Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 6, стр. 308 — 310 25 сентября 1991 г.

МАРГИНАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ КОНФОРМНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ С Z_3-СИММЕТРИЕЙ

А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики АН СССР
113556, Москва

Поступила в редакцию 23 июля 1991 г.

Найдены нетривиальные деформации W_3-алгебры Замолодчикова, сохраняющие центральный заряд.

В последнее время наметился прогресс в решении проблемы классификации конформных теорий поля, являющейся составной частью теории струн. Одно из наиболее интенсивно разрабатываемых направлений связано с W-алгебрами, открытыми (для ряда специальных случаев) Замолодчиковым [1]. К настоящему времени на основе BBSS-конструкции [2] удалось продвинуться достаточно далеко по пути систематизации W-алгебр. Последние достижения систематизированы в [3], где предложен индустриальный метод построения W-алгебр на основе тождеств Якоби. Остается, однако, открытым целый ряд вопросов, часть из которых обсуждалась в статье Морозова [4], в частности, вопрос о существовании непрерывных деформаций W-алгебр, сохраняющих центральный заряд c. Решению этого вопроса и посвящена настоящая статья. Мы приводим явную конструкцию семейства W-алгебр, допускающих маргинальные деформации.

Непрерывные деформации конформных теорий, сохраняющие центральный заряд c, были обнаружены Морозовым с соавторами [5,6] для тензора энергии-импульса, имеющего вид квадратичной формы

$$T = t_{ab} \, {}^{*}_{*} J_a J_b {}^{*}_{*} \tag{1}$$

на алгебре токов $SL(2)_4$. Решение было найдено ими на основе конструкции, построенной независимо ими, а также несколько раньше Галперном и Киритсисом [7]. В дальнейшем рядом авторов было найдено много различных киральных конформных теорий, допускающих маргинальные деформации. В частности, в [8] авторами было показано, что пространство деформаций конформных теорий вида (1) с диагональным тензором инерции t_{ab} и алгеброй токов $SO(N)_2$ является грассмановым многообразием $G_c(R^{N-1})$. Независимо и из несколько иных соображений подобное предсказание было сделано в [9], хотя явная конструкция и не приводилась.

Перейдем к непосредственному описанию нашей конструкции. Ограничимся для простоты случаем W_3-алгебры, хотя аналогичные конструкции могут быть построены и для других W-алгебр. W_3-алгебра образована двумя полями T и Q спинов 2 и 3 соответственно, причем операторное разложение для $Q(z)$ и $Q(w)$ имеет вид [1]:

$$Q(z)Q(w) = \frac{c/3}{(z-w)^6} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)^3} + \\ + \frac{1}{(z-w)^2}\left\{2b^2\Lambda(w) + \frac{3}{10}\partial^2 T(w)\right\} + O\left(\frac{1}{z-w}\right), \tag{2}$$

где $\Lambda(z) =^{\times}_{\times} TT^{\times}_{\times}(z) - \frac{3}{10}\partial^2 T(z)$ и $b^2 = \frac{16}{22+5c}$. Будем искать T и Q в виде дифференциальных полиномов на алгебре токов $U(1)^N_k$:

$$
\begin{aligned}
T &= t_{ij} {}^{*}_{*} H_i H_j {}^{*}_{*} \\
Q &= M + G, \\
M &= m_{ijk} {}^{*}_{*} H_i H_j H_k {}^{*}_{*} \\
G &= g_{ij} {}^{\times}_{\times} H_j \partial H_j {}^{\times}_{\times},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где ${}^{*}_{*}\,{}^{*}_{*}$ - симметризованное и ${}^{\times}_{\times}\,{}^{\times}_{\times}$ - обычное нормальные произведения.

Обобщение конструкции аффинно-вирасоровского управляющего уравнения [5,7] на случай W-алгебр дает систему уравнений на структурные константы теории: t_{ij}, m_{ijk} и $g_{ij} = -g_{ji}$. После подстановки анзаца

$$
\begin{aligned}
t_{ij} &= \frac{1}{2k} R^{\mu}_i R^{\mu}_j, \\
m_{ijk} &= \frac{1}{3k^{3/2}} R^{\mu}_i R^{\nu}_j R^{\lambda}_k \mu_{\mu\nu\lambda}, \\
g_{ij} &= \frac{1}{k} R^{\mu}_i R^{\nu}_j \gamma_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где R^{μ}_i образуют ортогональный c-репер в R^N :

$$
R^{\mu}_i R^{\nu}_i = \delta^{\mu\nu}, \tag{5}
$$

получаем систему уравнений на $O(c)$ тензоры $\mu_{\mu\nu\lambda}$ и $\gamma_{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mu(\kappa\rho}\mu_{\sigma\tau)\mu} &= \frac{b^2}{2}\delta_{(\kappa\rho}\delta_{\sigma\tau)}, \\
\mu_{\mu\mu\lambda} &= 0, \\
\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\mu\lambda} &= \frac{1}{10}(1-2b^2)\delta_{\nu\lambda},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

решения которой существуют при $c = 2$, $c = 8$. Соответствующие пространства деформаций суть классы эквивалентности c-реперов относительно действия $O(c)$, т.е. многообразия Грассмана $G_c(R^N)$.

Таким образом, продемонстрировано существование деформаций W_3-алгебр, сохраняющих центральный заряд.

С помощью конструкции вертексного оператора

$$
\begin{aligned}
E_\alpha &=^{\times}_{\times} e^{i\alpha\cdot\varphi} {}^{\times}_{\times} c_\alpha, \\
H_i &= i\partial\varphi_i,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где коциклы c_α удовлетворяют соотношениям $c_\alpha c_\beta = \epsilon(\alpha\beta)c_{\alpha+\beta}$, $\epsilon(\alpha\beta) = \pm 1$, можно осуществить вложение пространства деформаций W_3-алгебр вида (3) при $k = 1$ в пространство деформаций W_3-алгебр, построенных в виде дифференциальных полиномов на алгебре $SU(N)_1$:

$$
T = \sum_\alpha T_\alpha {}^{\times}_{\times} E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha {}^{\times}_{\times},
$$

$$
Q = \frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta\gamma}{}' S_{\alpha\beta\gamma} {}^{*}_{*} E_\alpha E_\beta E_\gamma {}^{*}_{*} + \frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta\gamma}{}' A_{\alpha\beta\gamma} {}^{*}_{*} E_\alpha E_\beta E_\gamma {}^{*}_{*} +
$$

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+} U_\alpha \overset{\times}{\times}\nu_1(E_\alpha\partial E_{-\alpha} - E_{-\alpha}\partial E_\alpha) + \nu_2[E_\alpha\partial E_{-\alpha}]\overset{\times}{\times}, \tag{8}$$

где $\sum^{\prime}$ означает, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, Δ_+ - система положительных корней, $S_{\alpha\beta\gamma} = S_{-\alpha,-\beta,-\gamma}$, $A_{\alpha\beta\gamma} = -A_{-\alpha,-\beta-\gamma}$.

С этой целью достаточно подставить в анзац (8) формулы

$$\begin{gathered}
\overset{\times}{\times}E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha}E_\alpha\overset{\times}{\times} = \overset{\times}{\times}(\alpha\cdot\vec{H})^2\overset{\times}{\times},\\
\overset{\times}{\times}E_\gamma\overset{*}{*}E_\alpha E_\beta\overset{*}{*} + E_{-\gamma}\overset{*}{*}E_{-\alpha}E_{-\beta}\overset{*}{*}\overset{\times}{\times} = \frac{1}{2}\epsilon(\alpha\beta)\overset{\times}{\times}(\alpha-\beta,\vec{H})(\alpha+\beta,\vec{H})^2\overset{\times}{\times},\\
\overset{*}{*}E_\alpha E_\beta E_\gamma - E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\gamma}\overset{*}{*} = -\frac{1}{2}\epsilon(\alpha\beta)\overset{\times}{\times}(\alpha\cdot\vec{H})(\beta\cdot\partial\vec{H}) - (\beta\cdot\vec{H})(\alpha\cdot\partial\vec{H})\overset{\times}{\times},
\end{gathered} \tag{9}$$

которые могут быть получены из операторного разложения для полей $E_\alpha(z)$ при подстановке (7).

Таким образом, удается построить и неабелевы реализации деформируемых W-алгебр. Представляется интересным осуществить обобщение приведенной здесь конструкции на другие W-алгебры.

Авторы выражают благодарность Галперну М.Б. за возможность ознакомиться с результатами [9] до публикации и Оберсу Н.А. за критические замечания.

---

1. Замолодчиков А.Б. ТМФ, 1985, 65, 347.
2. Bais F.A. et al. Nucl. Phys. B, 1988, 304, 348.
3. Kausch H.G., Watts G.M.T. Nucl. Phys. B, 1991, 354, 740.
4. Морозов А.Ю. ЯФ, 1990, 51, 1190.
5. Morosov A.Yu. et al. Int. Journ. Mod. Phys. A, 1990, 5, 803.
6. Morosov A.Yu., Shifman M.A., Turbiner A.Y. Int. Journ. Mod. Phys. A., 1990, 5, 2953.
7. Halpern M.B., Kiritsis E. Mod. Phys. Lett. A, 1989, 4, 1373.
8. Белов А.А., Лозовик Ю.Е. Письма в ЖЭТФ, 1990, 52, 1170; ЯФ, 1991, 53, 1464.
9. Halpern M.B., Obers N.A. Preprint LBL-29824 UCB-PTH-90/48, LBL-29356 UCB-PTH-90/31.