$$x_t = \frac{1}{f} \frac{\delta H}{\delta y}, \quad -y_t = \frac{1}{f} \frac{\delta H}{\delta x}. \quad (18)$$

Аналитические решения. Стационарные (во вращающейся системе координат) конфигурации вихревой нити суть экстремали функционала H . В ряде случаев они могут быть вычислены аналитически, например, когда f не зависит от z , а все коэффициенты c_n вещественны. Вихревая нить лежит в плоскости симметрии $y = 0$, а минимизируемый функционал принимает вид

$$2\hat{H} = \int f(\alpha(x)) \sqrt{z_{\beta}^2 + x_{\beta}^2} d\beta - \tilde{\Omega} \int F(\alpha(x)) z_{\beta} d\beta, \quad (19)$$

где $\alpha(x) = x^2 + \sum_{n \geq 2} c_n x^n$. Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа интегрируются:

$$f \frac{dz}{ds} - \tilde{\Omega} F = E = \text{const}, \quad (20)$$

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 1 - \left(\frac{E + \tilde{\Omega} F}{f} \right)^2, \quad (21)$$

где ds – элемент длины дуги. Если мы полагаем константу интегрирования E нулем, то получим так называемые U- и S-вихри, выходящие на поверхность (см., например, [13–15]). Если же $E = f(0) - \tilde{\Omega} F(0)$,

то решениями будут солитоноподобные зависимости $x(z)$, причем в некоторых случаях это будут кривые с самопересечением – “перехлестом”. Разумеется, самопересекающиеся решения нарушают условие применимости приближения локальной индукции, и поэтому не физичны. Соответствующие примеры приведены на рис. 1 и 2 для простейшего выбора $q = (1 + \epsilon)x^2 + (1 - \epsilon)y^2$, $\epsilon = 9/16$, $f(q) = 1 - q$.

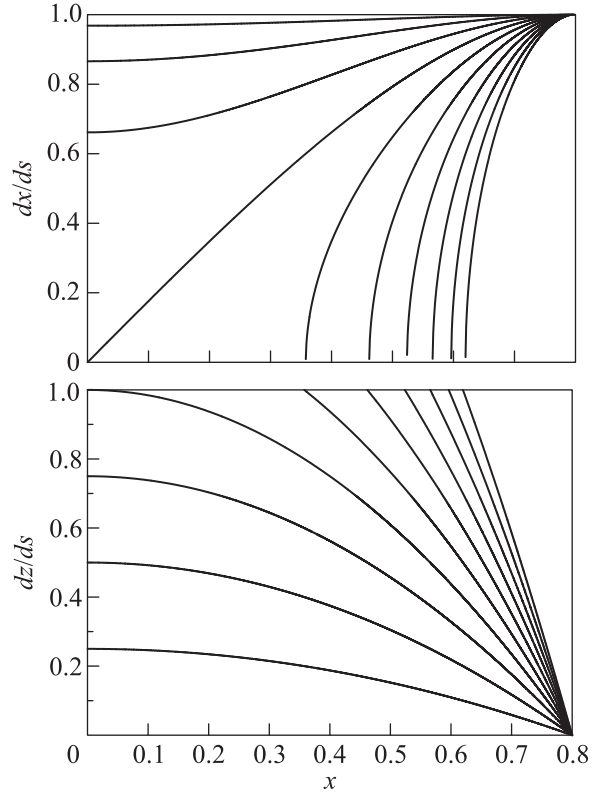


Рис. 1. Примеры фазовых кривых для U- и S-вихрей при различных значениях $\tilde{\Omega}$. При $\tilde{\Omega} < 2$ имеем S-вихри (достигающие значения $x = 0$), при $\tilde{\Omega} > 2$ получаются U-вихри. При $\tilde{\Omega} = 2$ имеем половину предельного “солитона” без самопересечения

Цилиндрическая геометрия. Дальше всего продвинуться в решении задачи удается при наличии цилиндрической симметрии. При этом профиль плотности статичен в лабораторной системе координат и нет необходимости переходить во вращающуюся систему для формулировки вариационного принципа. Удобно ввести комплексную неизвестную переменную $w(z, t) = r(z, t)e^{i\phi(z, t)} = x(z, t) + iy(z, t)$. Векторная функция $\mathbf{D}(\mathbf{R})$ теперь имеет явный вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}) = \frac{G(r^2)}{2r} (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (22)$$

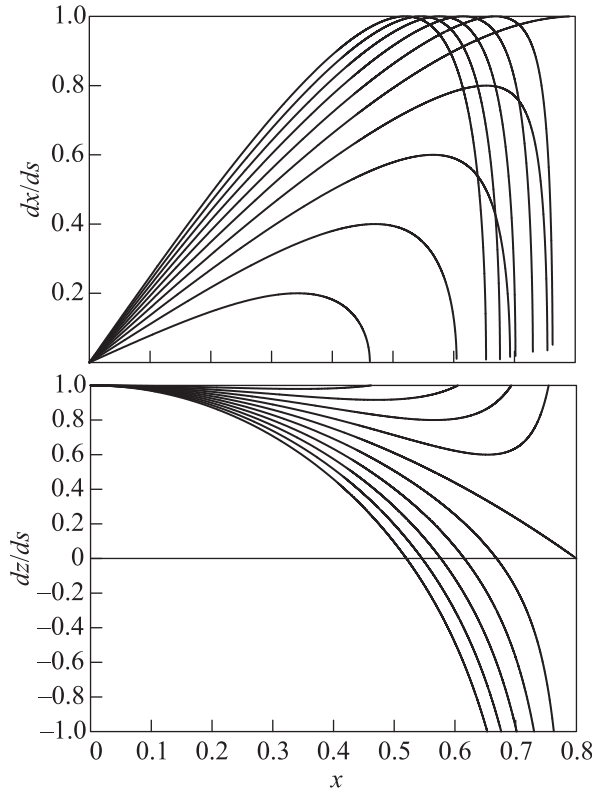


Рис. 2. Примеры фазовых кривых для “солитонов” при различных значениях $\tilde{\Omega}$. При $1 < \tilde{\Omega} < 2$ имеем “хорошие” решения, при $\tilde{\Omega} > 2$ получаются кривые с “перехлестом”

где неотрицательная функция

$$G(q) = \int_0^q f(u) du = F(0) - F(q). \quad (23)$$

Лагранжиан нити определяется выражением

$$L_* = \int \frac{i}{2} G(|w|^2) \left[\frac{w_t}{w} - \frac{w_t^*}{w^*} \right] dz - \int f(|w|^2) \sqrt{1 + |w_z|^2} dz, \quad (24)$$

а уравнение ее движения выглядит следующим образом:

$$i w_t = \frac{f'(|w|^2)}{f(|w|^2)} \left[\frac{2w - w_z^2 w^* + |w_z|^2 w}{2\sqrt{1 + |w_z|^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w_z}{2\sqrt{1 + |w_z|^2}} \right). \quad (25)$$

Интегралы движения данного уравнения (помимо гамильтониана $H_* = \int f(|w|^2) \sqrt{1 + |w_z|^2} dz$):

$$N = \int G(|w|^2) dz = \text{const}, \quad (26)$$

$$P = - \int \frac{i}{2} G(|w|^2) \left[\frac{w_z}{w} - \frac{w_z^*}{w^*} \right] dz = \text{const}. \quad (27)$$

Решения вида $w = r(z - vt) \exp[i\phi(z - vt) + i\tilde{\Omega}t]$ доставляют экстремум функционалу

$$\tilde{H}_* = H_* + \tilde{\Omega}N - vP = \int (f ds + \tilde{\Omega}G dz - vG d\phi), \quad (28)$$

где $ds = \sqrt{dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2}$. Из требования $\delta\tilde{H}_* = 0$ следуют формулы

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{vG + M}{r^2 f}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{C - \tilde{\Omega}G}{f} \quad (29)$$

с постоянными M и C . Отсюда получаем

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{f^2(r^2) - [vG(r^2) + M]^2 / r^2 - [C - \tilde{\Omega}G(r^2)]^2}{f^2(r^2)}. \quad (30)$$

Заметим, что при $v \neq 0$ либо при $M \neq 0$ кривая с необходимостью является трехмерной. Для трехмерных “солитонов” константы интегрирования $M = 0$, $C = f(0)$. Для трехмерных U- и S-вихрей $M = -vG(r_{\text{max}}^2)$, $C = \tilde{\Omega}G(r_{\text{max}}^2)$.

Отдельного внимания заслуживает малоугловое приближение $|w_z|^2 \ll 1$, поскольку оно позволяет качественно проанализировать зависимость динамики от профиля плотности. В этом случае гамильтониан и уравнение движения даются следующими формулами:

$$\mathcal{H}_{(2)} = \int f(|w|^2) \left(1 + \frac{|w_z|^2}{2} \right) dz, \quad (31)$$

$$i w_t = -\frac{1}{2} w_{zz} + \frac{f'(|w|^2)}{f(|w|^2)} \left[w - \frac{w_z^2 w^*}{2} \right]. \quad (32)$$

При малых $|w|^2$ имеем $f'(|w|^2)/f(|w|^2) \approx c_0 + c_1|w|^2$. Если $c_1 < 0$, то уравнение (32) похоже в длинноволновом пределе на фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), а при $c_1 > 0$ – на дефокусирующее. Отметим также, что гауссов профиль плотности $f(r^2) = \exp(-r^2)$ дает весьма компактное уравнение типа НУШ, но с другой кубической нелинейностью:

$$i w_t = -\frac{1}{2} w_{zz} - w + \frac{w_z^2 w^*}{2}. \quad (33)$$

Заключение. Таким образом, вариационная формулировка динамики вихревой нити во вращающемся бозе-конденсате позволила нам найти аналитически некоторые стационарные решения. В частности, кроме известных вихрей S- и U-типов, получены солитоноподобные конфигурации, которые до этого момента, по всей видимости, в литературе не обсуждались. Выведенные в данной работе неканонические гамильтоновы уравнения движения могут быть в дальнейшем использованы

для численного моделирования динамики нити. Не исключено, что взаимодействие “солитонов” может приводить к явлению типа аномальных волн (“волн-убийц”) и сопровождаться выходом вихревой нити на поверхность с последующим ее разрывом.

-
1. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, R135 (2001).
 2. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
 3. A. Recati, F. Zambelli, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 377 (2001).
 4. S. Sinha and Yv. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 190402 (2001).
 5. A. Aftalion and I. Danaila, *Phys. Rev. A* **69**, 033608 (2004).
 6. I. Danaila, *Phys. Rev. A* **72**, 013605 (2005).
 7. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
 8. A. Fetter, *Phys. Rev. A* **69**, 043617 (2004).
 9. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603 (2006).
 10. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
 11. A. Aftalion and T. Riviere, *Phys. Rev. A* **64**, 043611 (2001).
 12. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **68**, 047302 (2003).
 13. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **64**, 053611 (2001).
 14. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
 15. A. Aftalion and I. Danaila, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).